

FORMELN
ZUR KONFORMEN ABBILDUNG
DES ERDELLIPSOIDS IN DER EBENE

VON

PROF. DR. L. KRÜGER
GEH. REGIERUNGSRAT

HERAUSGEGEBEN
VON DER PREUSS. LANDESAUFNAHME

BERLIN 1919
IM SELBSTVERLAGE

ZU BEZIEHEN DURCH DIE BUCHHANDLUNG
VON E. S. MITTLER & SOHN



2881/47

Vorwort.

In der Übereinkunft zwischen dem Deutschen Reiche und Österreich-Ungarn, Ende 1917, zur Vereinheitlichung des Vermessungswesens ist festgesetzt worden, daß gemeinsame ebene rechtwinklige Koordinaten benutzt werden sollen. Diese Koordinaten werden durch direkte konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene und zwar von Meridianstreifen, deren Ausdehnung 3° in Länge beträgt, erhalten. Es ist dies dieselbe Projektion, die GAUSS bei der hannoverschen Gradmessung und Landesvermessung anwandte. Die notwendigen Formeln, die für die Zwecke einer Landesvermessung manchmal 1° und mehr über die festgesetzten Grenzen hinausreichen müssen, sollen nach der Vereinbarung in der Form zur Anwendung kommen, wie sie in meiner Abhandlung: »Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene« (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Instituts, Neue Folge Nr. 52. Verlag von B. G. TEUBNER in Leipzig, 1912) entwickelt sind. Des leichteren Gebrauchs wegen habe ich nun auf Wunsch der Preuß. Landesaufnahme die in Betracht kommenden Formeln mit Beispielen im folgenden zusammengestellt. Die dazu gehörigen Tafeln sind von der Landesaufnahme berechnet worden und werden in einem besonderen Hefte erscheinen.

Potsdam, im September 1918.

L. Krüger.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Einleitung und Bezeichnungen	5
Berechnung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten, der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den geographischen Koordinaten B und L.	
§ 2. Formeln für $l = \pm 3^\circ$ und darüber hinaus	7
§ 3. Formeln von etwas geringerer Genauigkeit	9
§ 4. Einfluß der kleinen Glieder in den Gleichungen (3) des § 3 für $l = \pm 1,5^\circ$	10
§ 5. Andere Form der Gleichungen (2) des § 2	11
§ 6. Einfluß der kleinen Glieder in den Gleichungen (6) des § 5	13
§ 7. Formeln für $l = \pm 1,5^\circ$	14
§ 8. Beispiele	16
Berechnung der geographischen Breite und Länge, der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.	
§ 9. Formeln, die für l bis über $\pm 3^\circ$ hinaus reichen	19
§ 10. Formeln für $l = \pm 2^\circ$	21
§ 11. Beispiele	23
Berechnung der Differenzen der ebenen rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte aus der Länge und Richtung der geodätischen Linie und umgekehrt der letzteren aus den ebenen Koordinaten.	
§ 12. Beziehung zwischen dem Azimut und dem Richtungswinkel	26
§ 13. Berechnung der ebenen Koordinatendifferenzen aus der Länge und dem Richtungswinkel einer geodätischen Linie	27
§ 14. Berechnung der Länge und Richtung der geodätischen Linie aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte	28
§ 15. Beispiel zu § 13	30
§ 16. Beispiel zu § 14	32
Übertragung der Entfernung und ihrer Richtungen auf dem Ellipsoid in die Ebene und umgekehrt.	
§ 17. Entfernungs- und Richtungsreduktionen	34
§ 18. Berechnung der Entfernungsreduktion	35
§ 19. Berechnung der Richtungsreduktionen	37
§ 20. Beispiel: Berechnung der Koordinatendifferenzen mittels der geodätischen Linie	39
§ 21. Beispiel: Berechnung der geodätischen Linie aus den ebenen Koordinaten zweier Punkte	41
Transformation der ebenen konformen Koordinaten.	
§ 22. Verschiedene Arten der Koordinatenumwandlung	42
§ 23. Transformationsgleichungen	44
§ 24. Beispiel	46
§ 25. Beispiel	49
§ 26. Umwandlung rechtwinkliger sphäroidischer Koordinaten in ebene rechtwinkliger konforme Koordinaten	51
§ 27. Beispiel	53
§ 28. Transformation konformer Koordinaten mittels der Entfernungs- und Richtungsreduktionen	56
§ 29. Herleitung einiger Werte für m_0	60

Einleitung und Bezeichnungen.

Zur Herleitung und Darstellung der Ergebnisse der Landesvermessungen dienen ebene rechtwinklige Koordinaten der trigonometrischen Punkte. § 1.

Zur Übertragung des Vermessungsgebietes, für welches das BESSEL'sche Erdellipsoid als Referenzfläche benutzt wird, sollen nach der Vereinbarung von 1917 zunächst Meridianstreifen gebildet werden, deren Grenzmeridiane einen Abstand von 3° in Länge haben. Darauf ist jeder Meridianstreifen für sich mittels der direkten GAUSS'schen konformen Abbildung auf die Ebene zu projizieren.

Für jeden Streifen sind dabei zwei Bedingungen zu erfüllen, erstens: der mittlere Meridian des Streifens, der Hauptmeridian, wird in der Ebene durch eine Gerade, die Abszissenachse, dargestellt, und zweitens: jede Strecke auf der Abszissenachse soll zu dem elliptischen Bogen auf dem Hauptmeridian, dessen Bild sie ist, in dem konstanten Verhältnis m_0 stehen.

Hierbei werden folgende Festsetzungen getroffen.

Das Vergrößerungsverhältnis m in einem beliebigen Punkt ist das Verhältnis des Bildes ds' eines Linearelements ds auf dem Ellipsoid zu diesem selbst, $m = \frac{ds'}{ds}$; auf der Abszissenachse ist sein Wert m_0 .

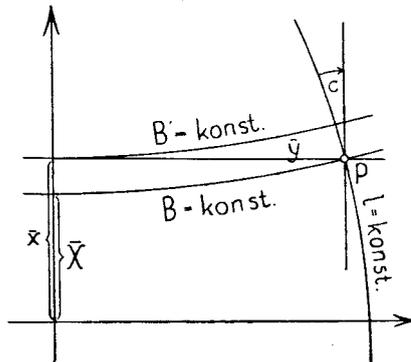
Die geographischen Koordinaten, die Breite und die Länge eines Punktes P auf dem Ellipsoid, werden durch B und L bezeichnet. L wird von einem Anfangsmeridian an positiv nach Osten gezählt. Die geogr. Länge von P , gezählt vom Hauptmeridian des Streifens, in dem P liegt, sei l .

Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten des Bildpunktes p von P seien \bar{x} , \bar{y} ; es wird gesetzt:

$$\bar{x} = m \cdot x \quad \bar{y} = m \cdot y.$$

Der Anfangspunkt des ebenen Koordinatensystems kann einem beliebigen Punkte des Hauptmeridians entsprechen. y und l sollen dasselbe Vorzeichen haben, beide werden nach Osten positiv angenommen; x sei positiv nach Norden.

Zu dem Schnittpunkte des Parallelkreises in der Breite B mit dem Hauptmeridian gehöre die Abszisse



$X = m \cdot X$, während dem Endpunkte der Abszisse \bar{x} die geogr. Breite B' entspreche. X und x sind also gleich den linearen Längen der Meridianbogen vom Koordinatenanfangspunkte bis zu den Breiten B und B' .

Die Konvergenz des Meridians, die durch c bezeichnet wird, ist bei der konformen Abbildung der spitze Winkel, den das Bild des Meridians in p mit der Parallelen zur Abszissenachse, oder auch der spitze Winkel, den der Meridian in P mit dem Urbild der Parallelen zur x -Achse bildet. c hat dasselbe Vorzeichen wie y und l .

Den numerischen Rechnungen und den Tafelwerten sind die BESSEL'schen Erddimensionen, in Metern, für die große Halbachse a und die kleine Halbachse b zugrunde gelegt:

$$\log a = 6,804\,6434\,637, \quad \log b = 6,803\,1892\,839;$$

hiernach ist, wenn $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ das Quadrat der Exzentrizität ist:

$$\log(1 - e^2) = 9,997\,0916\,404 - 10.$$

Daraus ergibt sich:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 0,006\,6743\,722\,3061 \dots \quad \log e^2 = 7,824\,4104\,23654 \dots - 10$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = 0,006\,7192\,187\,9797 \dots \quad \log e'^2 = 7,827\,3187\,83254 \dots - 10.$$

Ferner bezeichnen: R den Krümmungsradius im Meridian, N den Querkrümmungsradius und $r = \frac{1}{2}(R+N)$ den mittleren Krümmungsradius des Erdellipsoids für die geogr. Breite B . Mit

$$e'^2 \cos^2 B = \varepsilon^2, \quad 1 + \varepsilon^2 = Q = \frac{N}{R}$$

ist:

$$N = a \sqrt{1 - e'^2}, \quad R = a \sqrt{1 + e'^2}, \quad r = a \sqrt{\frac{1 + e'^2}{Q}};$$

$$\log a \sqrt{1 + e'^2} = 6,806\,0976\,435 \dots$$

Die entsprechenden Werte in der Breite B' werden mit einem Akzent versehen, also $e'^2 \cos^2 B' = \varepsilon'^2$, $1 + \varepsilon'^2 = Q' = \frac{N'}{R'}$, $r' = \frac{1}{2}(R'+N')$.

An Konstanten kommen noch vor: M der Modul der BRUGES'schen Logarithmen und $q = \frac{1}{\arcsin 1}$.

$$M = 0,434\,2944\,819 \dots \quad \log M = 9,637\,7843\,113 \dots - 10$$

$$q = 57,295\,7795\,131 \dots \quad \log q = 1,758\,1226\,324 \dots$$

Da bei den folgenden Rechnungen die Dezimalteilung des Grades vorausgesetzt ist, so bedeutet q'' den arc. rad. in Sekunden, also $\log q'' = 5,75812\dots$

Bei den Zahlenbeispielen sind folgende Bezeichnungen zu erwähnen.

Der Logarithmus einer Zahl ist durch vorgesetzte Punkte kenntlich gemacht, z. B. $x\dots 0,50664$, $\sin x\dots 8,94461$ bedeuten $\log x = 0,50664$ und $\log \sin x = 8,94461$.

Zur Vermeidung langer Dezimalbrüche mit Nullen im Anfang wird manchmal die Stelle der ersten Ziffer durch eine kleiner gedruckte Zahl mit negativen Vorzeichen angegeben, z. B. $\overset{5}{2}815 = 0,0002815$.

Die Einheiten einer Dezimalstelle werden öfter dadurch bezeichnet, daß der Abkürzung Einh die Ziffer als Index beigefügt wird, die die Dezimalstelle angibt, z. B. ist 5Einh_7 gleich 5 Einheiten der 7. Dezimalstelle.

Um die Summierung algebraischer Zahlen zu erleichtern, wird für negative Zahlen ihre dekadische Ergänzung und das Zeichen \times gebraucht, das eine negative Einheit an der Stelle, wo es steht, bedeutet, z. B. $\times 5139 = -4861$.

Sind in Formeln mit Zahlenkoeffizienten anstatt der Zahlen ihre Logarithmen angegeben, so ist dies durch Einschließung in eckige Klammern kenntlich gemacht.

Die in den Formeln vernachlässigten kleinen Glieder n -ter Ordnung werden durch G'_n bezeichnet.

Berechnung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten, der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den geographischen Koordinaten.

Gegeben ist: die geographische Breite B und die Länge l , gezählt vom Hauptmeridian.

Gesucht werden: die ebenen rechtwinkligen Koordinaten \bar{x} , \bar{y} , die Konvergenz des Meridians c und das Vergrößerungsverhältnis m .

Formeln für $l = +3^\circ$ und darüber hinaus. Es wird gesetzt:

§ 2.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{6} M \varepsilon^2 (\sin l \cos B)^2, & v_2 &= (6 + 4\varepsilon^2) v_1, \\ v_3 &= (2,5 + 2\varepsilon^2) v_1 = \frac{1}{2} (v_2 - v_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Für Punkte, die bis zu einer Entfernung

$$l = \pm 3^\circ$$

und auch noch darüber hinaus vom Hauptmeridian abliegen, gelten folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \log \sin u &= \log (\sin l \cos B) + v_1 \\ \log y &= \log (N \sin u) + \frac{1}{3} M \sin^2 u + \frac{13}{90} M \sin^4 u \\ \log \operatorname{tg} c &= \log (\operatorname{tg} l \sin B) + v_2 \\ \log c &= \log (q \operatorname{tg} c) - \frac{1}{3} M \operatorname{tg}^2 c + \frac{13}{90} M \operatorname{tg}^4 c \\ \log (x - X) &= \log \left(2 N \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \right) - v_3 \\ &= \log \left(\frac{N}{2} \operatorname{tg} c \sin u \right) - v_3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} M (\sin^2 u - \operatorname{tg}^2 c) \\ &\quad + \frac{135}{208} \cdot \frac{13}{90} M (\sin^4 u + \operatorname{tg}^4 c) \\ \log \frac{m}{m_0} &= \log (\cos c \sec l) + 3 v_1 \\ &\quad \frac{1}{3} M \dots 9,160\,6631 - 10 \quad \frac{13}{90} M \dots 8,7975 - 10. \\ X &= \text{Meridianbogen vom Anfangspunkte bis zur Breite } B. \\ \bar{x} &= m_0 x, \quad \bar{y} = m_0 y. \end{aligned} \quad (2)$$

Die bei (2) vernachlässigten Glieder sind

$$\begin{aligned} \text{in } \log y: & - \frac{1}{30} M l^2 (1 + 12 \operatorname{tg}^2 B) \sin^4 u + \frac{251}{2835} M \sin^6 u + Gl_1 \\ \text{in } \log \operatorname{tg} c: & + M l^2 \sin^4 u + Gl_2 \\ \dots \log (x - X), \text{ in beiden Gleichungen: } & \frac{1}{48} M \sin^2 u \operatorname{tg}^2 c + Gl_3 \\ \dots \log \frac{m}{m_0}: & + \frac{1}{2} M l^2 \sin^4 u + Gl_4. \end{aligned} \quad (2^*)$$

Der Fehler in y , nach (2) berechnet, wird hiernach im Maximum, bei $B = 35,7^\circ$ und für $l = 3^\circ$ noch nicht $-0,0007$ m und für $l = 2,5^\circ$ noch nicht $-0,0003$ m; für $B = 45^\circ$ und für $l = 3^\circ$ wird der Fehler gleich $-0,0005$ m, für $l = 2,5^\circ$ gleich $-0,0002$ m. Unter l ist hier wie auch später in der Regel der absolute Betrag verstanden.

Will man bei 10-stelliger Rechnung für $l = 3^\circ$ den Wert von y genau haben, so hat man in der zweiten Gleichung (2) zu $\log y$ das Glied

$$- \frac{1}{30} M l^2 (12 + 13 \cos^2 B) \sin^4 u = -h \sin^4 u \quad (2^{**})$$

hinzuzufügen. Das andere Glied 6. Ordnung ist bei $l = 3^\circ$ noch ohne Belang.

Für $\log h$ ergeben sich folgende Werte:

$B = 30^\circ$	35°	40°	45°	50°	55°	60°
$\log h = 6,34$	$6,50$	$6,63$	$6,73$	$6,81$	$6,88$	$6,93-10$

Der Fehler von $x - X$ nach (2) erreicht im Maximum, bei $B = 45^\circ$, und für $l = 3^\circ$ erst $-0,00017$ m. bei $2,5^\circ$ erst $-0,00006$ m.

Der Fehler von c für $l = 3^\circ$ ist im Maximum, bei $B = 22,2^\circ$, gleich $+0,00036$, bei $B = 45^\circ$ gleich $+0,00013$ und bei 60° gleich $+0,00002$.

Der Fehler von $\frac{m}{m_0}$ beträgt für $l = 3^\circ$ bei $B = 0^\circ: 25$, bei $30^\circ: 11$, bei $45^\circ: 3$ und bei 60° nur $0,4$ Einheiten der 9. Dezimalstelle.

Innerhalb des Streifens, dessen Grenzmeridiane $l = \pm 3^\circ$ sind, darf man $4\varepsilon^2$ in r_2 und $2\varepsilon^2$ in r_3 , Gl. (1), vernachlässigen. Der dadurch begangene Fehler kann bei $l = 3^\circ$ in c erst $0,0006$, in $x - X$ noch nicht $0,0001$ m werden.

Formeln von etwas geringerer Genauigkeit. Mit geringem Genauigkeitsverlust läßt sich die Gleichung für $\log(x - X)$ noch vereinfachen, indem man für $\text{tg } c$ seinen Wert einsetzt und das letzte Glied in der zweiten Gleichung für $\log(x - X)$, Gl. (2), fortläßt. Auch die Formeln für $\log c$ und für $\log \frac{m}{m_0}$ können noch etwas umgeformt werden. Das Formelsystem lautet alsdann:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{6} M \varepsilon^2 (\sin l \cos B)^2 \\
 \log \sin u &= \log (\sin l \cos B) + v \\
 \log y &= \log (N \sin u) + \frac{1}{3} M \sin^2 u + \frac{13}{90} M \sin^4 u \\
 \log c &= \log (q \text{tg } l \sin B) - \frac{1}{3} M (\text{tg } l \sin B)^2 \\
 &\quad + \frac{13}{90} M (\text{tg } l \sin B)^4 + 6v \\
 \log (x - X) &= \log \left(\frac{N}{2} \sin u \text{tg } l \sin B \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} M [\sin^2 u - (\text{tg } l \sin B)^2] + \frac{7}{2} v \\
 &= \log \left(\frac{c}{q} \frac{N}{2} \sin u \right) + \frac{1}{4} M \sin^2 u + \frac{1}{12} M (\text{tg } l \sin B)^2 - \frac{5}{2} v \\
 &= \log \left(\frac{y}{2} \frac{c}{q} \right) - \frac{1}{12} M [\sin^2 u - (\text{tg } l \sin B)^2] - \frac{5}{2} v \\
 \log \frac{m}{m_0} &= \quad + \frac{1}{2} M \sin^2 u + \frac{1}{4} M \sin^4 u + 3v; \\
 \bar{y} &= m_c y. \quad \bar{x} = m_c x.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Der genauere Wert für 6ν ist ν_2 , für $\frac{7}{2}\nu$ ist er gleich $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ und für $-\frac{5}{2}\nu$ gleich $\frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)$.

Der Fehler von $\log(x - X)$ in der dafür zuerst angegebenen Gleichung ist, wenn l in Graden vorausgesetzt wird, gleich

$$+ \frac{1}{96} M \left(\frac{l}{\rho} \right)^4 (9 - 5 \sin^2 2B) + Gl_6;$$

danach wird für $l = 2,5^\circ$ der Fehler von $x - X$ bei $B = 30^\circ$ gleich $+0,00051$, bei 45° gleich $+0,00046$, bei 60° gleich $+0,00052$ m. Etwas günstiger sind die zweite und dritte Gleichung für $\log(x - X)$. Bei ihnen sind die Fehler von $x - X$ für $l = 2,5^\circ$ bei $B = 30^\circ$ gleich $+0,00043$ bzw. $-0,00025$, bei 45° beidemal gleich $+0,00006$ und bei 60° gleich $-0,00025$ bzw. $+0,00044$ m.

Der Fehler von $\log c$ in (3) ist:

$$- \frac{1}{3} M \left(\frac{l}{\rho} \right)^4 \varepsilon^2 \cos^2 B (2 - 5 \cos^2 B) - \frac{251}{2835} M \left(\frac{l}{\rho} \right)^6 \sin^6 B + Gl_8;$$

dementsprechend wird der Fehler von c für $l = 3^\circ$ bei $B = 30^\circ$ erst $+0,00025$, bei 45° gleich $+0,0004$ und bei 60° gleich $-0,0004$.

Die Genauigkeit von $\log \frac{m}{m_0}$ hat sich nicht wesentlich gegen (2) geändert.

Die Formeln (3) reichen für y , c und $\frac{m}{m_0}$ mithin noch für $l = \pm 3^\circ$ aus, während sie für $x - X$ bis $l = \pm 2,5^\circ$ genügen, wenn die Genauigkeit $\frac{1}{2}$ Millimeter in x und y betragen soll; in c ist der Fehler sogar für $l = 3^\circ$ noch kleiner als $0,0005$.

§ 4. Einfluß der kleinen Glieder in den Gleichungen (3) des § 3 für $l = \pm 1,5^\circ$. Es ist nun festzustellen, welchen Einfluß die kleineren Glieder in (3) auf dem Grenzmeridian $l = 1,5^\circ$ eines Meridianstreifens erlangen können.

Das Glied

$$+ \frac{13}{90} M (\operatorname{tg} l \sin B)^4$$

in $\log c$ kann hier vernachlässigt werden, denn der dadurch verursachte Fehler in c wird für $l = 1,5^\circ$ bei $B = 30^\circ$ gleich $0,00004$, bei $B = 45^\circ$ gleich $0,0002$ und bei $B = 60^\circ$ gleich $0,0005$. Für $l = 2,4^\circ$ und $B = 60^\circ$ wird der Fehler gleich $0,005$.

Ebenso kann das Glied

$$+ \frac{1}{4} M \sin^4 \mu$$

in $\log \frac{m}{m_0}$ fortbleiben. Seine Vernachlässigung ruft in $\log \frac{m}{m_0}$ für $l = 1,5^\circ$ einen Fehler hervor, der bei $B = 30^\circ$ gleich $2,9 \operatorname{Einh}_3$, bei 45° gleich $1,3 \operatorname{Einh}_3$ und bei 60° gleich $0,3 \operatorname{Einh}_3$ wird.

Wird das Glied

$$+ \frac{13}{90} M \sin^4 u$$

in $\log y$ weggelassen, so entsteht in y für $l = 1,5^\circ$ ein Fehler, der bei $B = 30^\circ$ gleich $0,0055$ m, bei 45° gleich $0,0020$ m und bei 60° gleich $0,0004$ m ist. Ist $l < 1^\circ$, so bleibt von $B = 36,5^\circ$ an nordwärts der Fehler in y kleiner als $0,0005$ m.

Der Einfluß von ν in $\log \sin u$ auf y wird auf dem Grenzmeridian bei $B = 30^\circ$ gleich $0,062$ m, bei 45° gleich $0,026$ m und bei 60° gleich $0,004$ m.

Das Glied 6ν in $\log c$ beeinflusst c auf dem Grenzmeridian im Maximum, bei $B = 26,55^\circ$, um $0,020$, bei $B = 30^\circ$ um $0,019$, bei 45° um $0,012$ und bei 60° um $0,004$.

Der Einfluß des Gliedes $\frac{7}{2} \nu$ in der ersten Gleichung für $\log(x - X)$ auf $x - X$ selbst ist für $l = 1,5^\circ$ im Maximum, bei $B = 24,1^\circ$, gleich $0,0015$ m, bei $B = 30^\circ$ gleich $0,0014$ m, bei 45° gleich $0,0007$ m und bei 60° gleich $0,0002$ m. In den anderen beiden Gleichungen für $\log(x - X)$ wird der Einfluß von $\frac{5}{2} \nu$ auf $x - X$ gleich $\frac{5}{7}$ der obigen Werte, im Maximum also $0,0011$ m.

Das Glied in der ersten Gleichung für $\log(x - X)$:

$$+ \frac{1}{4} M [\sin^2 u - (\operatorname{tg} l \sin B)^2].$$

wofür man auch angenähert $\frac{1}{4} M \sin^2 l \cos 2B$ setzen kann, erreicht für $l = 1,5^\circ$ in $x - X$ folgende Werte: $+0,09$ m bei $B = 22,5^\circ$, $+0,08$ m bei 30° , 0 bei 45° und $-0,08$ m bei 60° .

Andere Form der Gleichungen (2) des § 2. In den Gleichungen (2) § 5. werden nun statt der trigonometrischen Funktionen der kleinen Größen l und c diese selbst eingeführt, zugleich wird $\sin u$ eliminiert.

Setzt man

$$\nu' = \frac{1}{6} \frac{M}{q^2} \varepsilon^2 (l \cos B)^2 \tag{4}$$

und

$$z' = \frac{M}{180 q^4} (1 + [20 + 62 \varepsilon^2] \cos^2 B - [26 + 98 \varepsilon^2] \cos^4 B), \tag{5}$$

wo $\log z'$ zwischen 30° und 60° nachstehende Werte annimmt:

B	$\log z'$
	10
30,0°	0,4744 +45.3
30,5	0,519.7
31,0	0,560.2
31,5	0,597.0
32,0	0,630.2
32,5	0,660.7
33,0	0,688.8
33,5	0,714.7
34,0	0,738.7
34,5	0,761.0
35,0	0,781.7
35,5	0,801.1
36,0	0,819.3
36,5	0,836.2
37,0	0,852.2
37,5	0,867.1 +14.9

B	$\log z'$
	-10
37,5°	0,867.1 +14.0
38,0	0,881.1
38,5	0,894.2
39,0	0,906.6
39,5	0,918.2
40,0	0,929.1
40,5	0,939.3
41,0	0,948.8
41,5	0,957.8
42,0	0,966.1
42,5	0,973.9
43,0	0,981.2
43,5	0,988.0
44,0	0,994.2
44,5	1,000.0
45,0	1,005.3 +5.3

B	$\log z'$
	-10
45°	1,005.3 +9.3
46	1,014.6
47	1,022.3
48	1,028.3
49	1,032.7
50	1,035.7
51	1,037.3
52	1,037.5 +0.2
53	1,036.3 -1.2
54	1,033.9
55	1,030.1
56	1,025.1
57	1,018.8
58	1,011.3
59	1,002.5
60	0,992.6 -9.9

so ergibt sich folgendes Formelsystem, bei dem l und c in Graden vorausgesetzt sind:

$$\begin{array}{l}
 l \cos B = l' \\
 \log y = \log \left(N \frac{l'}{\varrho} \right) + \frac{1}{3} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 - \frac{1}{6} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 + v' - z' l' \\
 \log c = \log (l \sin B) + \frac{1}{3} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 + 6 v' \\
 \log (x - X) = \log \left(\frac{N}{2} \frac{l'}{\varrho^2} \sin B \right) + \frac{1}{2} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 - \frac{1}{12} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 + \frac{9}{2} v' \\
 \log \frac{m}{m_0} = + \frac{1}{2} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 + 3 v' \\
 \bar{y} = m_c y \quad \bar{x} = m_c x.
 \end{array} \quad (6)$$

Die genaueren Werte für das letzte Glied in den Gleichungen für $\log c$ und $\log (x - X)$ sind $v'_2 = (6 + 4 \varepsilon^2) v'$ und $\frac{1}{2}(3 v' + v'_2)$. Wie vorher auf S. 9 angegeben ist, darf man hierin $4 \varepsilon^2$ und $2 \varepsilon^2$ innerhalb eines Streifens mit $l = \pm 3''$ vernachlässigen.

Für $\log (x - X)$ hat man auch noch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \log (x - X) &= \log \left(\frac{N}{2} \frac{l' c}{\varrho^2} \right) + \frac{1}{6} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 - \frac{1}{12} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 - \frac{3}{2} v' \\
 &= \log \left(\frac{N}{2} \frac{c}{\varrho} \right) - \frac{1}{6} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 + \frac{1}{12} \frac{M}{\varrho^2} l'^2 - \frac{5}{2} v',
 \end{aligned} \quad (6^*)$$

woraus noch weiter folgt:

$$\log (x - X) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{4 \varrho^3} N y l' c^2 \right) - 2 v'. \quad (6^{**})$$

Der Fehler in $\log y$ bei (6) ist nur von der 6. Ordnung, gleich:

$$+ \frac{1}{2835} M \left(\frac{l'}{\varrho} \right)^6 \left(-1 + 42 \cos^2 B - 273 \cos^4 B + 251 \cos^6 B \right) + c'^2 G_6 + G_5;$$

er ist für y bei $l = 3''$ noch ganz belanglos, da er im Maximum noch nicht 0,000 05 m erreicht.

In $\log (x - X)$, Gl. (6), ist weggelassen:

$$+ \frac{1}{1440} M \left(\frac{l'}{\varrho} \right)^4 \left(-1 - 180 \cos^2 B + 300 \cos^4 B \right) + G_6.$$

Dadurch kann für $x - X$ im Intervall von $B = 30^\circ$ an nach Norden, erst ein Fehler entstehen, der kleiner als $\pm 0,0005$ m bleibt, so lange $l < 2,87''$ ist. Für $l = 2,87''$ wird er bei $B = 30^\circ$ gleich $\pm 0,0005$, bei 45° gleich $-0,0003$ und bei 60° gleich $-0,0004$ m. Im Intervall von $B = 30^\circ$ an nach Süden ist der Fehler kleiner als $\pm 0,0005$ m, so lange $l < 2,63''$ ist.

Noch etwas weiter reichen die beiden Formeln für $\log (x - X)$ in (6*). Bei der ersten kann durch die Vernachlässigung der Glieder 4. Ordnung ein Fehler hervorgerufen werden, der für $l = 3,045''$ bei $B = 30^\circ$ gleich $-0,0003$, bei 45° gleich $-0,0005$, bei $47,5''$ gleich $-0,0005$ und bei 60° gleich $-0,00035$ m wird. Bei der zweiten ist für

$l = 3,083^\circ$ der Fehler bei $B = 30^\circ$ gleich $-0,00003$, bei 45° gleich $+0,0004$, bei 52° gleich $+0,0005$ und bei 60° gleich $+0,0004$ m.

Die in $\log c$ fortgelassenen Glieder sind:

$$+ \frac{1}{90} M \left(\frac{l}{\rho} \right)^4 \cos^2 B (7 - 13 \sin^2 B + \epsilon^2 [60 - 20 \epsilon^2 - (150 + 40 \epsilon^2) \sin^2 B])$$

$$+ \frac{1}{2835} M \left(\frac{l}{\rho} \right)^6 \cos^2 B (62 - 295 \sin^2 B + 251 \sin^4 B) + G/8.$$

Die Glieder 6. Ordnung kommen hier nicht in Betracht. Die Glieder 4. Ordnung bringen in c für $l = 2,5^\circ$ einen Fehler hervor, der bei $B = 21,7^\circ$ gleich $+0,0017$, bei 30° gleich $+0,0014$, bei 45° gleich $+0,0002$, bei 60° gleich $-0,0006$ und bei $62,5^\circ$ gleich $-0,0006$ ist und dann kleiner wird.

Soll $\frac{m}{m_0}$ so genau wie bei (3) erhalten werden, so ist der rechten Seite für $\log \frac{m}{m_0}$ in (6) noch

$$- \frac{1}{12} M \left(\frac{l}{\rho} \right)^4 \cos^2 B (2 - 3 \cos^2 B).$$

hinzuzufügen. Die Vernachlässigung dieses Ausdrucks erzeugt in $\log \frac{m}{m_0}$ einen Fehler, der für $l = 2,5^\circ$, bei $B = 30^\circ$ gleich $+2,5$, bei 45° gleich $-3,3$, bei $54,67^\circ$ gleich $-4,4$ und bei 60° gleich $-4,1$ Einheiten der 8. Dezimalstelle beträgt. Für $l = 1,5^\circ$ wird dieser Fehler bei $B = 30^\circ$ gleich $+3,2$, bei 45° gleich $-4,3$, bei $54,67^\circ$ gleich $-5,7$ und bei 60° gleich $-5,3$ Einheiten der 9. Dezimalstelle.

Die Formeln (6) mit (6*) reichen also für y über $l = \pm 3^\circ$ hinaus, für $x - X$ bis nahezu $l = \pm 3^\circ$, für c bis $l = \pm 2,5^\circ$. Weniger genau als vorher in (3) ist die Gleichung für $\log \frac{m}{m_0}$.

Einfluß der kleinen Glieder in den Gleichungen (6). In den Formeln (6)

§ 6.

kann man auch ν statt ν' nehmen, y bleibt damit so lange ungeändert, als man ϵ^2 in ν' vernachlässigen darf. Das ist aber in dem Intervall nördlich von $B = 30^\circ$ immer der Fall, bis $l = 3^\circ$ wird, da der Fehler, der durch Vernachlässigung von ϵ^2 in ν' entsteht, bis dahin höchstens gleich $0,0005$ m werden kann. Am Äquator ist diese Grenze bei $l = 2^\circ$. Für $l > 3^\circ$ ist in dem angegebenen Intervall (am Äquator für $l > 2^\circ$), wenn ν an Stelle von ν' genommen wird, an Stelle von ν' zu setzen:

$$z = \frac{M}{180 \rho^4} (1 + [20 + 72 \epsilon^2] \cos^2 B - [26 + 98 \epsilon^2] \cos^4 B).$$

Bei der Berechnung von $\log(x - X)$ und von $\log c$ und $\log \frac{m}{m_0}$ ist es von $B = 30^\circ$ an nordwärts und für $l = \pm 3^\circ$ ebenfalls gleichgültig, ob man ν oder ν' benutzt, nur tritt bei (6), wenn ν genommen wird, zu den in $\log c$ fortgelassenen Gliedern noch das Glied

$$+ \frac{1}{9} M \epsilon^2 \left(\frac{l}{\rho} \right)^4 \cos^2 B (3 + 2 \epsilon^2)$$

hinzu.

Wenn man das Glied

$$- \nu' / \rho$$

in $\log y$, Gl. (6), vernachlässigt, so wird für $l = \pm 1,5^\circ$ der Wert von y fehlerhaft um $\pm 0,0022$ m bei $B = 0$, um $\pm 0,0014$ m bei $B = 13,7^\circ$, um $\mp 0,0005$ m bei $B = 30^\circ$, um $\mp 0,0013$ m bei $B = 45^\circ$, um $\mp 0,0014$ m bei $B = 46,4^\circ$ und um $\mp 0,0010$ m bei $B = 60^\circ$.

Der Einfluß von x'/N auf y bleibt in dem Intervall von $B = 13,7^\circ$ an nach Norden kleiner als $\pm 0,0005$ m, so lange $l < 1,22^\circ$ ist. Für $B = 0$ gilt dasselbe, so lange $l < 1,11^\circ$ ist. Er ist in dem obigen Intervall kleiner als $\pm 0,005$ m, so lange $l < 1,94^\circ$ ist.

Die Fehler, die durch das Weglassen von ν' in $\log y$ und von $6\nu'$ in $\log c$ bei $l = 1,5^\circ$ entstehen, sind dieselben wie in § 4 S. 11 beim Weglassen von ν und 6ν angegeben sind.

Das Fortlassen von $\frac{9}{2}\nu'$ in $\log(x - X)$, Gl. (6), gibt für $l = \pm 1,5^\circ$ einen Fehler in $(x - X)$ gleich $0,0020$ m bei $B = 24,1^\circ$, $0,0018$ m bei 30° , $0,0009$ m bei 45° und $0,0002$ m bei 60° . In den Gl. (6*) und (6**) wird der Fehler in $x - X$, der durch Vernachlässigung von $\frac{3}{2}\nu'$ bzw. $\frac{5}{2}\nu'$ bzw. $2\nu'$ in $\log(x - X)$ entsteht, gleich $\frac{1}{3}$, bzw. $\frac{5}{9}$, bzw. $\frac{4}{9}$ der vorher angegebenen Werte.

§ 7. Formeln für $l = \pm 1,5^\circ$. Es sollen nun nochmals die beiden Formelsysteme aufgestellt werden, wie sie für die Meridianstreifen bis $l = \pm 1,5^\circ$, von $B = 30^\circ$ bis $B = 60^\circ$ nötig sind, wenn die Werte von y und $x - X$ auf $0,0005$ m genau erhalten werden sollen. Diese Gleichungen reichen, wie aus dem Vorhergehenden folgt, mit derselben Genauigkeit auch noch für Werte von y , die bis um $l = \pm 3^\circ$ und darüber hinaus vom Hauptmeridian abliegen. Für $x - X$ genügen sie noch bei der nachstehenden ersten Rechnung bis $l = \pm 2,5^\circ$, bei der zweiten Rechnung bis nahezu $\pm 3^\circ$.

Wenn man in c die Genauigkeit auf $0,005$ festsetzt, sind diese Gleichungen für die erste Rechnung bis $l = \pm 2,4^\circ$, bei der zweiten Rechnung bis über $l = \pm 3^\circ$ zu benutzen. Bei $l = \pm 1,5^\circ$ ergibt sich c auf $0,0005$ genau, bei der zweiten Rechnung sogar auf $0,0002$.

1. Rechnung. (7)

$$\begin{aligned} \log \sin u &= \log(\sin l \cos B) + \nu && [9,1606631 - 10] (\sin l \cos B)^2 = \tau_1 \\ &&& \frac{M:3}{c'^2:2} \\ \log y &= \log(N \sin u) + \tau_1 + \tau_2 && [7,52629 - 10] \cos^2 B \cdot \tau_1 = \nu \\ &&& \frac{13M:90}{8,7975 - 10} \\ \log c &= \log(q \operatorname{tg} l \sin B) - \tau_1 + 6\nu && [9,160663 - 10] (\operatorname{tg} l \sin B)^2 = \tau_1 \\ &&& \frac{M:3}{c'^2:2} \\ \log(x - X) &= \log\left(\frac{N}{2} \sin u \operatorname{tg} l \sin B\right) + \frac{3}{4}(\tau_1 - \tau_2) + \frac{7}{2}\nu \\ &= \log\left(\frac{Nc}{2q} \sin u\right) + \frac{3}{4}\tau_1 + \frac{1}{4}\tau_2 - \frac{5}{2}\nu \\ &= \log\frac{yc}{2q} - \frac{1}{4}(\tau_1 - \tau_2) - \frac{5}{2}\nu \\ \log \frac{m}{m_c} &= \frac{3}{2}\tau_1 + 3\nu; \end{aligned}$$

$\bar{y} = m_c y$, $\bar{x} = m_c x$; X = Meridianbogen vom Anfangspunkte bis zur Breite B .

Ist l kleiner als 1° , so kann man, von $B = 36,5^\circ$ an nach Norden, τ_2 in $\log y$ und ferner $\frac{7}{2} \nu$ bzw. $\frac{5}{2} \nu$ in $\log(x - X)$ fortlassen.

Dasselbe kann für $l = 1,5^\circ$ geschehen, wenn für y und $x - X$ eine Genauigkeit von 0,005 m und für c eine solche von 0,02 bis 0,004 von $B = 30^\circ$ bis 60° genügt.

2. Rechnung.

$l \cos B = l'$; l in Graden vorausgesetzt.

$$\begin{aligned}
 \log y &= \log \left(N \frac{l'}{\varrho} \right) & + \tau_1 & - \sigma' + \nu' - x' l' \\
 \log c &= \log (l \sin B) & + \tau_1 & + 6 \nu' \\
 \log(x - X) &= \log \left(N \frac{l' \sin B}{2 \varrho^2} \right) & + \frac{3}{2} \tau_1 - \frac{1}{2} \sigma' + \frac{9}{2} \nu' \\
 &= \log \left(N \frac{l' c}{2 \varrho^2} \right) & + \frac{1}{2} \tau_1 - \frac{1}{2} \sigma' - \frac{3}{2} \nu' \\
 &= \log \frac{y c}{2 \varrho} & - \frac{1}{2} \tau_1 + \frac{1}{2} \sigma' - \frac{5}{2} \nu' \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(N y \frac{l' c^2}{4 \varrho^3} \right) & & - 2 \nu' \\
 \log \frac{m}{m_0} &= & + \frac{3}{2} \tau_1 & + 3 \nu' ; \\
 \left[\frac{M: 3 \varrho^2}{5,644\ 4178 - 10} \right] l'^2 = \tau_1, & & \left[\frac{c'^2: 2}{7,52\ 629 - 10} \right] \cos^2 B \cdot \tau_1 = \nu', \\
 & & \left[\frac{M: 6 \varrho^2}{5,343\ 3878 - 10} \right] l'^2 = \sigma'
 \end{aligned} \tag{8}$$

$\log x'$ wird dem Täfelchen auf S. 11 entnommen.

$\bar{y} = m_0 y$, $\bar{x} = m_0 x$; $X =$ Meridianbogen vom Anfangspunkte bis zur Breite B .

$x' l'$ in $\log y$ kann für $B > 13,7^\circ$ vernachlässigt werden, wenn l kleiner als $1,22^\circ$ ist; der Fehler in y bleibt dann unterhalb 0,0005 m. Genügt für y eine Genauigkeit von 0,005 m, so kann $x' l'$ unberücksichtigt bleiben, so lange l kleiner als $1,94^\circ$ ist.

§ 8. Beispiele.*)

I. Gegeben: $B = 47^\circ$ $l = 2^\circ 5'$.

Der Anfangspunkt der Abszissen ist auf dem Äquator angenommen.

1. Rechnung
nach den Gl. (3).

$\sin l \dots 8,639\ 6795\ 616$	$M: 3 \dots 9,160\ 6631$
$\cos B \dots 9,833\ 7833\ 303$	$\sin^2 n \dots 6,946\ 9262$
$\frac{1}{2} p = \dots 2\ 002$	$r_1 \dots 6,107\ 5893$
$\sin n \dots 8,473\ 4630\ 921$	$n^2: 2 \dots 7,526\ 29$
$N \dots 6,805\ 4200\ 613$	$\cos^2 B \dots 9,667\ 57$
$+ r_1 \dots 1281\ 119$	$r \dots 3,301\ 45$
$+ r_2 \dots 491$	
$y \dots 5,279\ 0113\ 144$	$13 M: 90 \dots 8,7975$
$y = \dots 190\ 112,7808\ \text{m}$	$\sin^4 n \dots 3,8939$
$\text{tg } l \dots 8,640\ 0931\ 1$	$r_2 \dots 2,6914$
$\sin B \dots 9,864\ 1274\ 6$	$M: 3 \dots 9,160\ 663$
$0,5 \dots 9,698\ 9700\ 0$	$\text{tg} / \sin B)^2 \dots 7,008\ 441$
$N \sin n \dots 5,278\ 8831\ 5$	$l_1 \dots 6,169\ 104$
$+ \frac{3}{4} r_1 = \dots 960\ 8$	$13 M: 90 \dots 8,80$
$- \frac{3}{4} l_1 = \dots \times 8892\ 9$	$(\text{tg } l / \sin B)^4 \dots 4,02$
$+ \frac{1}{2} p = \dots 7\ 0$	$l_2 \dots 2,82$
$x - X \dots 3,482\ 0597\ 9$	
$x - X = + 3\ 034,3089$	
$X \dots 5\ 206\ 717,123$	
$x = 5\ 209\ 751,432\ \text{m}$	
$q \dots 1,758\ 1226\ 3$	
$\text{tg } l / \sin B \dots 8,504\ 2205\ 7$	
$- l_1 = \dots \times 8523\ 9$	
$+ l_2 = \dots 7$	
$+ 6 p = \dots 12\ 0$	
$c \dots 0,262\ 1968\ 6$	
$c = 1^\circ 8289'' 291$	
$1,5 r_1 = 0,000\ 192\ 168$	
$+ 1,73 r_2 = \dots 84$	
$+ 3 p = \dots 601$	
$m: m_0 \dots 0,000\ 192\ 853$	

Benutzt man zur Berechnung von $x - X$, Gl. (3), die beiden Formeln, die die Kenntnis von c voraussetzen, so erhält man:

$1: 2 q \dots 7,940\ 8473\ 7$
$N \sin n \dots 5,278\ 8831\ 5$
$c \dots 0,262\ 1968\ 6$
$\frac{3}{4} r_1 + \frac{1}{4} l_1 = \dots 1329\ 8$
$- \frac{3}{4} l_1 = \dots \times 5\ 0$
$x - X \dots 3,482\ 0598\ 6$
$x - X = 3\ 034,309\ 4\ \text{m}$
$1: 2 q \dots 7,940\ 8473\ 7$
$N \sin n \dots 5,541\ 2081\ 7$
$(l_1 - r_1) = \dots 48\ 7$
$- \frac{3}{4} p = \dots \times 5\ 0$
$x - X \dots 3,482\ 0599\ 1$
$x - X = 3\ 034,309\ 7\ \text{m}$

Mit $m_0 = 1 - 0,0001$ wird $\bar{x} = 5\ 209\ 230,457\ \text{m}$, $\bar{y} = 190\ 093,770\ \text{m}$.

*) Da zur Zeit der Berechnung der Beispiele die neuen von der Landesaufnahme gedruckten Logarithmentafeln der trig. Funktionen für zentesimale Teilung des Grades noch nicht zur Verfügung standen, mußten solche mit alter Teilung benutzt werden. Die Längen der Meridianbogen in den Beispielen sind entnommen aus: F. G. GAUSS, die trig. und polygon. Rechnungen in der Feldmeßkunst, da auch die neuen Tafeln der Landesaufnahme für die Meridianbogen noch nicht vorlagen.

2. Rechnung

nach den Gl. (6).

$I: \varrho \dots 8,241\ 8773\ 676$	$M: 3 \varrho^2 \dots 5,644\ 4178$
$X \dots 6,805\ 4200\ 613$	$I'^2 \dots 0,463\ 4467$
$I \dots 0,397\ 9400\ 087$	$r_1 \dots 6,107\ 8645$
$\cos B \dots 9,833\ 7833\ 303$	$e'^2: 2 \dots 7,526\ 29$
$\frac{1}{2} r_1' = 1281\ 931$	$\cos^2 B \dots 9,667\ 57$
$\frac{1}{2} \sigma' = \times 8621\ 941$	$r' \dots 3,301\ 72$
$\frac{1}{2} \alpha' = 2\ 003$	$M: 6 \varrho^2 \dots 5,343\ 3878$
$\frac{1}{2} z' I^4 = \times 589$	$I^2 \dots 0,795\ 8800$
$y \dots 5,279\ 0113\ 143$	$\sigma' \dots 6,139\ 2678$
$y \dots 190\ 112,7807\ m$	$z' \dots 1,022,3$
$I: 2 \varrho^2 \dots 6,182\ 7247\ 4$	$I^4 \dots 1,591,8$
$X \dots 6,805\ 4200\ 613$	$z' I^4 \dots 2,614,1$
$I \cos B = I' \dots 0,231\ 7233\ 4$	
$I \dots 0,397\ 9400\ 1$	
$\sin B \dots 9,864\ 1274\ 6$	
$\frac{1}{2} r_1' - \frac{1}{2} \sigma' = 1233\ 9$	
$\frac{1}{2} r_1' = 90$	
$x - X \dots 3,482\ 0599\ 0$	
$x - X = \frac{1}{2} 3\ 034,3096$	
$X = 5\ 206\ 717,123$	
$x = 5\ 209\ 751,433\ m$	
$I \sin B \dots 0,262\ 0674\ 7$	
$\frac{1}{2} r_1' = 1281\ 9$	
$\frac{1}{2} \sigma' = 12\ 0$	
$c \dots 0,262\ 1968\ 6$	
$c \dots 1^\circ 8289,291$	
$\frac{1}{2} r_1' = 0,000\ 192\ 29$	
$\frac{1}{2} \sigma' = 60$	
$m: m_0 \dots 0,000\ 1928\ 89$	

Werden zur Berechnung von $x - X$ die Formeln (6*) benutzt, so ergibt sich:

$I: 2 \varrho^2 \dots 6,182\ 7247\ 4$	
$X \cos B \dots 7,037\ 1434\ 0$	
$c \dots 0,262\ 1968\ 6$	
$\frac{1}{2} (r_1' - \sigma') = \times 51\ 9$	
$-\frac{3}{2} r' \dots \times 7\ 0$	
$x - X \dots 3,482\ 0598\ 9$	
$x - X = 3034,3096\ m$	
$I: 2 \varrho \dots 7,940\ 847\ 37$	
$Ic \dots 5,541\ 208\ 17$	
$-\frac{1}{2} (r_1' - \sigma') = 4\ 81$	
$-\frac{3}{2} r' = \times 50$	
$x - X \dots 3,482\ 0598\ 5$	
$x - X = 3034,3093\ m$	

Die Gl. (6**) liefert für $x - X$ das Mittel der Ergebnisse dieser beiden Rechnungen.

Nach den genaueren Formeln (2) mit (2*) und (2**) ergibt sich:

$y \dots 5,279\ 0113\ 139$	$y = 190\ 112,7806\ m$
$x - X \dots 3,482\ 0598\ 80$	$x - X = 3034,3095\ m$
$c \dots 4,262\ 1968\ 71$	$c = 1^\circ 8289,2910$
$m: m_0 \dots 0,000\ 1928\ 534$	

II. Gegeben: $B = 52^\circ 5$ $I = 1^\circ 5$.
Der Anfangspunkt der Abszissen ist bei $B_0 = 52^\circ$ angenommen.

2. Rechnung

nach den Gl. (8).

$1: \varrho'' \dots 8,241\,8773\,68$	$5,644\,418$
$N \dots 6,805\,5576\,02$	$I'' \dots 9,921\,077$
$I \dots 0,176\,0912\,59$	$r_1 \dots 5,565\,495$
$\cos B \dots 9,784\,4471\,28$	$7,526\,3$
$\therefore r_1 = 367\,70$	$\cos^2 B \dots 9,568\,9$
$\therefore r' = \times 503\,90$	$r'' \dots 2,660\,7$
$+ r'' = 46$	$r' \dots 5,343\,388$
$\therefore r'^2 = \times 4$	$I' \dots 0,352\,183$
$r \dots 5,007\,9605\,57$	$r'' \dots 5,695\,571$
$y = +101\,849,888\,m$	$r' \dots 1,038$
	$I^2 \dots 0,704$
	$\therefore I^2 = 1,742$
$1: 2 \varrho^2 \dots 6,182\,7247\,4$	
$N \dots 6,805\,5576\,0$	
$I \dots 9,960\,5383\,9$	
$I' \dots 0,176\,0912\,6$	
$\sin B \dots 9,899\,4666\,5$	
$+ \frac{3}{2} r_1 = 551\,6$	
$\therefore r' = \times 751\,9$	
$+ r'' = 2\,1$	
$x - X \dots 3,024\,4092\,0$	
$x - X = +1\,057,814$	
$X - X_0 = +55\,629,667$	
$x = +56\,687,481\,m$	
$I \sin B \dots 0,075\,5579\,1$	
$+ r_1 = 367\,7$	
$+ 6 r'' = 2\,8$	
$e \dots 0,075\,5949\,4$	
$e = 1^\circ 19' 01'' 315$	
$+ \frac{3}{2} r_1 = 0,000\,055\,14$	
$+ 3 r'' = 14$	
$m: m_0 \dots 0,000\,055\,28$	

1. Rechnung

nach den Gl. (7).

$\sin I \dots 8,417\,9190\,15$	$(\sin I \cos B)^2 \dots 6,404\,732$
$\cos B \dots 9,784\,4471\,28$	$r_1 \dots 5,565\,395$
$\therefore r = 46$	$7,526\,3$
$\sin u \dots 8,202\,3661\,89$	$\cos^2 B_1 \dots 9,568\,9$
$N \dots 6,805\,5576\,02$	$r \dots 2,660\,6$
$+ r_1 = 367\,62$	
$+ r_2 = 4$	
$r \dots 5,007\,9605\,57$	$8,797$
$y = +101\,849,888\,m$	$(\sin I \cos B)^4 \dots 2,809$
	$r_2 \dots 1,606$
$\lg I \dots 8,418\,0678\,6$	
$\sin B \dots 9,899\,4666\,5$	$9,160\,66$
$0,5 \dots 9,698\,9700\,0$	$(\lg I \sin B)^2 \dots 6,635\,07$
$N \sin u \dots 5,007\,9237\,9$	$I_1 \dots 5,795\,73$
$+ \frac{3}{2} r_1 = 275\,7$	
$+ \frac{3}{2} I_1 = \times 531\,4$	
$+ \frac{3}{2} r = 16$	
$x - X \dots 3,024\,4091\,7$	
$x - X = +1\,057,814$	
$X - X_0 = +55\,629,667$	
$x = +56\,687,481\,m$	
$\varrho \dots 1,758\,1226\,3$	
$\lg I \sin B \dots 8,317\,5345\,1$	
$\therefore I_1 = \times 375\,2$	
$+ 6 r = 2\,8$	
$e \dots 0,075\,5949\,4$	
$e = 1^\circ 19' 01'' 315$	
$+ \frac{3}{2} r_1 = 0,000\,055\,14$	
$+ 3 r'' = 14$	
$m: m_0 \dots 0,000\,055\,28$	

Ist $m_0 = 1 - 0,000\,1$, so wird $x = 56\,681,812\,m$, $\bar{y} = 101\,839,703\,m$.

Wird c vor $x - X$ berechnet, so kann man auch die anderen unter (7) und (8) angegebenen Gleichungen für $\log(x - X)$ benutzen, z. B. ist

bei der 1. Rechnung	bei der 2. Rechnung
$1 : 2 \varrho \dots 7,940\ 8473\ 7$	$1 : 4 \varrho^3 \dots 4,123\ 572\ 11$
$\cdot c \dots 5,083\ 5555\ 0$	$\cdot N / \cos B \dots 6,766\ 095\ 99$
$+ \frac{1}{4} (r_1 - r_2) = \dots 64\ 3$	$\cdot p \dots 5,007\ 960\ 56$
$- \frac{1}{2} r = \dots \times 8\ 8$	$\dots 5,897\ 628\ 66$
$x - X \dots 3,024\ 4091\ 8$	$\dots 2,948\ 814\ 33$
	$c \dots 0,075\ 594\ 96$
	$- 2 p' = \dots \times 1$
	$x - X \dots 3,024\ 409\ 20$

Berechnung der geographischen Breite und Länge, der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.

Gegeben sind: die ebenen rechtwinkligen Koordinaten $\bar{x} = m_x, x, \bar{y} = m_y, y$.

Gesucht werden: die geographische Breite B , die Länge l gezählt vom Hauptmeridian, die Konvergenz des Meridians c und das Vergrößerungsverhältnis m .

Formeln, die für l bis über $\pm 3^\circ$ hinausreichen. Zu dem Endpunkte der Abszisse x gehöre die Breite B' . § 9.

Es wird gesetzt:

$$e'^2 \cos^2 B' = e'^2, \quad 1 + e'^2 = Q' = \frac{N'}{R'}, \quad N' = \frac{a \sqrt{1 + e'^2}}{Q'}; \quad \varrho'' \dots 5,758\ 1226\ 324; \tag{9}$$

$$\frac{\varrho''}{N'} y = \eta \tag{10}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{6} \frac{M}{\varrho''^2} e'^2 \eta^2, \quad \mu_2 = (2 + 4 e'^2) \mu_1, \quad \mu_3 = (-2,5 - 2 e'^2 + 4,5 \operatorname{tg}^2 B') \mu_1, \tag{11}$$

$$\mu'_2 = \mu_1 + \mu_2, \quad \mu'_3 = \mu_2 + \mu_3;$$

ferner:

$$\tau = \frac{1}{3} \frac{M}{\varrho''^2} \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^2 - \frac{1}{90} \frac{M}{\varrho''^4} \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^4 (13 - 10 [1 - e'^2] \cos^2 B') \tag{12}$$

$$= 7,644\ 4177 - 20 \cdot \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^2 - f \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^4$$

oder

$$\tau = \frac{1}{3} \frac{M}{\varrho''^2} l^2 + \frac{7}{90} \frac{M}{\varrho''^4} l^4 \quad (l \text{ in Sekunden}).$$

In den Gleichungen für $\log(B' - B)$ kann man, da $Q = \left(\frac{N_{90}}{N'}\right)^2$ ist, auch setzen:

$$\log \frac{Q}{2q''} = 7,553\,042\,66 - 2 \log N'. \quad (13^*)$$

Die in $\log l$, Gl. (13), fortgelassenen Glieder lauten, je nachdem man l mit dem ersten oder zweiten Ausdruck in Gl. (12) berechnet:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{90} \frac{M e'^2}{q''^4} (9 - \cos^2 B') l^4 \\ & - \frac{1}{2835} \frac{M}{q''^6} \left(\frac{l}{\cos B'}\right)^6 (251 - 273 \cos^2 B' + 42 \cos^4 B' - \cos^6 B') + Gl_8 \end{aligned}$$

oder

$$- \frac{1}{90} \frac{M e'^2}{q''^4} (9 - \cos^2 B') l^4 - \frac{1}{2835} \frac{M}{q''^6} \left(\frac{l}{\cos B'}\right)^6 (62 - \cos^6 B') + Gl_8.$$

Der Einfluß dieser Glieder wird für

$l = 3^\circ$ und bei $B' = 0^\circ$	30 ^o	45 ^o	60 ^o	}	Einh. der 4. Dezimalst. der Sekunde.	
im ersten Falle:	2,0	1,3	0,8			0,5
« zweiten «	2,1	1,3	0,6			0,3

In $\log(B' - B)$, Gl. (13), ist vernachlässigt:

$$+ \frac{1}{1440} \frac{M}{q''^4} \left(\frac{l}{\cos B'}\right)^4 (-21 + 60 \cos^2 B' + 44 \cos^4 B') + Gl_6;$$

dadurch wird für $l = 3^\circ$ im Maximum erst ein Fehler von 0,00009 in $B' - B$ entstehen können.

Die in der ersten Gleichung für $\log c$, Gl. (13), folgenden Glieder:

$$+ \frac{1}{15} \frac{M e'^2}{q''^4} l^4 \sin^2 B' - \frac{2}{945} \frac{M}{q''^6} \frac{l^6}{\cos^3 B'} (11 - 4 \cos^2 B') + Gl_8$$

bringen in c noch keinen Fehler, der für $l = 3^\circ$ die 4. Dezimalstelle der Sekunde beeinflußt.

Das nächste Glied in $\log \frac{m}{m_0}$:

$$+ \frac{63}{2835} \frac{M}{q''^6} l^6 + Gl_8$$

kann für $l = 3^\circ$ noch nicht 2 Einheiten der 10. Dezimalstelle ausmachen.

Formeln für $l = 1, 2^\circ$. Die Vernachlässigung des Gliedes $\frac{M}{180 q''^4} l^4$ in $\log l$, § 10.

Gl. (13), ruft in l einen Fehler hervor, der für $l = 3^\circ$ im Maximum, bei $B' = 0$, gleich 0,0018 werden kann. Für $l = 2^\circ$ beträgt der Fehler bei $B' = 0^\circ$: 0,00024, bei 30° : 0,00013, bei 45° : 0,00005 und bei 60° : 0,00001. Für $l = 1,5^\circ$ ist sein größter Wert: 0,00006.

Der Einfluß des Gliedes $\frac{2}{45} \frac{M}{\varrho''^4} \frac{\eta^4}{\cos^2 B'}$ in $\log c$ auf c selbst

ist kleiner als 0,0015, wenn $l > 2,48^\circ$,
 « « « 0,0010, « $l > 2,29^\circ$,
 « « « 0,0005, « $l > 1,99^\circ$.

Das Glied $\frac{1}{12} \frac{M}{\varrho''^4} \eta^4$ in $\log \frac{m}{m_0}$

gibt bei $B' = 30^\circ$ 45° 60°
 für $l = 2^\circ$: 3,0 1,3 0,3 Einh. d. 8. Dezimalstelle.
 « $l = 1,5^\circ$: 0,9 0,4 0,1 « « «

Die zuletzt angegebenen Glieder in den Gl. (13) können mithin in dem Meridianstreifen $l = \pm 2^\circ$ bei der Berechnung fortgelassen werden.

Innerhalb des Meridianstreifens

$$l = \pm 2^\circ$$

kann man demnach die folgenden Gleichungen benutzen:

$$y = \frac{\bar{y}}{m_0}, \quad \eta = \frac{\varrho''}{\lambda''} y, \quad x = \frac{\bar{x}}{m_0}, \quad \text{zu } x \text{ gehört } B'.$$

$$\left. \begin{aligned} \log_{\text{Sek.}} l &= \log \frac{\eta}{\cos B'} + \sigma - \tau - \mu \\ \log_{\text{Sek.}} c &= \log (l \sin B') - \sigma \cdot \quad + 3 \mu \\ &= \log (\eta \operatorname{tg} B') \quad \cdot \quad - \tau \quad + 2 \mu \\ \log_{\text{Sek.}} (B' - B) &= 7,553\,0427 + \log \frac{\eta c}{\lambda''^2} - \sigma + \frac{1}{4} \tau + \mu_3 \\ &= 7,553\,0427 + \log \left(\frac{\eta^2}{\lambda''^2} \operatorname{tg} B' \right) - \sigma - \frac{3}{4} \tau + \mu'_3 \\ \log \frac{m}{m_0} &= \quad \cdot \quad + 3 \sigma \quad \cdot \quad + 3 \mu \end{aligned} \right\} (14)$$

Dabei ist:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= [7,343\,388 - 20] \eta^2 & \mu_3 &= -2,5 \mu + 4,5 \mu \operatorname{tg}^2 B' \\ \mu &= [7,8273 - 10] \sigma \cos^2 B' & \mu'_3 &= -0,5 \mu + 4,5 \mu \operatorname{tg}^2 B' \\ \tau &= [7,644\,4177 - 20] l^2 + [5,4961 - 30] l^4 \\ \text{oder} \\ \tau &= [7,644\,4177 - 20] \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^2 - f \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^4; \end{aligned} \right\} (14^*)$$

$\log l = [4,6511 - 30] (13 - 10 \cos^2 B')$ kann dem Täfelchen auf S. 20 entnommen werden.

Auf der Grenze des Meridianstreifens

$$l = \pm 1,5^\circ$$

kann das Glied μ_3 in der ersten Gleichung für $\log(B' - B)$ den Wert von $B' - B$ nur um einen Betrag beeinflussen, der zwischen $-0,00007$ bei $B' = 17,7^\circ$ und $+0,00005$ bei $B' = 53,5^\circ$ liegt; bei $B' = 30^\circ$ ist sein Betrag gleich $-0,00004$, bei 45° gleich $+0,00004$ und bei 60° gleich $+0,00004$.

Das Glied μ'_3 in der zweiten Gleichung für $\log(B' - B)$ liefert Beiträge zu $B' - B$, die für $l = \pm 1,5^\circ$ zwischen $-0,00001$ bei $B' = 10,2^\circ$ und $+0,00008$ bei $B' = 47^\circ$ liegen; sein Einfluß ist bei $B' = 30^\circ$ gleich $+0,00004$, bei 45° gleich $+0,00008$ und bei 60° gleich $+0,00005$.

Innerhalb des Meridianstreifens $l = \pm 1,5^\circ$ wird daher das Glied μ_3 immer und meistens auch das Glied μ'_3 unberücksichtigt bleiben können.

Wenn man μ in $\log l$ vernachlässigt, so begeht man damit einen Fehler, der für $l = 1,5^\circ$ bei $B' = 30^\circ$ gleich $0,006$, bei 45° gleich $0,003$ und bei 60° gleich $0,001$ ist. Für $l = 0,84^\circ$ und $B' = 45^\circ$ wird der Fehler gleich $0,0001$, für $l = 1,05^\circ$ und $B' = 45^\circ$ gleich $0,001$.

Die Vernachlässigung von 3μ in der ersten Gleichung für $\log c$ bringt in c für $l = 1,5^\circ$ einen Fehler, der bei $B' = 26,5^\circ$ gleich $0,0099$, bei 30° gleich $0,0097$, bei 45° gleich $0,0061$ und bei 60° gleich $0,0018$ ist. Bei der zweiten Gleichung für $\log c$ entsteht durch das Fortlassen von 2μ ein Fehler, der gleich $\frac{2}{3}$ dieser Werte ist.

Wird

$$r = \frac{M}{3\varrho''} \left(\frac{1}{\cos B'} \right)^2$$

gesetzt, so wird der Fehler in l auf dem Grenzmeridian $l = 1,5^\circ$ bei $B' = 30^\circ$ gleich $0,0004$, bei 45° gleich $0,0006$ und bei 60° gleich $0,0008$. Für $l = 1^\circ$ und $B' = 60^\circ$ wird der Fehler gleich $0,0001$.

Beispiele. I. Gegeben ist $\bar{x} = 5209\,230,457$ m, der Anfangspunkt § 11. ist im Äquator, und

$$\bar{y} = +190\,093,770 \text{ m.}$$

Mit $1 : m_0 = 1 + 0,0001 + 0,0000\,0001$ folgt:

$$x = 5209\,751,432 \text{ m}$$

$$y = +190\,112,781 \text{ m.}$$

Vgl. hierzu das Beispiel auf S. 16/17.

Zum Endpunkte von x gehört die Breite $B' = 47^\circ 0272' 9711$. Die Rechnung erfolgt nach (13), jedoch ist $\mu_2 = 2 \mu_1$ und $\mu'_2 = 3 \mu_1$ gesetzt.

$ \begin{aligned} & q'' \dots 5,758\ 1226\ 32 \\ 1: N' \dots & 3,194\ 5792\ 47 \\ & \dots 5,279\ 0113\ 14 \\ & \eta \dots 4,231\ 7131\ 93 \\ 1: \cos B' \dots & 0,166\ 4386\ 58 \\ & \frac{1}{4} \sigma = 640\ 93 \\ & - \tau = \times 7242\ 66 \\ & - \mu_1 = \times 8\ 00 \\ - M \eta^4 : 180 q''^4 = & \times 8 \\ & l \dots 4,397\ 9400\ 08 \\ \sin B' \dots & 9,864\ 3203\ 2 \\ - \sigma = & \times 359\ 1 \\ + 3 \mu_1 = & 6\ 0 \\ + M \eta^4 (8 \sec^2 B' + 1) : 180 q''^4 = & 3 \\ & c \dots 4,262\ 1968\ 7 \\ \\ & \eta c \dots 8,493\ 9100\ 6 \\ 1: N'^2 \dots & 6,389\ 1584\ 9 \\ & 7,553\ 0426\ 6 \\ - \sigma = & \times 359\ 1 \\ + \frac{1}{4} \tau = & 689\ 3 \\ + \mu'_2 = & 5\ 4 \\ B' - B \dots & 2,436\ 1165\ 9 \\ \\ + 3 \sigma = & 0,000\ 1922\ 80 \\ + 3 \mu_1 = & 6\ 00 \\ - M \eta^4 : 12 q''^4 = & \times 72 \\ m : m_0 \dots & 0,000\ 1928\ 52 \\ \\ & l = 2^\circ 5000'' 0000 \\ & c = 1^\circ 8289'' 291 \\ \\ B' - B = & 272'' 9710 \\ B' = 47^\circ 0272', 9711 \\ B = 47^\circ 0000'' 0001 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & M : 3 q''^2 \dots 7,644\ 4177 \\ & (\eta \sec B')^2 \dots 8,796\ 3037 \\ & \dots 6,440\ 7214 \\ \\ & f \dots 5,573,6 - 30 \\ & (\eta \sec B')^4 \dots 17,592,6 \\ & \dots 3,166,2 - 10 \\ \\ & \tau = 275\ 881 \\ & \dots 147 \\ & 275\ 734 \\ \\ & M : 6 q''^2 \dots 7,343\ 388 \\ & \eta^2 \dots 8,463\ 426 \\ & \sigma \dots 5,806\ 814 \\ & \rho^2 \dots 7,827\ 3 \\ \cos^2 B' \dots & 9,667\ 1 \\ \mu_1 \dots & 3,301\ 2 \\ 4,5 \dots & 0,653\ 2 \\ \eta^2 B' \dots & 0,061\ 5 \\ & 4,015\ 9 - 10 \\ & + 104 \\ - 2,5 \mu_1 = & - 50 \\ - 0,5 \mu_1 = & - 10 \\ \\ & \mu_3 = 7 \\ & \dots 54 \\ & \mu'_3 = 7 \\ & \dots 94 \\ \\ M : 180 q''^4 \dots & 4,350 - 30 \\ \eta^4 \dots & 16,927 \\ & 1,277 - 10 \\ 8 \sec^2 B' + 1 \dots & 1,260 \\ & 2,537 - 10 \end{aligned} $	<p>Kontrollrechnung.</p> $ \begin{aligned} & M : 3 q''^2 \dots 7,644\ 4177 \\ & l^2 \dots 8,795\ 8800 \\ & \dots 6,440\ 2977 \\ \\ & 7 M : 90 q''^4 \dots 5,4961 - 30 \\ & l^4 \dots 17,5918 \\ & \dots 3,0879 - 10 \\ \\ & \tau = 275\ 612 \\ & \dots 122 \\ & 275\ 734 \\ \\ & 2 M : 45 q''^4 \dots 5,253 - 30 \\ & \eta^4 \dots 16,927 \\ \sec^2 B' \dots & 0,333 \\ & 2,513 - 10 \\ \\ & \eta \dots 4,231\ 7131\ 9 \\ \operatorname{tg} B' \dots & 0,030\ 7589\ 8 \\ - \tau = & \times 7242\ 7 \\ + 2 \mu_1 = & 4\ 0 \\ + 2 M \eta^4 : 45 q''^4 \cos^2 B' = & 3 \\ & c \dots 4,262\ 1968\ 7 \\ \\ & \eta^2 \dots 8,463\ 4263\ 9 \\ \operatorname{tg} B' \dots & 0,030\ 7589\ 8 \\ 1: N'^2 \dots & 6,389\ 1584\ 9 \\ & 7,553\ 0426\ 6 \\ - \sigma = & \times 359\ 1 \\ + \frac{1}{4} \tau = & \times 7932\ 0 \\ + \mu'_3 = & 9\ 4 \\ B' - B \dots & 2,436\ 1165\ 7 \\ B' - B = & 272'' 9710 \end{aligned} $
---	--	--

Die Glieder: $-\frac{1}{180} \frac{M}{q''^4} \eta^4$ in $\log l$ und $+\frac{1}{180} \frac{M}{q''^4} \eta^4 \cos^2 B'$ ($8 + \cos^2 B'$), bzw. $+\frac{2}{45} \frac{M}{q''^4} \eta^4 \cos^2 B'$ sind hier noch von geringer Bedeutung; hätte man sie fortgelassen, so würde l um 0,0001 größer und c um 0,001 kleiner erhalten sein. Das Glied $-\frac{M \eta^4}{12 q''^4}$ beeinflusst $\log \frac{m}{m_0}$ um 3 Einh.

II. Gegeben ist $\bar{x} = + 56\ 681,812\ \text{m}$, $\bar{y} = + 101\ 839,703\ \text{m}$;
 der Anfangspunkt ist bei $B_0 = 52^\circ$ angenommen.

Mit $m_0 = 1 - 0,0001$ wird

$$x = + 56\ 687,481\ \text{m} \quad , \quad y = + 101\ 849,888\ \text{m}.$$

Dem Endpunkte der Abszisse entspricht die Breite $B' = 52^\circ 50' 55,0723''$.

Für die Rechnung sind die Gl. (14) benutzt. Vgl. hierzu das Beispiel auf S. 18.

$q'' \dots 5,758\ 1226\ 32$	$M: 6\ q''^2 \dots 7,343\ 388$
$1: N' \dots 3,194\ 4421\ 65$	$q_1^2 \dots 7,921\ 051$
$y \dots 5,007\ 9605\ 57$	$\sigma \dots 5,264\ 439$
$q_1 \dots 3,960\ 5253\ 54$	$e'^2 \dots 7,827$
$1: \cos B' \dots 0,215\ 6468\ 04$	$\cos^2 B \dots 9,569$
$+ \sigma = 183,84$	$\mu \dots 2,660 - 10$
$- \epsilon = \times 007,64$	
$- \mu = \times 54$	
$l \dots 4,176\ 0912\ 60$	$M: 3\ q''^2 \dots 7,644\ 418$
$\sin B' \dots 9,899\ 5219\ 4$	$l^2 \dots 8,352\ 183$
$- \sigma = \times 816,2$	$5,996\ 601$
$+ 3\ \mu = 14$	$7M: 90\ q''^4 \dots 5,496 - 30$
$c \dots 4,075\ 5949\ 6$	$l^4 \dots 16,704$
	$2,200 - 10$
$q_1 c \dots 8,036\ 1203$	$\epsilon = 99\ 220$
$1: N'^2 \dots 6,388\ 8843$	$+ 16$
$7,553\ 0427$	$99\ 236$
$- \sigma = \times 816$	oder
$+ \frac{1}{4}\epsilon = 248$	$M: 3\ q''^2 \dots 7,644\ 418$
$+ \mu_3 = 2$	$(q_1 \sec B')^2 \dots 8,352\ 344$
$B' - B \dots 1,978\ 0539$	$5,996\ 762$
	$f \dots 5,620\ 30$
$+ 3\ \sigma = 0,000\ 05515$	$(q_1 \sec B')^4 \dots 16,705$
$+ 3\ \mu = 14$	$2,325\ 10$
$m: m_0 \dots 0,000\ 05529$	$\epsilon = 99\ 257$
	$- 21$
$l \dots 1^\circ 5000,0000$	$99\ 236$
	$\mu \dots 2,66$
$c = 1^\circ 1901,315$	$+ \frac{7}{35}$
$B' - B = 95,07228$	$4,5 \dots 0,65 - \frac{7}{2}\mu = - 11$
$B' = 52^\circ 50' 55,0723''$	$\lg^2 B' \dots 0,23 - \frac{1}{2}\mu = - 2$
$B_0 = 52^\circ 5000,0000$	$3,54$
	$\mu_3 = 7,4$
	$\mu'_3 = 3,3$

Kontrollrechnung.

$q_1 \dots 3,960\ 52535$
$\lg B' \dots 0,115\ 16875$
$- \epsilon = \times 0076$
$+ 2\ \mu = 9$
$c \dots 4,075\ 59495$
$q_1^2 \dots 7,921\ 0507$
$\lg B' \dots 0,115\ 1687$
$1: N'^2 \dots 6,388\ 8843$
$7,553\ 0427$
$- \sigma = \times 816$
$+ \frac{1}{4}\epsilon = \times 256$
$+ \mu'_3 = 3$
$B' - B \dots 1,978\ 0539$

Hätte man 3μ bzw. 2μ in $\log c$ vernachlässigt, so würde man c um $0,004$ bzw. $0,002$ kleiner erhalten haben, und läßt man μ_3 bzw. μ'_3 in $\log (B' - B)$ fort, so ergibt sich $B' - B$ um $0,00004$ bzw. $0,00007$ kleiner.

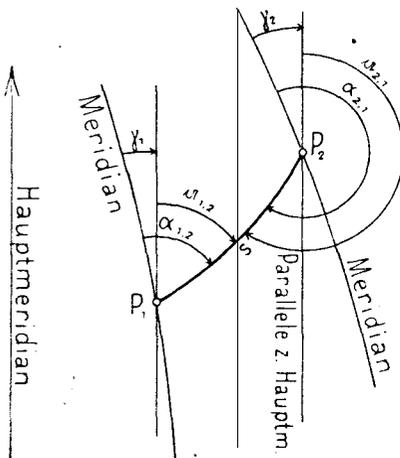
Berechnung der Differenzen der ebenen rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte aus der Länge und Richtung der geodätischen Linie und umgekehrt der letzteren aus den ebenen Koordinaten.

§ 12. Beziehung zwischen dem Azimut und dem Richtungswinkel. Wenn zwei Punkte P_1 und P_2 des Ellipsoids nicht weiter voneinander abstehen, als die Größe einer Hauptdreiecksseite beträgt, und wenn ihre mittlere Entfernung vom Hauptmeridian nicht größer als etwa 120 km ist, so kann man die nachfolgenden Formeln benutzen, erstens um aus der Länge und Richtung der geodätischen Linie, die von einem Punkte P_1 ausgeht, dessen ebene rechtwinklige Koordinaten bekannt sind, die Koordinatendifferenzen zwischen diesem und dem Endpunkte P_2 , und zweitens um aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten von P_1 und P_2 die Länge und Richtung der geodätischen Linie P_1P_2 zu berechnen. (Diese Aufgaben werden nachher mit Hilfe der Entfernungs- und der Richtungsreduktion behandelt.)

Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten von P_1 und P_2 , nachdem sie durch den Verjüngungsfaktor m_0 dividiert sind, seien $x_1 = \frac{\bar{x}_1}{m_0}$,

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1}{m_0}; \quad x_2 = \frac{\bar{x}_2}{m_0}, \quad y_2 = \frac{\bar{y}_2}{m_0}.$$

Die sphäroidischen Richtungswinkel, also die Winkel, welche die Parallelen zum Hauptmeridian in P_1 und P_2 mit der geodätischen Linie $s = P_1P_2$ bilden, sollen $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ sein. Beide werden wie die Azimute von Nord über Ost von 0° bis 360° gezählt. Versteht man unter γ



den in der Geodäsie gewöhnlich als Meridiankonvergenz bezeichneten Winkel, also unter γ_1 den Winkel, den der Meridian durch P_1 mit der Parallelen zum Hauptmeridian bildet, so ist das Azimut $\alpha_{1,2}$ der geodätischen Linie

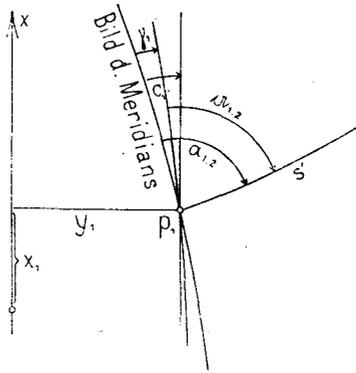
$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2} + \gamma_1$$

und ebenso (15)

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{2,1} + \gamma_2.$$

γ hat gleiches Vorzeichen mit γ .

Die bei der konformen Abbildung auftretende Konvergenz des Meridians c ist von γ etwas verschieden. c_1 ist der Winkel, den der Meridian durch P_1 mit dem Urbild der Parallelen zur x -Achse bildet, oder auch der Winkel, den in der Ebene das Bild des Meridians durch P_1 mit der Parallelen zur x -Achse bildet. c hat ebenfalls mit γ gleiches Vorzeichen.



Für $c - \gamma$ besteht die Gleichung:

$$c - \gamma = \frac{1}{3} \varrho'' e'^2 \sin 2B' \cdot \left(\frac{y}{r'}\right)^3 + e'^2 Gl_4 = \frac{2}{3} \frac{e'^2}{\varrho'^2} Q' \sin B' \cos^4 B' \cdot l^3 + e'^2 Gl_4 \quad (16)$$

Die Breite B' und der dazu gehörige mittlere Krümmungsradius $r' = \frac{a}{Q'} \sqrt{1 + e'^2}$ entsprechen dem Endpunkt der Abszisse x .

Ist nun das Azimut $\alpha_{1,2}$ einer von P_1 nach P_2 gehenden geodätischen Linie s gegeben, so berechnet man c_1 und $c_1 - \gamma_1$ und hat dann für den Richtungswinkel in P_1 :

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2} - c_1 + (c_1 - \gamma_1) \quad (17)$$

Der Richtungswinkel $\alpha_{2,1}$ der geodätischen Linie $P_2 P_1$ werde durch

$$\alpha_{2,1} = 180^\circ + \alpha_{1,2} + \Delta\alpha \quad (18)$$

ausgedrückt.

Berechnung der ebenen Koordinatendifferenzen aus der Länge und dem Richtungswinkel einer geodätischen Linie. § 13.

Zur Berechnung von $y_2 - y_1 = \Delta y$ und $x_2 - x_1 = \Delta x$ und $\Delta\alpha$ dienen folgende Formeln, wenn

$$s \cos \alpha_{1,2} = u \quad \text{und} \quad s \sin \alpha_{1,2} = v \quad (19)$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= v \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{r'_1}\right)^2 \right\} - (3y_1 + v) \frac{u^2 - v^2}{6r'^2_1} \\ \Delta x &= u \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_2}{r'_1}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{v}{r'_1}\right)^2 \right\} \\ \Delta\alpha &= -\varrho'' \frac{\Delta x \cdot y_m}{r'^2_m} \left\{ 1 - \frac{y^2_m}{3r'^2_m} \right\}; \quad y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

r'_m ist der mittlere Krümmungsradius, der zu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gehört. $\Delta\alpha$ und damit $\alpha_{2,1}$ wird zur Weiterrechnung von x_3, y_3 nach x_2, y_2 gebraucht.

Die weggelassenen Glieder 5. und 6. Ordnung sind, wenn noch zur Abkürzung $e^2 = \frac{e'^2}{12} \sin B' \cos B' \sim \frac{1}{2} e'^2 \sin 2 B'$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \text{in } \Delta y: & -v \left\{ y_1^2 \frac{u^2(26y_1 + 18v) + v^2(2y_1 + 3v)}{24r_1^4} + \frac{y_1^4}{24r_1^4} + \frac{-u^4 + 18u^2v^2 + 5v^4}{120r_1^4} \right\} \\ & - \frac{e^2 y_1(8y_1^2 - u^2)}{24r_1^4} - \frac{e^2 u}{3r_1^3} \left\{ 2y_1^2(y_1 + 3v) - u^2(2y_1 + v) + 2v^2(3y_1 + v) \right\} \\ & + r_1' Gl_7 \\ \text{in } \Delta x: & +u \left\{ y_1 \frac{4u^2(y_1 + 2v) - 8v^2(y_1 + v) - y_1^2(y_1 + 4v)}{24r_1^4} + \frac{v^2(6u^2 - 7v^2)}{60r_1^4} \right\} \quad (21) \\ & + \frac{e^2}{3r_1^3} \left\{ v y_1^2(2y_1 + 3v) - 3u^2 y_1(y_1 + 2v) + \frac{v^2}{2}(-5u^2 + v(4y_1 + v)) \right\} \\ & + r_1' Gl_7 \\ \text{in } \Delta \alpha: & - e'' \left(\frac{\Delta x}{r_m'} \right)^2 \left(\frac{y_m \Delta x}{12 r_m'^2} - e_m^2 \frac{\Delta y}{3 r_m'} \right) + e'' Gl_6. \end{aligned}$$

Benutzt man in der letzten Gl. (20) r_1' anstatt des zu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gehörigen r_m' , so wird der Fehler

$$\text{in } \Delta \alpha: - e'' \left(\frac{\Delta x}{r_1'} \right)^2 \left(\frac{y_m \Delta x}{12 r_1'^2} - e_1^2 \frac{6y_m + \Delta y}{3 r_1'} \right) + e'' Gl_6. \quad (21^{**})$$

Um eine Vorstellung von der Größe dieser Glieder zu haben, werde

$$y_1 = 120 \text{ km} \quad , \quad s = 60 \text{ km} \quad , \quad B_1' = 45^\circ$$

angenommen. Alsdann betragen die obigen Glieder

in Δx		in Δy		in Δx		in Δy	
für $\alpha = 0^\circ$	$-0,000,7 \text{ m}$	$-0,002,0 \text{ m}$	für $\alpha = 180^\circ$	$-0,000,7 \text{ m}$	$-0,000,6 \text{ m}$		
$= 45$	$-0,000,2$	$-0,003,3$	$= 225$	$-0,000,5$	$+0,000,3$		
$= 90$	$+0,001,8$	$-0,000,6$	$= 270$	$-0,000,4$	$+0,000,6$		
$= 135$	$+0,001,1$	$-0,000,3$	$= 315$	$-0,000,5$	$+0,000,1$		

§ 14. Berechnung der Länge und Richtung der geodätischen Linie aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte.

Aus x_1, y_1 und x_2, y_2 kann man, wenn

$$\alpha_{1..2} = \alpha - \frac{1}{2} \Delta \alpha \text{ und } \alpha_{2..1} = 180^\circ + \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha \quad (22)$$

gesetzt wird, $s \cos \alpha$, $s \sin \alpha$ und $\Delta \alpha$ herleiten, aus denen dann weiter s und die Azimute nach (15) folgen.

Wird

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1, & \Delta y &= y_2 - y_1, & y_m &= \frac{1}{2} (y_2 + y_1) \\ \xi &= \frac{\Delta x}{r'_m}, & \eta &= \frac{\Delta y}{r'_m}, & v &= \frac{y_m}{r'_m} \end{aligned} \quad (23)$$

gesetzt, wo $r'_m = |R'_m \Lambda'_m|$ den mittleren Krümmungsradius, der zu $\frac{1}{2} (x_2 + x_1)$ gehört, bedeutet, so ist:

$$\left. \begin{aligned} s \sin \alpha &= \Delta y \left(1 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{12} \xi^2 - \frac{1}{24} \eta^2 \right) \\ s \cos \alpha &= \Delta x \left(1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{24} \eta^2 \right) \\ \Delta \alpha &= -\varrho'' v \xi \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die hierbei vernachlässigten Glieder sind

$$\begin{aligned} \text{in } s \sin \alpha: & \Delta y \left(\frac{5}{24} v^4 + \frac{5}{48} v^2 \eta^2 - \frac{1}{1440} \xi^2 (2 \eta^2 - \eta^4) + \frac{1}{384} \eta^4 \right) \\ & + \frac{\Delta x}{3} v'^2 \sin 2 B'_m \cdot v \left(v^2 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{3}{4} \eta^2 \right) + r'_m G'_7 \\ \text{in } s \cos \alpha: & \Delta x \left(\frac{5}{24} v^4 - \frac{1}{48} v^2 (2 \xi^2 - 3 \eta^2) - \frac{1}{360} \xi^2 \eta^2 - \frac{13}{5760} \eta^4 \right) \\ & - \frac{\Delta y}{3} v'^2 \sin 2 B'_m \cdot v \left(v^2 + \frac{1}{4} \eta^2 \right) + r'_m G'_7 \\ \text{in } \Delta \alpha: & -\frac{\varrho'' \xi^2}{12} (v \xi - 2 v'^2 \sin 2 B'_m \cdot \eta) + \varrho'' G'_6. \end{aligned} \quad (25)$$

Verhältnismäßig am größten werden in den ersten beiden Ausdrücken die mit $\frac{5}{24} v^4$ und die mit v'^2 multiplizierten Glieder. Der Fehler in $\Delta \alpha$, der durch den zuletzt angegebenen Ausdruck verursacht werden kann, ist nur gering: für $y_m = 150 \text{ km}$ und $s = 75 \text{ km}$ erreicht er noch nicht $0,002$.

Für die Rechnung wird man bei (24) zu Logarithmen übergehen: also:

$$\left. \begin{aligned} \log (s \sin \alpha) &= \log \Delta y - \frac{M}{2} v^2 - \frac{M}{12} \xi^2 - \frac{M}{24} \eta^2 \\ \log (s \cos \alpha) &= \log \Delta x - \frac{M}{2} v^2 + \frac{M}{24} \eta^2 \\ \log \left(-\frac{1}{2} \Delta \alpha \right) &= \log \frac{\varrho''}{2} v \xi - \frac{M}{3} v^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (24) ergeben sich auch die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} d \cos \vartheta_{1,2} &= \Delta x \quad , \quad d \sin \vartheta_{1,2} = \Delta y \\ \log s &= \log d - \frac{M}{2} v^2 - \frac{M}{24} w^2 \\ a &= \vartheta_{1,2} - \frac{q''}{12} x y \\ \log \left(-\frac{1}{2} \Delta a \right) &= \log \frac{q''}{2} v x - \frac{M}{3} v^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wozu noch gehört:

$$\alpha_{1,2} = a - \frac{1}{2} \Delta a, \quad \alpha_{2,1} = 180^\circ + a + \frac{1}{2} \Delta a; \quad (28)$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2} + c_1 - (c_1 - \gamma_1) \quad \alpha_{2,1} = \alpha_{2,1} + c_2 - (c_2 - \gamma_2)$$

Über die Genauigkeit der Gleichung für s ist § 18 zu vergleichen.

Wird von dem Punkte $P_1(x_1, y_1)$ außer nach dem Punkte $P_2(x_2, y_2)$ noch nach einem Punkte $P_3(x_3, y_3)$ der Richtungswinkel $\alpha_{1,3}$ bzw. das Azimut $\alpha_{1,3}$ berechnet, so ist der sphäroidische Winkel $\angle P_2 P_1 P_3 = \alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} - \alpha_{1,2}$.

§ 15. Beispiel zu § 13.

Der Anfangspunkt des ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems entspreche dem Schnittpunkt des Hauptmeridians mit dem Parallelkreise $B_c = 52^\circ 5'$.

Ein Punkt P_1 habe die ebenen rechtwinkligen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -277\,234,919 \text{ m} \quad \text{mit der Annahme} \quad x_1 = -277\,248,781 \text{ m} \\ \bar{y}_1 &= +95\,576,417 \text{ ; } m_3 = 1 - 0,00005 \text{ wird: } y_1 = +95\,581,196 \text{ .} \end{aligned}$$

Von dem Punkt P_1 gehe eine geodätische Linie $s = 60\,000$ m unter dem Azimut $\alpha_{1,2} = 170^\circ$ nach dem Punkte P_2 .

Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten \bar{x}_2, \bar{y}_2 , die zu P_2 gehören, sind herzuleiten.

Zu x_1 gehört die Breite $B'_1 = 50^\circ 00' 7,61$ und hierzu der mittlere Krümmungsradius $r'_1, \dots, 6,804\,894$ und der Querkrümmungsradius $N'_1, \dots, 6,805\,4958\,2$.

Zur Herleitung des Richtungswinkels $\alpha_{1,2}$ ist die Kenntnis der Konvergenz des Meridians c_1 und ferner $c_1 - \gamma_1$ notwendig. Der letztere Wert ergibt sich nach (16).

Ist c noch nicht bekannt, so hat man nach (14), S. 22, zur Berechnung von c die Formel:

$$\frac{q''}{N''} y = r_1 \log c = \log (\eta \operatorname{tg} B') - \tau + 2 \mu; \quad (29)$$

$$\tau = [7, 644 \ 42 - 20] \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^2 - [4, 65 - 30] (13 - 10 \cos^2 B') \left(\frac{\eta}{\cos B'} \right)^4;$$

$$2 \mu = [5, 472 - 20] (\eta \cos B')^2.$$

Vernachlässigt man das zweite Glied in dem Ausdrucke für τ , so kann dadurch in c erst ein Fehler entstehen, der für $l = \pm 1,5^\circ$, bei $B' = 60^\circ$ gleich $0,0007$, bei $B' = 45^\circ$ gleich $0,0004$ und bei $B' = 30^\circ$ gleich $0,0002$ wird.

$q'' \dots 5,758 \ 1226 \ 3$	$q'' c'^2 : 3 \dots 3,108$	$\alpha_{1,2} = 170^\circ$
$y_1 \dots 4,980 \ 3724 \ 6$	$\sin 2 B_1 \dots 9,993$	$-c_1 = -1 \ 0214,694$
$1 : N_1 \dots 3,194 \ 5041 \ 8$	$(y_1 : r_1)^3 \dots 4,526$	$c_1 - \tau_1 = \frac{1}{1} \ 0,004$
$\eta_1 \dots 3,932 \ 9992 \ 7$	$c_1 - \tau_1 \dots 7,627$	$\alpha_{1,2} = 168^\circ 9785,310$
$\operatorname{tg} B'_1 \dots 0,076 \ 3044 \ 0$		
$-\tau = \dots \times 215 \ 9$		
$+ 2 \mu = \dots 9$		
$c_1 \dots 4,009 \ 2253 \ 5$		

Nach (19) und (20) wird nun weiter erhalten:

$s \dots 4,778 \ 1512 \ 5$	$1 : 2 \dots 9,6990$	$1 : 6 \dots 9,2218$	$1 : 2 \dots 9,6990$	$1 : 6 \dots 9,2218$
$\sin \alpha_{1,2} \dots 9,281 \ 4351 \ 9$	$v \dots 4,0596$	$3 y_1 + v \dots 5,4745$	$u \dots 4,7701_n$	$u \dots 4,7701_n$
$\cos \alpha_{1,2} \dots 9,991 \ 9149 \ 1_n$	$(r_1 : r'_1)^2 \dots 6,3510$	$4,6963$	$(y_2 : r'_1)^2 \dots 6,4494$	$(v : r'_1)^2 \dots 4,5094$
$v \dots 4,059 \ 5864 \ 4$	$(a) \dots 0,1096$	$(u : r'_1)^2 \dots 5,9304$	$(d) \dots 0,9185_n$	$(c) \dots 8,5013_n$
$u \dots 4,770 \ 0661 \ 6_n$		$(v : r'_1)^2 \dots 4,5094$		
		$(b) \dots 0,6267$		
		$(c) \dots 9,2057$		
$v = \frac{1}{1} \ 11 \ 470,608$		$u = \dots 58 \ 893,337$		
$+ (a) = \dots 1,287$		$+ (d) = \dots 8,288$		
$- (b) = \dots \times 5,766$		$- (e) = \dots \times 68$		
$+ (c) = \dots 9,161$		$\Delta x = \dots 58 \ 901,593$		
$\Delta y = \frac{1}{1} \ 11 \ 467,822$		$x_1 = \dots 277 \ 248,781$		
$y_1 = \frac{1}{1} \ 95 \ 581,196$		$x_2 = \dots 336 \ 150,374 \ \text{m}$		
$y_2 = \frac{1}{1} \ 107 \ 049,018 \ \text{m}$		$x_2 = \dots 336 \ 133,566 \ \epsilon.$		
$\bar{y}_2 = \frac{1}{1} \ 107 \ 043,666 \ \epsilon.$				

Zu $\frac{1}{2} (x_1 + x_2)$ gehört $B'_m = 49^\circ 74$ und dazu $r'_m \dots 6,804 \ 881$.

$q'' \dots 5,758 \ 12$		mithin nach (18):
$\Delta x \dots 4,770 \ 13_n$		$180^\circ + \alpha_{1,2} = 348^\circ 9785,310$
$y_m \dots 5,005 \ 67$		$\Delta \alpha = \dots 83,970$
$1 : r'_m \dots 6,390 \ 24$	$-(f) = 83,977$	$\alpha_{2,1} = 348^\circ 9869,280$
$(f) \dots 1,924 \ 16_n$	$+(g) = -0,007$	
$1 : 3 \dots 9,523$	$\Delta \alpha = 83,970;$	
$(y_m : r'_m)^2 \dots 6,401$		
$(g) \dots 7,848_n$		

Will man weiter das Azimut $\alpha_{2,1}$ haben, so ist

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{2,1} + c_2 - (c_2 - \gamma_2)$$

worin c_2 und $c_2 - \gamma_2$ wie vorher zu berechnen sind.

Hätte man bei der letzten Rechnung $\frac{1}{r_1^2}$ statt $\frac{1}{r_m^2}$ benutzt, so würde sich Δa um $-0,005$, also auch $\alpha_{2,1}$ um diesen Betrag kleiner ergeben haben.

Wie aus (21) folgt, ist der Fehler von Δa hier gleich $\pm 0,001$.

Vgl. zu diesem Beispiel § 20.

§ 16. Beispiel zu § 14. Der Anfangspunkt der Abszissen gehöre zu dem Punkte des Hauptmeridians, der die Breite $B_0 = 45^\circ$ hat. Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 des Ellipsoids seien:

$$\begin{aligned} x_1 &= -109\,989,000 \text{ m} & y_1 &= -99\,990,000 \text{ m} \\ x_2 &= -37\,996,200 \text{ „} & y_2 &= -129\,987,000 \text{ „} \end{aligned}$$

Wird $m_2 = 1 - 0,0001$, also $\frac{1}{m_2} = 1 + 0,0001 + 0,00000001$, angenommen, so ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= -110\,000,000 & y_1 &= -100\,000,000 \\ x_2 &= -38\,000,000 & y_2 &= -130\,000,000 \end{aligned}$$

mithin

$$\Delta x = +72\,000,000 \qquad \Delta y = -30\,000,000.$$

Aus den ebenen Koordinaten sind die Länge s der geodätischen Linie $P_1 P_2$ und ihre Azimute $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ in P_1 und P_2 zu berechnen.

Die Konvergenz des Meridians in den beiden Punkten, die, wenn sie nicht schon bei der Herleitung der Koordinaten erhalten ist, nach (29) berechnet wird, ist:

$$\text{in } P_1: c_1 = -0^\circ 8663,605 \qquad \text{in } P_2: c_2 = -1^\circ 1518,675.$$

Zu $x_m = +72\,000$ m gehört $B'_m = 44^\circ 334$ und dazu $r'_m \dots 6,804607$.

Der Übergang von c zu γ wird nach (16) ausgeführt. Die zu x_1 und x_2 gehörigen Breiten sind $B'_1 = 44^\circ 0$ und $B'_2 = 44^\circ 7$, womit $r'_1 = r'_2 \dots 6,8046$ folgt. Es würde genügen, bei der Berechnung von $c_1 - \gamma_1$ und $c_2 - \gamma_2$ beidemale r'_m und $2 B'_m$, statt $2 B'_1$ und $2 B'_2$ zu benutzen,

$$\begin{array}{lll} 1: r'_1 \dots 3,1954 & & \varrho'' e^2: 3 \dots 3,108 \\ x_1: r'_1 \dots 5,0000 & y_1: r'_1 \dots 8,1954 & (y_1: r'_1)^2 \dots 4,586 \quad (y_2: r'_2)^2 \dots 4,928 \\ x_2: r'_2 \dots 5,1139 & y_2: r'_2 \dots 8,3993 & \sin 2 B'_1 \dots 0,000 \quad \sin 2 B'_2 \dots 0,000 \\ & & (c_1 - \gamma_1) \dots 7,644 \quad (c_2 - \gamma_2) \dots 8,036 \end{array}$$

A. Es werden nun die Gl. (23), (26) und (28) angewendet.

$$\begin{array}{rcl}
 \Delta y \dots 4,477\ 1212\ 5_n & \Delta x \dots 4,857\ 3325\ 0 & 1: r'_m \dots 3,195\ 393 \\
 - (a) = \quad \times 293\ 8 & - (a) = \quad \times 293\ 8 & \xi \dots 8,052\ 725 \\
 - (b) = \quad \times 53\ 9 & + (c) = \quad 4\ 0 & \Delta y \dots 4,477\ 12_{11} & \eta \dots 7,672\ 51_n \\
 - (c) = \quad \times 6\ 0 & & x_{11} = -115000 \dots 5,060\ 698_n & v \dots 8,256\ 091_n \\
 \\
 s \sin \alpha \dots 4,477\ 0456\ 2_n & s \cos \alpha \dots 4,857\ 2622\ 8 & M: 2 \dots 9,33\ 675 & \\
 \sin \alpha \dots 9,585\ 0220\ 3_n & \cos \alpha \dots 9,965\ 2378\ 9 & v^2 \dots 6,51\ 218 & \\
 s \dots 4,892\ 0235\ 9 & s \dots 4,892\ 0235\ 9 & (a) \dots 5,84\ 893 & \\
 \\
 s = 77\ 987,248\ \text{m.} & & M: 12 \dots 8,5586 & M: 24 \dots 8,2576 \\
 \alpha = 337^\circ 3803,888 & \text{tg } \alpha \dots 9,619\ 7833\ 4_n & \xi^2 \dots 6,1055 & \eta^2 \dots 5,3450 \\
 \frac{1}{2} \Delta \alpha = 58,326 & & (b) \dots 4,6641 & (c) \dots 3,6026 \\
 \alpha_{1,2} = 337^\circ 3745,562 & \alpha_{2,1} = 157^\circ 3862,214 & & \\
 c_1 = -8663,605 & c_2 = -1\ 1518,675 & e'' : 2 \dots 5,457\ 093 & \\
 -(c_1 - \gamma_1) = + 0,005 & -(c_2 - \gamma_2) = + 0,011 & v \dots 8,256\ 091_n & M: 3 \dots 9,161 \\
 \alpha_{1,2} = 336^\circ 5081,962 & \alpha_{2,1} = 156^\circ 2343,550 & \xi \dots 8,052\ 725 & v^2 \dots 6,512 \\
 & & -Mv^2 : 3 = \quad \times 53 & 5,673 \\
 & & -\Delta \alpha : 2 \dots 1,765\ 862_n & \\
 \end{array}$$

Werden die bei der vorstehenden Rechnung vernachlässigten, in (25) angegebenen Glieder mit berücksichtigt, so wird erhalten:

$$\begin{array}{rcl}
 s \sin \alpha \dots 4,477\ 0456\ 4_n & s \cos \alpha \dots 4,857\ 2622\ 8 & \text{tg } \alpha \dots 9,619\ 7833\ 6_n \\
 s \dots 4,892\ 0235\ 9 & \alpha = 337^\circ 3803,878 & \\
 \frac{1}{2} \Delta \alpha = 58,326 & & \\
 \alpha_{1,2} = 337^\circ 3745,552 & \alpha_{1,2} = 336^\circ 5081,952 & \\
 \alpha_{2,1} = 157^\circ 3862,204 & \alpha_{2,1} = 156^\circ 2343,540 & \\
 \end{array}$$

Vgl. hierzu das Beispiel auf S. 41/42.

B. Die Rechnung soll nun auch nach den Formeln (27) mit (28) ausgeführt werden.

$$\begin{array}{rcl}
 \Delta y = d \sin \vartheta_{1,2} \dots 4,477\ 1212\ 5,5_n & \sin \vartheta_{1,2} \dots 9,585\ 0266\ 5,2_n & \\
 \Delta x = d \cos \vartheta_{1,2} \dots 4,857\ 3324\ 9,6 & \cos \vartheta_{1,2} \dots 9,965\ 2378\ 9,4 & d \dots 4,892\ 0946\ 0 \\
 \text{tg } \vartheta_{1,2} \dots 9,619\ 7887\ 5,9_n & & \vartheta_{1,2} = -22^\circ 6198,650
 \end{array}$$

Die Werte von ξ , η , v sind bereits vorher unter A angegeben. Mit ihnen ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl}
 M: 2 \dots 9,33\ 675 & M: 24 \dots 8,258 & \log s - \log d = -\frac{5}{7}c62 \\
 v^2 \dots 6,51\ 218 & \eta^2 \dots 5,345 & = -40 \\
 5,84\ 893 & 3,603 & = -\frac{5}{7}102 & s \dots 4,892\ 0235\ 8 \\
 \\
 g'' : 12 \dots 4,678\ 94 & g'' : 2 \dots 5,457\ 09 & & \vartheta_{1,2} = 337^\circ 3801,350 \\
 \xi \dots 8,052\ 73 & v \dots 8,256\ 09_n & v^2 \dots 6,51 & \alpha - \vartheta_{1,2} = 2,536 \\
 \eta \dots 7,672\ 51_n & v \dots 8,052\ 73 & M: 3 \dots 9,16 & \alpha = 337^\circ 3803,886 \\
 \vartheta_{1,2} - \alpha \dots 0,404\ 18_n & -Mv^2 : 3 = \quad \times 5 & 5,67 & \Delta \alpha : 2 = 58,326 \\
 & -\Delta \alpha : 2 \dots 1,765\ 86_n & & \alpha_{1,2} = 337^\circ 3745,560 \\
 & & & \alpha_{2,1} = 157^\circ 3862,212
 \end{array}$$

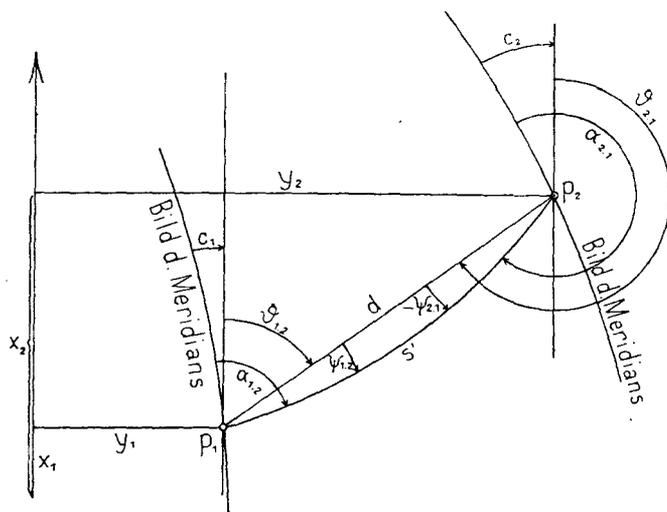
Der Übergang von $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ zu $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ geschieht wieder wie vorher.

Übertragung der Entfernung und ihrer Richtungen auf dem Ellipsoid in die Ebene und umgekehrt.

§ 17. **Entfernungs- und Richtungsreduktionen.** Wenn ein von geodätischen Linien gebildetes Dreiecksnetz durch konforme Abbildung auf die Ebene übertragen wird, so werden zwar die Winkel des Bildes den entsprechenden auf dem Erdellipsoid gleich sein, aber die Bilder der Dreiecksseiten sind Kurven. Um nun das Dreiecksnetz in der Ebene bequem berechnen zu können, müssen diese Kurven durch ihre Sehnen, also durch die Geraden zwischen den Bildern der Dreieckspunkte ersetzt werden. Alsdann wird es aber notwendig sein, die Reduktionen von den Seiten und Richtungen des sphäroidischen Dreiecksnetzes auf die Seiten und Richtungen des durch gerade Linien gebildeten Dreiecksnetzes in der Ebene aufzustellen.

Es seien P_1 und P_2 der Anfangs- und der Endpunkt einer Dreiecksseite s auf dem Erdellipsoid. Die Azimute von $P_1 P_2 = s$, von Nord über Ost von Null bis 360° gezählt, seien $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$.

Die Bildpunkte in der Ebene p_1 und p_2 von P_1 und P_2 sollen die durch Division mit dem Vergrößerungsverhältnis m_0 erhaltenen rechtwinkligen Koordinaten: $x_1 = \frac{\bar{x}_1}{m_0}$, $y_1 = \frac{\bar{y}_1}{m_0}$ und $x_2 = \frac{\bar{x}_2}{m_0}$, $y_2 = \frac{\bar{y}_2}{m_0}$ haben.



• Die Bildkurve von s , die sich zwischen p_1 und p_2 erstreckt, sei s' . Im allgemeinen kehrt s' die hohle Seite der x -Achse zu. Schneidet s' die x -Achse, so ist der Schnittpunkt ein Wendepunkt der Kurve.

Die Gerade d zwischen p_1 und p_2 schließe mit den Parallelen zur x -Achse die ebenen Richtungswinkel $\vartheta_{1,2}$ und $\vartheta_{2,1} = 180^\circ \div \vartheta_{1,2}$ ein. Auch diese Richtungswinkel werden von Nord über Ost und von Null bis 360° gezählt. Es ist

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{und} \quad d \cos \vartheta_{1,2} = x_2 - x_1 \quad d \cos \vartheta_{2,1} = x_1 - x_2$$

$$d \sin \vartheta_{1,2} = y_2 - y_1 \quad d \sin \vartheta_{2,1} = y_1 - y_2. \quad (30)$$

Die Winkel, die s' mit d in p_1 und p_2 bildet, werden durch $\psi_{1,2}$ und $-\psi_{2,1}$ bezeichnet. Sie sind die Richtungsunterschiede des Bildes s' der geodätischen Linie und der Verbindungsgeraden der Bildpunkte ihrer Endpunkte.

Ferner ist die Konvergenz des Meridians bei der Abbildung, also derjenige Winkel, den das Bild des Meridians mit den Parallelen zur x -Achse bildet, in p_1 gleich c_1 und in p_2 gleich c_2 . Die Konvergenz des Meridians hat gleiches Vorzeichen mit y und mit der Längendifferenz l .

Infolge der Konformität ist das Azimut von s gleich dem Winkel zwischen dem Bild des Meridians und s' . Daher bestehen die Gleichungen:

$$\alpha_{1,2} = \vartheta_{1,2} \div c_1 \div \psi_{1,2} \quad \text{oder} \quad \vartheta_{1,2} = \alpha_{1,2} - c_1 - \psi_{1,2}$$

$$\alpha_{2,1} = \vartheta_{2,1} \div c_2 \div \psi_{2,1} \quad \text{oder} \quad \vartheta_{2,1} = \alpha_{2,1} - c_2 - \psi_{2,1} \quad (31)$$

Die Vorzeichen von $\psi_{1,2}$ und $-\psi_{2,1}$ hierin kann man schon aus der vorher angegebenen Eigenschaft von s' , der x -Achse die hohle Seite zuzukehren, erkennen, abgesehen davon, daß man dies aus den folgenden Formeln für $\psi_{1,2}$ und $-\psi_{2,1}$ sieht.

Zum Übergang von s , $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ zu d , $\vartheta_{1,2}$ und $\vartheta_{2,1}$ oder umgekehrt, müssen Ausdrücke für die Entfernungsreduktion, d. i. für den Unterschied in der linearen Länge der sphäroidischen Dreiecksseite $P_1P_2 = s$ und der Strecke $p_1p_2 = d$, und für die Richtungsreduktionen $\psi_{1,2}$ und $-\psi_{2,1}$ aufgestellt werden.

Zur Abszisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gehöre die Breite B'_m und zu dieser der mittlere Krümmungsradius $r'_m = \frac{a \sqrt{1 + e'^2}}{1 + e'^2 \cos^2 B'_m}$. Es wird wieder gesetzt:

$$\frac{x_2 - x_1}{r'_m} = \xi, \quad \frac{y_2 - y_1}{r'_m} = \eta \quad \text{und} \quad \frac{y_2 + y_1}{2r'_m} = \tau. \quad (32)$$

Berechnung der Entfernungsreduktion. Für Dreiecksseiten bis zu einer Länge $s = 75$ km, deren Mitte bis zu 200 km vom Hauptmeridian absteht, oder für Seiten bis zu einer Länge $s = 100$ km, deren Mitte bis zu 150 km vom Hauptmeridian absteht, genügt die Formel:

$$\log d - \log s = \frac{M}{2} \tau^2 + \frac{M}{24} \eta^2 - \frac{M}{12} \tau^4; \quad (33)$$

ihr Fehler bleibt in diesen Grenzen unterhalb 0,5 Einheiten der 8. Dezimalstelle.

In (33) ist vernachlässigt:

$$M \left\{ \frac{1}{24} v^2 (\chi^2 - 2\eta^2) + \frac{1}{45} v^6 + \frac{1}{2880} \eta^2 (2\chi^2 - 5\eta^2) - \frac{1}{6} e'^2 \sin 2B'_m \cdot v\chi\eta + \frac{1}{6} e'^2 \cos^2 B'_m \cdot v^3 (v + 2\eta) \right\} + Gl_6. \quad (33^*)$$

Werden diese Glieder mitgenommen, so wird für Hauptdreiecksseiten bei einer mittleren Entfernung von 650 km vom Hauptmeridian die Entfernungsreduktion höchstens 0,5 Einh₈ ungenau.

Verhältnismäßig am größten kann in (33*) das erste Glied werden. Für $s = 75$ km und $\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 200$ km kann es $\frac{1}{2}$ Einh₈ erreichen.

Das Glied $\frac{M}{2880} \eta^2 (2\chi^2 - 5\eta^2)$ gibt für $s = 100$ km im Maximum noch nicht 0,5 Einh₁₀, es ist also immer ohne Belang.

Das Glied $\frac{M}{45} v^6$ erreicht für $\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 570$ km erst 0,5 Einh₈.

Das Glied $\frac{M}{6} e'^2 \sin 2B'_m \cdot v\chi\eta$ kann für $s = 75$ km und bei $\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 945$ km erst 0,5 Einh₈ werden.

Das Glied $\frac{M}{6} e'^2 \cos^2 B'_m \cdot v^3 (v + 2\eta)$ wird für $B'_m = 30^\circ$ und $s = 75$ km bei $\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 355$ km höchstens 0,5 Einh₈; für größere Werte von B'_m nimmt es ab.

Noch etwas weiter als (33) reicht die Formel:

$$\log d - \log s = \frac{1}{6} \left(\log \frac{m_1}{m_0} + 4 \log \frac{m_m}{m_0} + \log \frac{m_2}{m_0} \right), \quad (34)$$

worin die Vergrößerungsverhältnisse mit y_1 , $\frac{1}{2} (y_1 + y_2)$ und y_2 zu berechnen sind*). Sie genügt für Seiten, die kleiner als $s = 75$ km sind, und die mit ihrer Mitte bis zu 260 km vom Hauptmeridian abstehen.

*) Zur Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses kann auch die Formel dienen:

$$\log \frac{m}{m_0} = \frac{M}{2} \left(\frac{y}{r'} \right)^2 - \frac{M}{12} \left(\frac{y}{r'} \right)^4, \quad r' = \frac{a \left\{ 1 + \frac{e'^2}{1 + e'^2 \cos^2 B'} \right\}}{1 + e'^2 \cos^2 B'}; \quad B' \text{ gehört zum Fußpunkt von } y.$$

Die dabei vernachlässigten Glieder

$$+ \frac{M}{6} e'^2 \cos^2 B' \cdot \left(\frac{y}{r'} \right)^4 + \frac{M}{45} \left(\frac{y}{r'} \right)^6 + Gl_8$$

rufen in $\log \frac{m}{m_0}$ einen Fehler hervor, der für $y = 260$ km und bei $B' = 0$ erst 1,4 Einh. beträgt.

Ihr Fehler

$$M \left\{ \frac{1}{24} v^2 (x^2 - y^2) + \frac{1}{1440} x^2 y^2 + \frac{1}{3} e'^2 \cos^2 B'_m \cdot v^3 y \right\} + Gl_6 \quad (34^*)$$

bleibt in diesen Grenzen kleiner als 0,5 Einh₈.

Für Seiten bis zu

einer Länge $s = 75$ km, deren Mitten bis zu 112 km vom Hauptmeridian entfernt sind, reicht es aus, die Formel:

$$\log d - \log s = \frac{M}{2} v^2 + \frac{M}{24} y^2 \quad (35)$$

zu benutzen, ohne daß der damit begangene Fehler 0,5 Einh₈ überschreitet.

Darf der Fehler der Gl. (35) 0,5 Einh₇ erreichen, so gilt die Formel bis zu einem mittleren Abstand $\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 212$ km.

Die Formel

$$\log d - \log s = \log \frac{m_m}{m_o},$$

worin $\frac{m_m}{m_o}$ zu $\frac{1}{2} (y_1 + y_2)$ gehört, kann nur für kleine Seiten benutzt werden, da ihr Fehler schon 0,5 Einh₇ erreicht, wenn $y_2 - y_1 = \pm 10,6$ km ist.

Berechnung der Richtungsreduktionen. Die Unterschiede in den Richtungen der geodätischen Linie und der Geraden, die die Bilder ihrer Endpunkte verbindet, werden durch die Gleichungen: § 19.

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ -\psi_{2,1} &= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \quad (36)$$

dargestellt.

Für Seiten bis zu

$$75 \text{ km Länge und so lange } \frac{1}{2} (y_1 + y_2) < 220 \text{ km}$$

ist, reicht es aus

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi''}{2} v x \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right) + \frac{\varphi''}{2} e'^2 \sin 2 B'_m \cdot v^2 y \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi''}{12} x y \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

zu setzen. In diesen Grenzen kann der Fehler in $\psi_{1,2}$ nicht größer als 0,005 und in $\psi_{2,1}$ nicht größer als 0,004 werden.

Vernachlässigt ist bei (37)

$$\text{in } \varphi_1: \varrho'' v \chi \left(\frac{1}{24} \chi^2 + \frac{1}{3} e'^2 \cos^2 B'_m \cdot \tau^2 + \frac{1}{15} \tau^4 \right) - \frac{1}{24} \varrho'' e'^2 \sin 2 B'_m \cdot (2 \chi^2 - \eta^2) \eta = Gl. \quad (37^*)$$

$$\text{in } \varphi_2: - \frac{1}{6} \varrho'' e'^2 \sin 2 B'_m \cdot (\chi^2 - \eta^2) v + \frac{1}{720} \varrho'' \chi \eta (\chi^2 - \eta^2) = Gl.$$

Nimmt man diese Glieder mit, so sind die Formeln für Hauptdreiecksseiten, deren mittlere Entfernung bis zu 650 km beträgt, noch bis auf einige Einheiten der vierten Dezimalstelle der Sekunde genau.

Das Glied $\frac{1}{720} \varrho'' \chi \eta (\chi^2 - \eta^2)$ in φ_2 kann für $s = 75$ km im Maximum erst 0,000004 bringen, es ist also bei Hauptdreiecksseiten ohne Bedeutung.

Der größte Wert des Gliedes $\frac{1}{24} \varrho'' e'^2 \sin 2 B'_m \cdot (2 \chi^2 - \eta^2) \eta$ in φ_1 wird bei $s = 75$ km gleich 0,00026.

Das Glied $\frac{1}{15} \varrho'' v^2 \chi$ in φ_1 wird für $s = 75$ km und für $\frac{1}{2} (v_1 + v_2) = 500$ km höchstens gleich 0,001, für $\frac{1}{2} (v_1 + v_2) = 200$ km höchstens gleich 0,000014.

Die beiden größten Glieder in φ_1 bei (37*) : $\varrho'' v \chi \left(\frac{1}{24} \chi^2 + \frac{1}{3} e'^2 \cos^2 B'_m \cdot \tau^2 \right)$ werden für $v_2 = v_1 = 75$ km und $B' = 0$ bei $\frac{1}{2} (v_1 + v_2) = 200 \quad 150 \quad 120 \quad 100$ km
gleich $\left\{ \begin{array}{cccc} 0,00012 & 0,00009 & 0,00007 & 0,00006 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5 & 2 & 1 & 1. \end{array} \right.$

Das Glied $\frac{1}{6} \varrho'' e'^2 \sin 2 B'_m \cdot (\chi^2 - \eta^2) v$ in φ_2 wird im Maximum, wenn $s = 75$ km vorausgesetzt ist, für $\frac{1}{2} (v_1 + v_2) = 200 \quad 150 \quad 120 \quad 100$ km
gleich: 0,0028 0,0021 0,0017 0,0014.

Die Fehler können daher, wenn φ_1 und φ_2 nach (37) berechnet sind und angenommen wird, daß $s = 75$ km ist,

$$\begin{array}{l} \text{für } \frac{1}{2} (v_1 + v_2) = 200 \quad 150 \quad 120 \quad 100 \text{ km} \\ \text{in } \varphi_{1,2} \text{ nicht größer als } 0,0042 \quad 0,0031 \quad 0,0025 \quad 0,0020 \\ \text{in } \varphi_{2,1} \text{ nicht größer als } 0,0031 \quad 0,0024 \quad 0,0020 \quad 0,0017 \end{array}$$

werden.

Sind φ_1 und φ_2 aus

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \varrho'' v \chi \\ \varphi_2 &= \frac{1}{12} \varrho'' \chi^2 \eta \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

berechnet, so beträgt der Fehler in $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,1}$, unter der Annahme, daß

$s = 75$ km ist, bei $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 200$ km höchstens $0,04$

und bei $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 120$ km höchstens $0,01$.

Es werde nun das geodätische Dreieck $P_1 P_2 P_3$ in die Ebene übertragen, das zugehörige ebene Dreieck zwischen den Bildpunkten sei $p_1 p_2 p_3$. Alsdann ist der ebene Winkel $p_2 p_1 p_3 = \vartheta_{1,3} - \vartheta_{1,2}$ und der sphäroidische Winkel $P_2 P_1 P_3 = \vartheta_{1,3} - \vartheta_{1,2} + \psi_{1,3} - \psi_{1,2}$; es muß daher

$$(39)$$

$\psi_{1,3} - \psi_{1,2} + \psi_{2,1} - \psi_{2,3} + \psi_{3,2} - \psi_{3,1} = \text{Exzeß des Dreiecks } P_1 P_2 P_3$
sein.

Wenn aus der Länge und Richtung der von P_1 nach P_2 gehenden Dreiecksseite die ebenen rechtwinkligen Koordinaten von P_2 zu berechnen sind, während die von P_1 bekannt sind, so muß man sich zunächst genäherte Werte der Koordinaten von P_2 verschaffen. Man setzt dazu in erster Annäherung $d = s$ und $\vartheta_{1,2} = \alpha_{1,2} - c_1$.

Beispiel. Die im § 15 behandelte Aufgabe soll nun auch mit Hilfe § 20. der Entfernungs- und der Richtungsreduktion gelöst werden. Es sollen also mittels der von P_1 nach P_2 gehenden geodätischen Linie, deren Länge $s = 60\,000$ m und deren Ausgangsazimut $\alpha_{1,2} = 170^\circ$ ist, die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x_2, y_2 von P_2 hergeleitet werden, wenn zu P_1 :

$$x_1 = -227\,248,781 \text{ m}, \quad y_1 = +95\,581,196 \text{ m}, \quad c_1 = 1^\circ 02' 14,694$$

gehören, wobei der Anfangspunkt der Abszissen dem Punkt des Hauptmeridians mit der Breite $B_0 = 52^\circ 5$ entspricht.

Um

$$x_2 - x_1 = \Delta x = d \cos \vartheta_{1,2} \quad \text{und} \quad y_2 - y_1 = d \sin \vartheta_{1,2}$$

zu erhalten, ist die Kenntnis von d und $\vartheta_{1,2}$ notwendig.

Als erste Annäherung wird $d = s = 60\,000$ m und $\vartheta_{1,2} = \alpha_{1,2} - c_1 = 168^\circ 9' 85''$ gesetzt. Mit diesen Werten ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} s \dots 4,77815\,125 & \Delta x \dots 4,77\,006_n & \Delta x = -58\,893 \quad x_1 + \frac{1}{2} \Delta x = x_m = -306\,695 \\ \cos(\alpha_{1,2} - c_1) \dots 9,99191_n & & \\ \sin(\alpha_{1,2} - c_1) \dots 9,28143 & \Delta y \dots 4,05\,958 & \Delta y = +11\,471 \quad y_1 + \frac{1}{2} \Delta y = y_m = +101\,317 \end{array}$$

Zu x_m gehört $B'_m = 49^\circ 7' 4''$ und dazu $r'_m \dots 6,804\,881$, mithin wird:

$$\begin{array}{lll} y'_m \dots 5,005\,68 & \Delta x \dots 4,770\,06_n & \Delta y \dots 4,059\,58 \\ r'_m \dots 3,195\,12 & 3,195\,12 & 3,195\,12 \\ v \dots 8,200\,80 & r \dots 7,965\,18_n & \eta \dots 7,254\,70, \end{array}$$

womit man nach (35) und (36) mit (38) erhält:

$$\begin{array}{llll} M: 2 \dots 9,336\,75 & M: 24 \dots 8,258 & \varrho'': 2 \dots 5,457\,09 & \varrho'': 12 \dots 4,6789 \\ r^2 \dots 6,401\,60 & \eta^2 \dots 4,509 & v \dots 8,200\,80 & r \dots 7,9652_n \quad \varphi_1 = -41''983 \\ 5,738\,35 & 2,767 & x \dots 7,965\,18_n & \eta \dots 7,2547 \quad \varphi_2 = -0,792 \\ \log d - \log s = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{5}{6} 5475 \\ - \frac{5}{6} 5481 \end{array} \right. & \varphi_1 \dots 1,623\,07_n & \varphi_2 \dots 9,8988_n & \psi_{1,2} = -41,191 \quad \psi_{2,1} = +42,775 \\ & \vartheta_{1,2} = \alpha_{1,2} - c_1 - \psi_{1,2} = 168^\circ 9' 826,501. & & \end{array}$$

Mit diesen Werten von d und $\vartheta_{1,2}$ sollen nun ein zweites Mal die Korrekturen berechnet werden, und zwar sollen dabei die genaueren Gl. (33) und (37) benutzt werden.

r'_m ist oben bereits genau angegeben.

Nach (33) wird:

$$\begin{array}{llll} M: 2 \dots 9,336\,75 & M: 12 \dots 8,56 & M: 24 \dots 8,258 & \log d - \log s = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{5}{6} 5475 \\ - \frac{5}{6} 5481 \end{array} \right. = \frac{5}{6} 5481 \\ r^2 \dots 6,401\,58 & r^4 \dots 2,80 & \eta^2 \dots 4,509 & \\ 5,738\,33 & 1,36 & 2,767 & \end{array}$$

und nach (37):

$$\begin{array}{llll} \varrho'': 2 \dots 5,457\,09 & r: 3 \dots 9,523 & \varrho'' r^2: 2 \dots 3,284 & -41''988 \quad \varrho'': 12 \dots 4,6789 \\ v \dots 8,200\,79 & r^2 \dots 6,402 & \sin 2 B'_m \dots 9,994 & + 4 \quad r \dots 7,9653_n \\ x \dots 7,965\,25_n & 1,623_n & r^2 \dots 6,402 & + 1 \quad \eta \dots 7,2546 \\ 1,623\,13_n & 7,548_n & \eta \dots 7,255 & \varphi_1 = -41,983 \quad 9,8988_n \quad \varphi_2 = -0,792 \\ & & 6,935 & \psi_{1,2} = -41,191 \quad \psi_{2,1} = +42,775. \end{array}$$

Die zweite Rechnung hat hier zufällig keine Änderung der Werte der ersten gebracht.

Es wird daher

$$\begin{array}{ll} d \dots 4,778\,2060\,6 & d \dots 4,778\,2060\,6 \\ \cos \vartheta_{1,2} \dots 9,991\,9209\,9_n & \sin \vartheta_{1,2} \dots 9,281\,2748\,6 \\ x_2 - x_1 \dots 4,770\,1270\,5_n & y_2 - y_1 \dots 4,059\,4809\,2 \\ x_2 - x_1 = -58\,901,594 & y_2 - y_1 = +11\,467,821 \\ x_1 = -277\,248,781 & y_1 = +95\,581,196 \\ x_2 = -336\,150,375\,m & y_2 = +107\,049,017\,m. \end{array}$$

Soll auch noch das Azimut in P_2 hergeleitet werden, so ist noch c_2 zu berechnen, damit wird $\alpha_{2,1} = 180^\circ + \vartheta_{1,2} + c_2 + \psi_{2,1}$.

Zwischen den Richtungsreduktionen $\psi_{1,2}$, $\psi_{2,1}$ und der Differenz Δa der sphäroidischen Richtungswinkel besteht die Beziehung:

$$\Delta a + (c_1 - \gamma_1) - (c_2 - \gamma_2) = \psi_{2,1} - \psi_{1,2}. \quad (40)$$

Nach dem Beispiel auf S. 31 ist $\Delta a = 83,970$ und $c_1 - \gamma_1 = 0,004$. Berechnet man $c_2 - \gamma_2$ nach (16), so ergibt sich $c_2 - \gamma_2 = 0,006$. Es muß also

$$83,970 + 0,004 - 0,006 = 42,775 + 41,191$$

sein, was hier genügend zutrifft.

Beispiel.

§ 21.

Für zwei Punkte P_1 und P_2 des Ellipsoids seien die ebenen rechtwinkligen Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\bar{x}_1}{m_0} = -110 \text{ km} & y_1 &= \frac{\bar{y}_1}{m_0} = -100 \text{ km} \\ x_2 &= \frac{\bar{x}_2}{m_0} = -38 \text{ «} & y_2 &= \frac{\bar{y}_2}{m_0} = -130 \text{ «} \end{aligned}$$

wobei der Nullpunkt der Abszissen der Breite $B_0 = 45^\circ$ des Hauptmeridians entspricht.

Hieraus berechnet man die Konvergenz des Meridians in P_1 und P_2 zu

$$c_1 = -0^\circ 8663,605 \quad c_2 = -1^\circ 1518,675.$$

Es sollen nun die kürzeste Entfernung $s = P_1 P_2$ und ihre Azimute $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ hergeleitet werden. Vgl. § 16.

Da

$$\Delta x = +72\,000,000 \text{ m}, \quad \Delta y = -30\,000,000 \text{ m} \quad \text{und} \quad y_m = -115\,000 \text{ m}$$

ist, so wird nach (30):

$$\begin{aligned} d \sin \vartheta_{1,2} &= \Delta y \dots 4,47712125 \cdot 5_n & d \cos \vartheta_{1,2} &= \Delta x \dots 4,85733249 \cdot 6 \\ \sin \vartheta_{1,2} &\dots 9,58502665 \cdot 2_n & \cos \vartheta_{1,2} &\dots 9,96523789 \cdot 4 & \text{tg } \vartheta_{1,2} &\dots 9,61978875 \cdot 9_n \\ d &\dots 4,89209460 & d &\dots 4,89209460 & \vartheta_{1,2} &\dots 22^\circ 6198,650. \end{aligned}$$

Die zu $x_m = -74\,000 \text{ m}$ gehörige Breite B'_m ist $44^\circ 334$, mit der $r'_m \dots 6,804\,607$ erhalten wird. Man hat daher nach (32)

$$\begin{aligned} \Delta x &\dots 4,857\,332 & \Delta y &\dots 4,477\,12_n & r_m &\dots 5,060\,698_n \\ r'_m &\dots 3,195\,393 & & 3,195\,39 & & 3,195\,393 \\ r &\dots 8,052\,725 & \eta &\dots 7,672\,51_n & r &\dots 8,256\,091 \end{aligned}$$

Für die Entfernungsreduktion ergibt sich jetzt nach (33)

$$\begin{array}{rcccl}
 M: 2 \dots 9, 33 \ 675 & M: 24 \dots 8, 258 & M: 12 \dots 8, 56 & \log d & \log s = \frac{5}{7062.0} \\
 v^2 \dots 6, 51 \ 218 & \eta^2 \dots 5, 345 & v^4 \dots 3, 02 & & - 40.0 \\
 \hline
 5, 84 \ 893 & 3, 603 & 1, 58 & & - 0.4 \\
 & & & & - \frac{5}{7102} \\
 s \dots 4, 892 \ 0235 \ 8, & & & &
 \end{array}$$

und für die Richtungsreduktionen nach (37):

$$\begin{array}{rcccl}
 q'' : 2 \dots 5, 457 \ 093 & 1 : 3 \dots 9, 523 & q'' e'^2 : 2 \dots 3, 28 & - 58'' 332 & q'' : 12 \dots 4, 678 \ 94 \\
 v \dots 8, 256 \ 091_n & \tau^2 \dots 6, 512 & \sin 2 B'_m \dots 0, 00 & + 0, 006 & r \dots 8, 052 \ 73 \\
 r \dots 8, 052 \ 725 & 1, 766_n & \tau^2 \dots 6, 51 & - 0, 003 & \eta \dots 7, 672 \ 51_n \\
 1, 765 \ 909_n & 7, 801_n & \eta \dots 7, 67_n & - 58'' 329 = q_1 & 0, 404 \ 18_n \\
 & & 7, 46_n & & - 2'' 536 = q_2.
 \end{array}$$

(Hätte man in q_2 noch das nächst größere Glied:

$$- \frac{1}{6} q'' e'^2 \sin 2 B'_m \cdot v (x^2 - y^2) \text{ hinzugenommen, so würde } q_2 \text{ um } + 0'' 001 \text{ größer, also } = - 2'' 535 \text{ erhalten sein.)}$$

Die Richtungsreduktionen sind daher nach (36):

$$\psi_{1,2} = - 55'' 793 \quad \text{und} \quad \psi_{2,1} = + 60'' 865.$$

Für die Azimute findet man nach (31):

$$\begin{array}{rcc}
 \vartheta_{1,2} = 337^\circ 3801, 350 & 180^\circ + \vartheta_{1,2} = 157^\circ 3801, 350 \\
 + c_1 = \times 1336, 395 & + c_2 = \times 8 \ 8481, 325 \\
 + \psi_{1,2} = \times 44, 207 & + \psi_{2,1} = \times 60, 865 \\
 \alpha_{1,2} = 336^\circ 5081, 952 & \alpha_{2,1} = 156^\circ 2343, 540.
 \end{array}$$

Die Beziehung zwischen $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,1}$, sowie zu dem bei der Auflösung auf S. 33 erhaltenen Δa , nämlich $\Delta a + (c_1 - \gamma_1) - (c_2 - \gamma_2) = \psi_{2,1} - \psi_{1,2}$, also: $116, 652 - 0, 005 + 0, 011 = 60, 865 + 55, 793$, wird erfüllt.

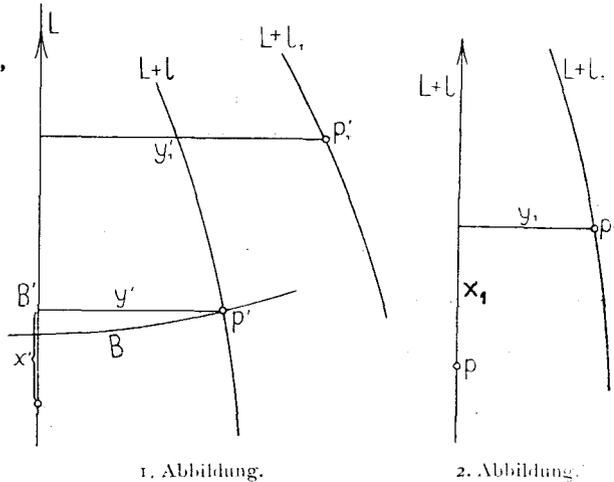
Transformation der ebenen konformen Koordinaten.

§ 22. **Verschiedene Arten der Koordinatenumwandlung.** Die ebenen konformen Koordinaten im Vermessungsgebiete gehören verschiedenen Koordinatensystemen an, deren Hauptmeridiane mit 3° Längenunterschied einander folgen. Da es für die Zwecke der Landesvermessung oft notwendig sein wird, in irgendeinem Bezirke den Meridianstreifen eine größere Breite zu geben, so wird man vor die Aufgabe gestellt: die ebenen rechtwinkligen Koordinaten, die auf einen Hauptmeridian mit der geographischen Länge L bezogen sind, in andere umzuwandeln, für die der Hauptmeridian $L + l$ ist. Ferner wird verlangt, die Koordinaten eines zu

einer Kleinvermessung gehörigen Koordinatensystems in die ebenen Koordinaten eines der Meridianstreifen zu transformieren und umgekehrt.

Die Punkte P und P_1 des Referenzellipsoids seien durch die konforme Abbildung eines Meridianstreifens, dessen Hauptmeridian die Länge L hat, in die Ebene übertragen. Ihre Bildpunkte p' und p'_1 haben die rechtwinkligen Koordinaten x', y' und x'_1, y'_1 , aus denen, mittels des Verjüngungsfaktors m_0 , $\bar{x}' = m_0 x', \bar{y}' = m_0 y'$ und $\bar{x}_1 = m_0 x'_1, \bar{y}_1 = m_0 y'_1$ hergestellt sind.

Durch eine zweite konforme Abbildung werden die Punkte von neuem in der Ebene abgebildet. Es soll dabei der Meridian durch P' , dessen Länge $L + l$ ist, zum Hauptmeridian werden. Gleichzeitig entspreche P dem Anfangspunkte p der neuen Koordinaten. Zu dem Bildpunkte p_1 von P_1 gehören jetzt die ebenen recht-



1. Abbildung.

2. Abbildung.

winkligen Koordinaten x_1, y_1 , die in $\bar{x}_1 = m_* x_1, \bar{y}_1 = m_* y_1$ übergehen, wo m_* auch irgendeinen anderen Verjüngungsfaktor als m_0 bedeuten kann.

Die Aufgabe besteht nun darin, aus den Werten von $x'_1 - x', y'_1 - y'$, die Werte von x_1, y_1 herzuleiten.

Diese Umwandlung der Koordinaten kann auf drei Weisen geschehen:

Erstens durch Vermittelung geographischer Koordinaten. Man berechnet B und l , aus x_1, y_1 und darauf x_1, y_1 aus B und $l - l$. Die geographischen Koordinaten wird man benutzen, wenn nur wenige Koordinatentransformationen vorzunehmen sind.

Zweitens durch Aufstellung von Transformationsgleichungen zwischen x_1, y_1 und $x_1 - x', y_1 - y'$.

Drittens mit Hilfe der Richtungs- und Entfernungsreduktionen. Im ersten Koordinatensystem werden aus den ebenen Koordinaten von p' und p'_1 die lineare Länge und das Azimut der geodätischen Linie $P'P'_1$ hergestellt. Aus diesen werden die ebenen Koordinaten von p_1 im zweiten Koordinatensystem erhalten.

§ 23. Transformationsgleichungen. Bei der ersten Abbildung wird der Meridian $L + l$ durch eine Kurve dargestellt. Die Konvergenz des Meridians in p' sei c' . Ferner sei B' die geographische Breite, die zum Endpunkte des elliptischen Bogens x' gehört. Wie früher ist

$$e'^2 \cos^2 B' = \varepsilon'^2, \quad 1 + \varepsilon'^2 = Q' = \frac{N'}{R'}, \quad \frac{1}{N'} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + e'^2}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{Q'^3}{1 + e'^2}},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{N' R'}} = \frac{Q'}{a \sqrt{1 + e'^2}}.$$

Das Vergrößerungsverhältnis in p' sei m ; es kann, wenn es nicht schon bei der Berechnung der Koordinaten von p' mit erhalten ist, auch nach der Formel

$$\log \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} M \left(\frac{y'}{r'} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{y'}{r'} \right)^4 (1 - 2\varepsilon'^2) + G_6$$

berechnet werden.

Es wird gesetzt:

$$h_{1,1} = \frac{m_0}{m} \cos c', \quad h_{1,2} = \frac{m_0}{m} \sin c' \tag{41}$$

$$h_{2,1} = \frac{2\varepsilon'^2}{R'} \operatorname{tg} c' \operatorname{tg} l \cos B' + \frac{1}{R'} G_7 = \frac{2\varepsilon'^2}{N'} \operatorname{tg} B' \mathfrak{Zg} \frac{y'}{r'} \mathfrak{S} \operatorname{in} \frac{y'}{r'} + \frac{1}{r'} G_7$$

$$h_{2,2} = \frac{1}{R'} \operatorname{tg} c' + \frac{1}{R'} G_6 = \frac{1}{r'} \mathfrak{Zg} \frac{y'}{r'} \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon'^2 \left(\frac{y'}{r'} \right)^2 \right) + \frac{1}{r'} G_6$$

$$h_{3,1} = \frac{h_{1,2}^2}{R'^2} (1 - 3\varepsilon'^2) - h_{2,2}^2 (1 - 2\varepsilon'^2) + \frac{1}{R'^2} G_6 = \left(\frac{h_{1,2}^2}{r'^2} - h_{2,2}^2 \right) (1 - 2\varepsilon'^2) + \frac{1}{r'^2} G_6$$

$$h_{3,2} = \frac{h_{1,1} h_{1,2}}{R'^2} (1 + 3\varepsilon'^2) + \frac{1}{R'^2} G_5 = \frac{h_{1,1} h_{1,2}}{r'^2} (1 + 4\varepsilon'^2) + \frac{1}{r'^2} G_5$$

$$h_{4,1} = h_{2,2} h_{3,2} (5,8387 + 8\varepsilon'^2) + \frac{1}{R'^3} G_5 = -6 \frac{h_{1,1} h_{1,2} h_{2,2}}{r'^2} \left(1 - 4\varepsilon'^2 \left[\operatorname{tg}^2 B' - \frac{1}{3} \right] \right) + \frac{1}{r'^3} G_5$$

$$h_{4,2} = \frac{h_{2,2}^2}{R'^2} (0,9194 + 15\varepsilon'^2 - 6h_{1,2}^2) + \frac{1}{R'^3} G_5 = \frac{h_{2,2}^2}{r'^2} \left(1 - 6h_{1,2}^2 - 12\varepsilon'^2 \left[\operatorname{tg}^2 B' - \frac{1}{3} \right] \right) + \frac{1}{r'^3} G_5$$

$$h_{5,1} = 7 \frac{h_{3,1}}{R'^2} + \frac{1}{R'^4} G_4 = 7 \frac{h_{3,1}}{r'^2} + \frac{1}{r'^4} G_4$$

$$h_{5,2} = \frac{h_{3,2}}{R'^2} + \frac{1}{R'^4} G_3 = \frac{h_{3,2}}{r'^2} + \frac{1}{r'^4} G_3.$$

Hierbei ist:

$$\log \mathfrak{Zg} \frac{y'}{r'} = \log \frac{y'}{r'} - \frac{1}{3} M \left(\frac{y'}{r'} \right)^2 + \frac{7}{90} M \left(\frac{y'}{r'} \right)^4 - \dots$$

$$\log \mathfrak{S} \operatorname{in} \frac{y'}{r'} = \log \frac{y'}{r'} + \frac{1}{6} M \left(\frac{y'}{r'} \right)^2 - \frac{1}{180} M \left(\frac{y'}{r'} \right)^4 + \dots$$

Ist ferner

$$z' = x'_1 - x' + i(y'_1 - y') \quad (42)$$

und

$$z = x_1 + i y_1,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ ist, so wird der Übergang von $x'_1 - x'$, $y'_1 - y'$ zu den Koordinaten x_1 , y_1 der neuen Abbildung durch die Gleichung:

$$z = \frac{m_0}{m} e^{ic'} \left\{ z' + \frac{1}{2} (h_{2,1} + i h_{2,2}) z'^2 + \frac{1}{6} (h_{3,1} + i h_{3,2}) z'^3 + \frac{1}{24} (h_{4,1} + i h_{4,2}) z'^4 + \frac{1}{120} (h_{5,1} + i h_{5,2}) z'^5 + \dots \right\} \quad (43)$$

bewerkstelligt. e ist hierin die Basis der natürlichen Logarithmen.

Aus dieser Gleichung lassen sich verschiedene Formen herstellen.

Wird

$$\begin{aligned} h_{n,1} &= k_n \cos \omega_n & \omega_n + c' &= \omega_n & \frac{1}{n!} k_n \frac{m_0}{m} &= z_n \end{aligned} \quad (44)$$

gesetzt, und

$$x'_1 - x' = \Delta x' = g \cos t, \quad y'_1 - y' = \Delta y' = g \sin t, \quad (45)$$

so folgen aus (43) die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_0}{m} g \cos(c' + t) + g^2 z_2 \cos(\omega_2 + 2t) + g^3 z_3 \cos(\omega_3 + 3t) \\ &\quad + g^4 z_4 \cos(\omega_4 + 4t) + \dots \quad (46) \\ y_1 &= \frac{m_0}{m} g \sin(c' + t) + g^2 z_2 \sin(\omega_2 + 2t) + g^3 z_3 \sin(\omega_3 + 3t) \\ &\quad + g^4 z_4 \sin(\omega_4 + 4t) + \dots \end{aligned}$$

Die Berechnung der Konstanten aus (41) und (44), ebenso wie die von x' , y' , c' und $\frac{m_0}{m}$ gilt für alle Punkte, deren Koordinaten zu transformieren sind. Ist diese Rechnung einmal ausgeführt, so wird die Transformation der Koordinaten irgendeines Punktes bei der ersten Abbildung in die entsprechenden bei der zweiten Abbildung durch die Gleichungen (45) und (46) bewirkt.

Will man bei Kleinvermessungen mit 7-stelligen Logarithmen auskommen, so wird man in den beiden Gleichungen (46) das erste Glied wie folgt ersetzen. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{m} g \cos(c' + t) &= \Delta x' - (1 - h_{1,1}) \Delta x - h_{1,2} \Delta y' \\ \frac{m_0}{m} g \sin(c' + t) &= \Delta y' - (1 - h_{1,1}) \Delta y' + h_{1,2} \Delta x'. \end{aligned} \quad (47)$$

Man kann auch die folgenden Glieder in den Koordinatendifferenzen ausdrücken, doch ist dies für die Rechnung nicht vorteilhaft.

Die Umkehrung der Gleichungen (46) ergibt, wenn

$$\begin{aligned} y_1 + y' &= g' \sin l' \\ x_1 - x' &= g' \cos l' \end{aligned} \tag{48}$$

gesetzt wird:

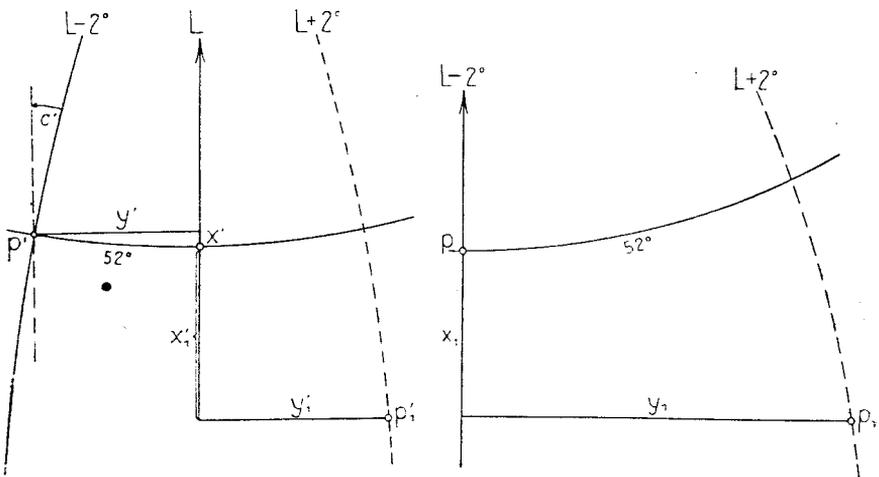
$$\begin{aligned} x_1 - x'_0 &= \frac{m_0}{m} g' \cos (l' - c') + z_2 g'^{1/2} \cos (2 l' - \omega_2) + z_3 g'^{3/2} \cos (3 l' - \omega_3) \\ &\quad + z_4 g'^2 \cos (4 l' - \omega_4) + \dots \\ y_1 - y'_0 &= \frac{m_0}{m} g' \sin (l' - c') + z_2 g'^{1/2} \sin (2 l' - \omega_2) + z_3 g'^{3/2} \sin (3 l' - \omega_3) \\ &\quad + z_4 g'^2 \sin (4 l' - \omega_4) + \dots \end{aligned} \tag{49}$$

Dabei ist x'_0 die lineare Länge des Meridianbogens vom Anfangspunkte der Abszissen der ersten Abbildung bis zur geogr. Breite des Punktes P ; x'_0 ist Null, wenn der Anfangspunkt der x', y' ebenfalls auf dem Breitenkreise durch P angenommen wird, wie dies bei der zweiten Abbildung geschehen ist.

Durch die Gleichungen (44), (48) und (49) kann man die Koordinaten der zweiten Abbildung in solche der ersten umwandeln.

§ 24. Beispiel. Die Formeln des vorhergehenden Paragraphen sollen jetzt dazu dienen, ein breiteres Gebiet, als z. B. in den Meridianstreifen von 3° Längenunterschied enthalten ist, auf ein einziges Koordinatensystem zu beziehen.

Es sei L die geogr. Länge des Hauptmeridians eines Meridianstreifens, der durch eine erste Abbildung in die Ebene übertragen ist. Der Anfangspunkt der ebenen Koordination x', y' soll zur geogr. Breite 52° gehören.



Ein anderer Meridianstreifen, der den ersten mit enthält, wird gleichfalls in der Ebene abgebildet; sein Hauptmeridian habe die geogr. Länge $L - 2^\circ$. Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten bei dieser zweiten Projektion, die ebenso wie vorher schon mit dem Verjüngungsfaktor reduziert gedacht sind, seien x, y . Der Anfangspunkt der Abszissen liege gleichfalls bei 52° . Die Annahme des Nullpunktes ist ganz ohne Belang, da man leicht zu einem anderen Anfang durch Addition oder Subtraktion des betreffenden Meridianbogens übergehen kann.

Einem Punkt P_i des Ellipsoids entspricht bei der ersten Abbildung der Punkt p'_i mit den ebenen Koordinaten x'_i, y'_i und bei der zweiten Abbildung der Punkt p_i mit x_i, y_i . Die Werte von x_i, y_i sind aus x'_i, y'_i herzuleiten.

Zur Aufstellung der Transformationsgleichungen sind zunächst in der ersten Abbildung für den Punkt p' , der zu dem Anfangspunkte des Koordinatensystems bei der zweiten Abbildung gehört, die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x', y' , die Konvergenz des Meridians c' und das Vergrößerungsverhältnis $\frac{m'}{m_2}$ zu berechnen. Für $B = 52^\circ$ und $l = -2^\circ$ ergibt sich nun nach § 3 oder § 5:

$$x' = + 1889,125 \text{ m}, \quad y' = - 137\,332,517 \text{ m}, \quad c' = - 1^\circ 57' 62,660,$$

$$\frac{m'}{m_2} \dots 0,000\,1005\,26.$$

Zum Endpunkte von x' gehört $B' = 52^\circ 01' 69,8$ und dazu $\frac{1}{\lambda'} \dots 3,195\,5581 - 10$,
 $\frac{1}{\lambda'} \dots 3,194\,454 - 10$, $\frac{1}{\rho'} \dots 3,195\,0062 - 10$. Mit diesen Werten findet man nach (41) die h :

$$\begin{array}{ll} h_{1,1} \dots 9,999\,7351 - 10 & - h_{1,2} \dots 8,439\,3516 - 10 \\ h_{2,1} \dots 7,674\,14 & - 20 \quad - h_{2,2} \dots 1,527\,7191 - 10 \\ h_{3,1} \dots 2,855\,38 & - 20 \quad h_{3,2} \dots 4,833\,50 - 20 \\ h_{4,1} \dots 7,129\,1 & - 30 \quad h_{4,2} \dots 7,898\,1 - 30 \\ - h_{5,1} \dots 0,091 & - 30 \quad - h_{5,2} \dots 1,224 - 30. \end{array}$$

Damit folgt nach (44):

$$\begin{array}{lll} \omega_2 = - 89^\circ 99' 19,73 & \omega_2 = - 91^\circ 56' 82,39 & z_2 \dots 1,226\,5886 - 10 \\ \omega_3 = + 89^\circ 39' 75 & \omega_3 = + 87^\circ 8' 212 & z_3 \dots 4,055\,27 - 20 \\ \omega_4 = + 80^\circ 34 & \omega_4 = + 78^\circ 76 & z_4 \dots 6,524\,0 - 30 \\ \omega_5 = - 94^\circ 2 & \omega_5 = - 95^\circ 8 & z_5 \dots 9,146 - 40. \end{array}$$

Diese Werte sind für alle Punkte der ersten Abbildung mit dem Hauptmeridian L , deren Koordinaten zu transformieren sind, zu benutzen.

Ein Punkt p'_i dieser Abbildung werde durch die, schon mit $\frac{1}{m_0}$ multiplizierten, ebenen rechtwinkligen Koordinaten

$$x_i = -276\,154,183 \text{ m} \quad y_i = +144\,850,893 \text{ m}$$

dargestellt.

Welches sind die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i des Punktes p_i , der bei der zweiten Abbildung mit dem Hauptmeridian $L - 2^\circ$ erhalten wird?

Nach (45) ist:

$$\begin{aligned} x_i &= -276\,154,183 & y_i &= +144\,850,893 \\ x' &= +1\,889,125 & y' &= -137\,332,517 \\ g \cos t = \Delta x' &= -278\,043,308 & g \sin t = \Delta y' &= +282\,183,410 \\ t &= 134^\circ 57' 65,892, & g &\dots 5,597\,8606\,78, \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} t + c' &= 133^\circ 00' 03,232, & 2t + \omega_2 &= 177^\circ 58' 49,4, & 3t + \omega_3 &= 131^\circ 55', \\ 4t + \omega_4 &= 257^\circ 07, & 5t + \omega_5 &= 217^\circ 1 \end{aligned}$$

wird. Die Transformationsgleichungen (46) geben alsdann:

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{m} g \cos(t+c') &= -270\,113,387 & \frac{m_0}{m} g \sin(t+c') &= +289\,657,870 \\ z_2 g^2 \cos(2t+\omega_2) &= -264,195 & z_2 g^2 \sin(2t+\omega_2) &= +11,143 \\ z_3 g^3 \cos(3t+\omega_3) &= -4,683 & z_3 g^3 \sin(3t+\omega_3) &= +5,284 \\ z_4 g^4 \cos(4t+\omega_4) &= -0,018 & z_4 g^4 \sin(4t+\omega_4) &= -0,080 \\ z_5 g^5 \cos(5t+\omega_5) &= -0,001 & z_5 g^5 \sin(5t+\omega_5) &= -0,001 \\ x_i &= -270\,382,284 \text{ m} & y_i &= +289\,674,216 \text{ m}. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle wurden x_i, y_i auch mit Hilfe der geographischen Koordinaten ermittelt. Zu x_i, y_i gehört $B = 49^\circ 5'$ und $L + 2^\circ$. Da bei der zweiten Abbildung der Hauptmeridian $L - 2^\circ$ ist, wird in bezug auf ihn $l = L + 2^\circ - (L - 2^\circ) = 4^\circ$. Mit $B = 49^\circ 5'$ und $l = +4^\circ$ wird nach den Gleichungen des § 2 erhalten (da der Anfangspunkt bei 52° ist):

$$x_i = -270\,382,285 \text{ m} \quad y_i = +289\,674,218 \text{ m}.$$

Damit in den Transformationsgleichungen g nicht zu groß wird, empfiehlt es sich, die Abszissen nicht viel größer als etwa $2^\circ 5'$ vom Nullpunkte zu nehmen. Ist also z. B. der Anfangspunkt wie vorher bei 52° angenommen, so wird man die obigen Transformationsgleichungen für die Punkte etwa zwischen den geographischen Breiten $49^\circ 5'$ und $54^\circ 5'$ anwenden. Für südwärts und nordwärts gelegene Punkte würde man besser neue Anfangspunkte bei 47° und 57° annehmen und zu diesen wie vorher die Werte (41) und (44) berechnen.

Es sollen nun rückwärts aus den Koordinaten x_I, y_I nach (48) und (49) die Koordinaten x'_I, y'_I , die sich bei der ersten Abbildung für den Punkt P_I ergaben, hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} x_I &= -270\,382,284 & y_I &= +289\,674,216 \\ -x'_I &= -1\,889,125 & +y'_I &= -137\,332,517 \\ g' \cos l' = x_I - x'_I &= -272\,271,409 & g' \sin l' = y_I + y'_I &= +152\,341,699 \\ l' &= 150^\circ 7720,501. & g' &= 5,494\,145\,031 \end{aligned}$$

Mit diesem Werte von l' und den auf S. 47 angegebenen Werten von c' und ω wird:

$$\begin{aligned} l' - c' &= 152^\circ 3483,161. & 2l' - \omega_2 &= 33^\circ 1123,4. & 3l' - \omega_3 &= 4^\circ 495. & 4l' - \omega_4 &= 164^\circ 33. \\ & & 5l' - \omega_5 &= 129^\circ 7. & & & & \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (49) folgt nun mit den Werten der z von S. 47:

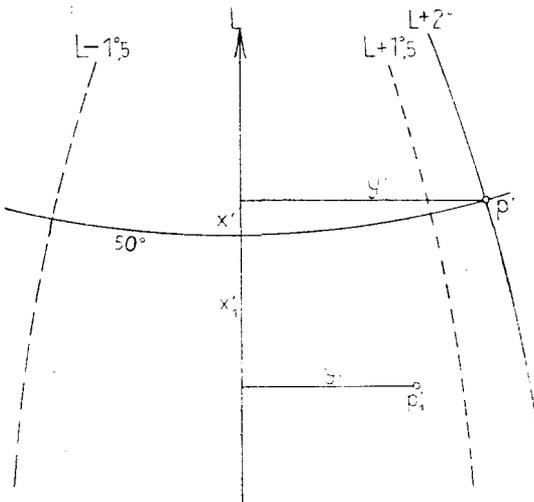
$$\begin{array}{ll} \frac{m_0}{m} g' \cos(l' - c') = -276\,294,967 & \frac{m_0}{m} g' \sin(l' - c') = +144\,761,018 \\ z_2 g'^2 \cos(2l' - \omega_2) = +862,622 & z_2 g'^2 \sin(2l' - \omega_2) = 89,597 \\ z_3 g'^3 \cos(3l' - \omega_3) = +6,562 & z_3 g'^3 \sin(3l' - \omega_3) = 0,270 \\ z_4 g'^4 \cos(4l' - \omega_4) = 0,031 & z_4 g'^4 \sin(4l' - \omega_4) = 0,009 \\ z_5 g'^5 \cos(5l' - \omega_5) = 0,000 & z_5 g'^5 \sin(5l' - \omega_5) = 0,000 \\ x'_I = -276\,154,182 \text{ m} & y'_I = +144\,850,894 \text{ m}. \end{array}$$

In dieser Weise kann man natürlich auch die Koordinaten anderer Punkte der zweiten Abbildung in solche der ersten Abbildung transformieren.

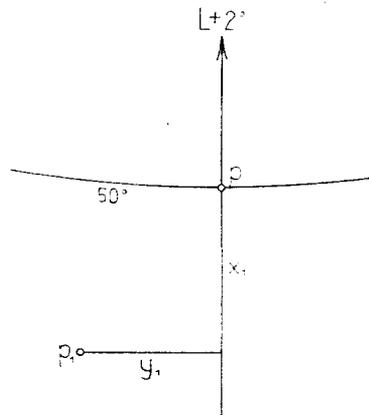
Beispiel. Ein Meridianstreifen, von den Meridianen $L - 1^\circ 5'$ und $L + 1^\circ 5'$ begrenzt, ist konform in der Ebene abgebildet. Der Bildpunkt p_i eines Punktes P_i hat die bereits mit dem Verjüngungsfaktor reduzierten ebenen rechtwinkligen Koordinaten

$$x_i = +445\,386,415 \text{ m} \quad , \quad y_i = +91\,452,608 \text{ m} \quad ,$$

wobei die Abszissen von $B_c = 45^\circ$ ab gezählt sind.



1. Abbildung.



2. Abbildung.

Der Punkt P_1 gehört auch einem Vermessungsgebiet an, dessen Koordinatenanfangspunkt dem Punkte P mit den geographischen Koordinaten $B=50^\circ$ und $L+2^\circ$ entspricht, und das ebenfalls durch konforme Abbildung in die Ebene übertragen werden soll. Welches sind bei dieser zweiten Abbildung die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1 ?

Um zunächst kleinere Werte der Abszissen x' zu erhalten, wird ihr Nullpunkt gleichfalls nach $B=50^\circ$ verlegt, so daß also jetzt

$$x'_1 = +445\,386,415 - (N_{50^\circ} - N_{45^\circ}) = -110\,453,862 \text{ m}$$

ist.

Nun sind für den Anfangspunkt P des zweiten Systems im ersten Koordinatensystem die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x', y' , die Konvergenz des Meridians c' und das Vergrößerungsverhältnis $\frac{m'}{m_0}$ zu berechnen. Nach (3) oder (6) findet man für

$$B = 50^\circ \text{ und } l = (L + 2^\circ) - L = +2^\circ:$$

$$x' = +1917,201 \text{ m}, \quad y' = +143\,369,001 \text{ m}, \quad c' = +1^\circ 53' 23,482''$$

$$\frac{m'}{m_0} \dots 0,0001\,0961.$$

Zum Endpunkte von x' gehören $B' = 50^\circ 01' 72,4''$ und $R' \dots 6,804\,2929$.

Damit wird nach (41) erhalten:

$$h_{1,1} \dots 9,999\,73506 - 10, \quad h_{1,2} \dots 6,78524 - 10, \quad h_{1,3} \dots 8,427\,0734 - 10;$$

$$h_{2,1} \dots 7,7182 - 20, \quad h_{2,2} \dots 1,546\,594 - 10; \quad h_{3,1} \dots 2,7110 - 20,$$

$$-h_{3,2} \dots 4,8171 - 20; \quad h_{4,1} \dots 7,142 - 30, \quad -h_{4,2} \dots 7,937 - 30,$$

und weiter nach (44):

$$\omega_2 = +89^\circ 99' 15'' \quad \omega_2 = +91^\circ 52' 38'' \quad z_2 \dots 1,245\,454 - 10$$

$$\omega_3 = -89,55 \quad \omega_3 = -88,02 \quad z_3 \dots 4,0389 - 20$$

$$\omega_4 = -80,9 \quad \omega_4 = -79,4 \quad z_4 \dots 6,55 - 30.$$

Diese Werte sind für alle zu transformierenden Punkte anzuwenden.

Zur Umwandlung der Koordinaten x'_i, y'_i in x_i, y_i ergibt sich nun nach (45) und (46) mit (47):

$$x'_1 = -110\,453,862 \quad y'_1 = +91\,452,608$$

$$x' = +1917,201 \quad y' = +143\,369,001$$

$$g \cos t = \Delta x' = -112\,371,063 \quad g \sin t = \Delta y' = -51\,916,393$$

$$t = 204^\circ 79' 73,4'' \quad g \dots 5,092\,6658;$$

$$2t + \omega_2 = 141^\circ 11' 85'', \quad 3t + \omega_3 = 166^\circ 37'', \quad 4t + \omega_4 = 19^\circ 8''.$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x' &= -112\,371,063 & \Delta y' &= -51\,916,393 \\
 -(1 - h_{1,1}) \Delta x' &= +68,532 & -(1 - h_{1,1}) \Delta y' &= +31,662 \\
 -h_{1,2} \Delta y' &= +1\,387,963 & +h_{1,2} \Delta x' &= -3\,004,194 \\
 z_2 g^2 \cos(2t + \omega_2) &= -20,991 & z_2 g^2 \sin(2t + \omega_2) &= +16,926 \\
 z_3 g^3 \cos(3t + \omega_3) &= -0,202 & z_3 g^3 \sin(3t + \omega_3) &= -0,049 \\
 z_4 g^4 \cos(4t + \omega_4) &= +0,001 & z_4 g^4 \sin(4t + \omega_4) &= +0,000 \\
 x_1 &= -110\,935,760 \text{ m} & y_1 &= -54\,871,950 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle wurden x_1, y_1 auch durch Vermittlung geographischer Koordinaten hergeleitet. Zu x_1, y_1 gehören $B_1 = 49^\circ$ und $L + 1^\circ 25'$. Bezieht man den letzteren Wert auf den Hauptmeridian der zweiten Abbildung, so wird $l_1 = L + 1^\circ 25' - (L + 2^\circ)$. Aus $B_1 = 49^\circ$ und $l_1 = -0^\circ 75'$ folgt aber, $B = 50^\circ$ als Anfangspunkt der Abszissen vorausgesetzt:

$$x_1 = -110\,935,760 \text{ m} \qquad y_1 = -54\,871,949 \text{ m.}$$

Sollen umgekehrt die Koordinaten der Spezialvermessung in solche des Meridianstreifens transformiert werden, so sind die Gleichungen (48) und (49) anzuwenden.

Umwandlung rechtwinkliger sphäroidischer Koordinaten in ebene rechtwinklige konforme Koordinaten. § 26.
Wenn eine Spezialvermessung auf rechtwinklige sphäroidische (SOLDNER'sche) Koordinaten bezogen ist, und diese in das durch Abbildung eines Meridianstreifens erhaltene ebene Koordinatensystem eingeschaltet werden sollen, so müssen die sphäroidischen Koordinaten zunächst in konforme verwandelt werden.

Zwischen den rechtwinkligen sphäroidischen Koordinaten ξ, η und den ebenen konformen Koordinaten x', y' , die denselben Meridian als Hauptmeridian und denselben Anfangspunkt besitzen, bestehen die Gleichungen: *)

$$\begin{aligned}
 x' - \xi &= \frac{e'^2}{12} \sin 2B' \cdot \eta \left(\frac{\eta}{r'} \right)^3 + r' G_7 \\
 y' &= \eta \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\eta}{r'} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\eta}{r'} \right)^4 \right\} + r' G_7
 \end{aligned} \tag{50}$$

oder

$$\log y' = \log \eta + \frac{M}{6} \left(\frac{\eta}{r'} \right)^2 + \frac{M}{36} \left(\frac{\eta}{r'} \right)^4 + G_6,$$

worin B' und r' zum Endpunkte von ξ gehören.

*) L. KRÜGER, Transformation der Koordinaten bei der konformen Doppelprojektion des Erdellipsoids auf die Kugel und die Ebene. Potsdam, Druck und Verlag von B. G. TEUBNER in Leipzig, 1914. S. 36.

Für $r_i = 123$ km bleibt $x' = \xi$ und ebenso der Einfluß von $\frac{M}{36} \left(\frac{r_i}{r'}\right)^4$ auf y' noch kleiner als 0,0005 m. Für Kleinvermessungen reicht es daher aus,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \xi \\ \log y' &= \log r_i + \frac{M}{6} \left(\frac{r_i}{r'}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

zu setzen, wo r' auch zu irgendeinem B' genommen werden kann, das einem Abszissenwerte zwischen 0 und ξ , z. B. $\frac{\xi}{2}$, entspricht.

Die Umwandlung in die konformen Koordinaten, die zu einem anderen Hauptmeridian gehören, kann nun weiter mittels der Transformationsgleichungen erfolgen, wie vorher angegeben ist.

Es können dazu aber auch die Entfernungs- und Richtungsreduktionen der geodätischen Linie benutzt werden.

Der Anfangspunkt der ebenen rechtwinkligen konformen Koordinaten der Spezialvermessung sei der Bildpunkt p' des Punktes P , so daß also der durch P gehende Meridian L der Hauptmeridian des Vermessungsgebietes ist. Von dem Bildpunkte p'_i eines Punktes P_i des Gebietes sind die ebenen Koordinaten x'_i, y'_i bekannt. Sie sollen in die Koordinaten x_i, y_i transformiert werden, für die der Hauptmeridian die geogr. Länge $L + l$ besitzt.

Man stellt im ersten Koordinatensystem, vgl. § 16 und § 21, aus x'_i, y'_i die lineare Länge s und das Anfangsazimut a der geodätischen Linie $P P_i$ her.

Darauf berechnet man im zweiten Koordinatensystem aus den geographischen Koordinaten $B, -l$ von P die ebenen Koordinaten x, y und die Konvergenz des Meridians c . Aus ihnen und den Werten für die geodätische Linie $P P_i$ werden dann, vgl. § 15 und § 20, die Differenzen der Koordinaten von P_i und P im zweiten Koordinatensystem erhalten.

Hiernach kann die Umwandlung der rechtwinkligen sphäroidischen Koordinaten ξ_i, r_i , die auf den Meridian mit der Länge L bezogen sind, in die ebenen rechtwinkligen konformen Koordinaten x_i, y_i , deren Abszissenachse dem Hauptmeridian $L + l$ entspricht, indem man zu den Gleichungen (30), (35) und (36), (38) die Gl. (51) hinzuzieht, durch die folgenden Formeln ausgeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} \log(d' \cos \vartheta') &= \log \xi_1 \\ \log(d' \sin \vartheta') &= \log \eta_1 + \frac{M}{6} \frac{\eta_1^2}{r'^2} & \psi'_{\text{Sök.}} &= -\frac{\vartheta''}{6} \frac{d'^2}{r'^2} \cos \vartheta' \sin \vartheta' \\ \log s &= \log d' - \frac{M}{6} \frac{\eta_1^2}{r'^2}; & \alpha &= \vartheta' + \psi'. \end{aligned} \right\} (52)$$

r' ist der mittlere Krümmungsradius in der geogr. Breite, die zu $\frac{1}{2} \xi_1$ gehört.

Es seien nun x, y und c die ebenen rechtwinkligen Koordinaten und die Konvergenz des Meridians für P . Dann ist:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \alpha - c - \psi \\ x_1 - x &= d \cos \vartheta & \log d &= \log s + \frac{M}{8} \frac{(y_1 + y)^2}{r'^2} + \frac{M}{24} \frac{(y_1 - y)^2}{r'^2} \\ y_1 - y &= d \sin \vartheta; & \psi_{\text{Sök.}} &= \frac{\vartheta''}{6} \frac{(x_1 - x)(y_1 + 2y)}{r'^2} \\ & & &= \frac{\vartheta''}{4} \frac{(x_1 - x)(y_1 + y - \frac{1}{3}(y_1 - y))}{r'^2}. \end{aligned} \right\} (53)$$

In der Gl. (53) ist r' mit $\frac{1}{2}(x + x_1)$ zu entnehmen; doch reicht es meistens aus, bei dem vorher in (52) benutzten Werte von r' stehen zu bleiben. Angenähert ist $\frac{1}{2}(x + x_1) = \frac{1}{2} \xi_1 + \frac{1}{2} \eta_1 \frac{c}{\varrho} + x$.

Bei den Gl. (53) müssen zunächst Näherungswerte für x_1, y_1 angewendet werden; solche ergeben sich, indem man $d = s$ und $\vartheta = \alpha - c$ setzt. In vielen Fällen sind die damit erhaltenen Werte von x_1, y_1 zur Berechnung von d und ψ schon ausreichend.

Die Berechnung von x, y und c für den Punkt P in bezug auf den Meridian $L + l$ braucht nur einmal ausgeführt zu werden; sie gilt für alle zu transformierende Koordinaten.

Die in $\log d$ und in ψ vernachlässigten Glieder sind in § 18 und § 19 angegeben; vgl. auch weiterhin § 28.

Beispiel. Der Anfangspunkt P einer Kleinvermessung habe die geographischen Koordinaten $B = 51^\circ$ und L . Ein Punkt P_1 dieser Vermessung ist durch die rechtwinkligen sphäroidischen Koordinaten § 27.

$$\xi_1 = -80\,000 \text{ m} \quad \eta_1 = -60\,000 \text{ m}$$

bestimmt.

ξ_1, η_1 sind in die ebenen konformen Koordinaten x_1, y_1 zu transformieren, deren Abszissenachse dem Hauptmeridian $L - 1^\circ 25'$ entspricht.

I. Zu dem elliptischen Bogen $\frac{\xi_1}{2} = -40\ 000$ m, der bei 51° beginnt, gehört $B' = 50^\circ 64$ und hierzu $1:r' \dots 3,195\ 074 - 10$. Nach (52) findet man die lineare Länge s und das Anfangsazimut α der geodätischen Linie PP_1 durch folgende Rechnung:

$ \begin{aligned} & \eta_1 \dots 4,778\ 1512\ 5_n \\ M \eta_1^2 : 6r'^2 &= 64\ 0 \\ & d' \sin \theta' \dots 4,778\ 1576\ 5_n \\ \xi_1 = d' \cos \theta' \dots & 4,903\ 0899\ 9_n \\ & \operatorname{tg} \theta' \dots 9,875\ 0676\ 6 \\ & \theta' = 216^\circ 8703,026 \\ & \psi' = \dots 11,256 \\ & \alpha = 216^\circ 8714,282 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} M: & 6 \dots 8,8596 \\ \eta_1^2 \dots & 9,5563 \\ 1:r' \dots & 6,3901 \\ & 4,8060 \\ & d' \dots 5,000\ 0023\ 1 \\ -M \eta_1^2 : 6r'^2 &= \dots \times 36\ 0 \\ s \dots & 4,999\ 9959\ 1 \\ & q'' : 6 \dots 4,979\ 97 \\ d'^2 \sin \theta' \cos \theta' \dots & 9,681\ 25 \\ 1:r'^2 \dots & 6,390\ 15 \\ & \psi' \dots 1,051\ 37 \end{aligned} $
--	---

Es sind nun zunächst die ebenen konformen Koordinaten von P in bezug auf den Meridian $L - 1^\circ 25$ zu berechnen. Der Anfangspunkt der Abszissen wird wie vorher bei $B = 51^\circ$ angenommen. Für $B = 51^\circ$ und $l = +1^\circ 25$ ergibt sich nach (7) oder (8):

$$x = +743,813 \text{ m}, \quad y = +87\ 734,946 \text{ m}, \quad c = +0^\circ 9714,940.$$

Aus diesen Werten und den Werten für s und α sind x_1, y_1 nach (53) herzuleiten.

Benutzt man zur Berechnung von x_1, y_1 bei $\log \frac{d}{s}$ und bei ψ' die Näherungswerte $x_1 - x = s \cos(\alpha - c) = -81\ 004$, $y_1 - y = s \sin(\alpha - c) = -58\ 637$, so ergibt sich, da $\log r'$, dem Werte $x + \frac{1}{2}(x_1 - x) = -39\ 758$ entsprechend, wie vorher beibehalten werden kann,

$ \begin{aligned} s \dots & 4,999\ 9959\ 1 \\ M(y_1 + y)^2 : 8r'^2 &= \dots 182\ 0 \\ M(y_1 - y)^2 : 24r'^2 &= \dots 15\ 3 \\ & d \dots 5,000\ 0156\ 4 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \alpha - c &= 215^\circ 8999,342 \\ -\psi &= \dots 38,857 \\ \theta &= 215^\circ 9038,199. \end{aligned} $
---	--

Wiederholt man die Rechnung, so wird erhalten:

$ \begin{aligned} s \dots & 4,999\ 9959\ 1 \\ M(y_1 + y)^2 : 8r'^2 &= \dots 181\ 9 \\ M(y_1 - y)^2 : 24r'^2 &= \dots 15\ 3 \\ & d \dots 5,000\ 0156\ 3 \\ \cos \theta \dots & 9,90\ 4863\ 8 \\ \sin \theta \dots & 9,768\ 2134\ 8_n \\ x_1 - x \dots & 4,908\ 5020\ 1_n \\ y_1 - y \dots & 4,768\ 2291\ 1_n \\ x_1 - x &= -81\ 003,170 \quad y_1 - y = -586\ 44,745 \\ x &= \dots 743,813 \quad y = \dots 877\ 34,946 \\ x_1 &= \dots 80\ 259,357 \text{ m} \quad y_1 = \dots 290\ 90,201 \text{ m} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} M: & 8 \dots 8,734\ 69 - 10 \\ (y_1 + y)^2 \dots & 10,135\ 08 \\ 1:r'^2 \dots & 6,390\ 15 - 20 \\ & 5,259\ 92 \\ M: & 24 \dots 8,2576 \\ (y_1 - y)^2 \dots & 9,5365 \\ 1:r'^2 \dots & 6,3901 \\ & 4,1842 \\ & q'' : 6 \dots 4,979\ 97 \\ x_1 - x \dots & 4,908\ 50_n \\ 2y + y_1 \dots & 5,310\ 82 \\ 1:r'^2 \dots & 6,390\ 15 \\ & \dots 1,589\ 44_n \end{aligned} $
---	---

Die folgenden Glieder mit

$$h_{4,1} \dots 6,725 - 30, \quad h_{4,2} \dots 7,706 - 30; \quad \alpha_4 \dots 6,328 - 30, \quad \omega_4 \dots = 83^\circ 1$$

haben hier keinen Einfluß mehr.

Zur Umwandlung von x'_i, y'_i in x_i, y_i ist nun folgende Rechnung auszuführen:

$$\begin{array}{rcl} y'_1 = -60\,000,884 & x'_1 = -80\,000,000 & \\ y' = -87\,734,946 & x' = +743,813 & \\ \Delta y' = y'_1 - y' = +27\,734,062 & \Delta x' = x'_1 - x' = -80\,743,813 & \\ \\ \Delta y' = g \sin t \dots 4,443\,013 & \sin t \dots 9,511\,687 & 2t = 322^\circ 0866 & 3t = 123^\circ 13 \\ \Delta x' = g \cos t \dots 4,907\,109_n & \cos t \dots 9,975\,783_n & \alpha_2 = -90\,9663 & \alpha_3 = -88\,70 \\ & & 2t + \alpha_2 = 231^\circ 1203 & 3t + \alpha_3 = 211^\circ 83 \\ & & & t = 161^\circ 0433 \\ \\ 1 - h_{1,1} \dots 6,377\,00 & h_{1,2} \dots 8,229\,2556_n & g^2 \dots 9,862\,65 & g^3 \dots 14,794 \\ \Delta x' \dots 4,907\,11_n & \Delta x' \dots 4,907\,1093_n & z_2 \dots 1,032\,19 - 10 & z_3 \dots 3,846 - 20 \\ \Delta y' \dots 4,443\,01 & \Delta y' \dots 4,443\,0135 & 0,894\,84 & 8,640 - 10 \\ 1,284\,11_n & 3,136\,3649 & \cos(2t + \omega_2) \dots 9,797\,74_n & \cos(3t + \omega_3) \dots 9,929_n \\ 0,820\,01 & 2,672\,2691_n & \sin(2t + \omega_2) \dots 9,891\,24_n & \sin(3t + \omega_3) \dots 9,722_n \\ & & 0,692\,58_n & 8,569_n \\ & & 0,786\,08_n & 8,362_n \\ \\ \Delta x' = -80\,743,813 & & \Delta y' = +277\,34,062 & \\ -(1 - h_{1,1}) \Delta x' = - & 19,236 & -(1 - h_{1,1}) \Delta y' = - & 6,607 \\ -h_{1,2} \Delta y' = + & 470,185 & +h_{1,2} \Delta x' = + & 13\,68,879 \\ +x_2 g^2 \cos(2t + \omega_2) = - & 4,927 & +z_2 g^2 \sin(2t + \omega_2) = - & 6,110 \\ +z_3 g^3 \cos(3t + \omega_3) = - & 0,037 & +z_3 g^3 \sin(3t + \omega_3) = - & 0,023 \\ x_1 = -80\,259,356\text{ m} & & y_1 = +290\,90,201\text{ m} & \end{array}$$

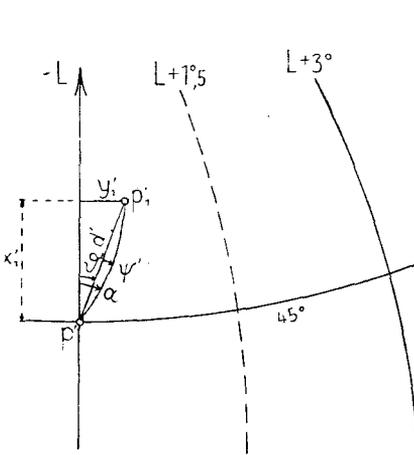
Die Zählung der Abszissen beginnt wie vorher angegeben bei 51° ; soll zu einem anderen Anfangspunkt mit der geographischen Breite B übergegangen werden, so ist der Meridianbogen $X_{51^\circ} - X_B$ hinzuzufügen.

§ 28. Transformation konformer Koordinaten mittels der Entfernungs- und Richtungsreduktionen. Der Rechnungsgang ist bereits in § 26 angegeben; er soll aber jetzt an einem Beispiel erläutert werden, bei dem x_i, y_i sehr groß werden.

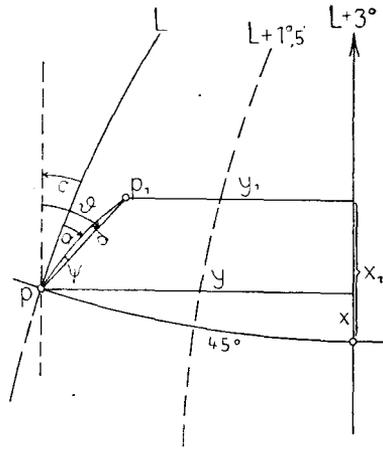
In einem ebenen Koordinatensystem, dessen Abszissenachse dem Hauptmeridian mit der geographischen Länge L entspricht, und dessen Anfangspunkt der Bildpunkt p' von P in der geographischen Breite 45° ist, sind die Koordinaten des Bildpunktes p'_i von P_i :

$$x'_i = +166\,822,558\text{ m} \quad y'_i = +38\,376,617\text{ m.}$$

Sie sollen auf das ebene Koordinatensystem des benachbarten Meridianstreifens mit dem Hauptmeridian $L + 3^\circ$ bezogen werden.



1. Abbildung.



2. Abbildung.

Die Herleitung der linearen Länge s und des Anfangszazimutes α der geodätischen Linie $P P_1$ erfolgt nach den Formeln:

$$d' \cos \vartheta' = x'_1 \quad \log s = \log d' - \frac{M}{6 r'^2} y_1'^2; \quad \psi' = \frac{\varrho''}{2 r'^2} x'_1 y_1', \quad \alpha = \vartheta' + \psi'. \tag{54}$$

$$d' \sin \vartheta' = y'_1 \quad r' \text{ gehört zu dem Meridianbogen } \frac{x'_1}{2}, \text{ vom Anfangspunkte an gerechnet.}$$

Zu $x'_1 = + 83\,411 \text{ m}$, von 45° an gezählt, wird $B' = 45^\circ 75'$ und dazu $r' \dots 3,195\,321 - 10$ erhalten. Mit den Werten von x'_1, y'_1 ergibt sich nun nach (54):

$$\begin{array}{rcl} d' \dots 5,233\,4525\,64 & \vartheta' = 12^\circ 9551,877 & \\ - M y_1'^2 : 6 r'^2 = - \frac{26\,20}{\dots} & + \psi' = + 15,029 & \\ s \dots 5,233\,4499\,44 & \alpha = 12^\circ 9566,906. & \end{array}$$

Der Anfangspunkt des ebenen Koordinatensystems bei der zweiten Abbildung, mit $L + 3^\circ$ als Hauptmeridian, werde ebenfalls bei 45° der Breite angenommen. Alsdann sind zunächst wieder die ebenen konformen Koordinaten des Anfangspunktes ($B = 45^\circ, L$) der ersten Abbildung, dessen Bildpunkt jetzt p ist, zu berechnen. Zu $B = 45^\circ$ und $l = L - (L + 3^\circ) = - 3^\circ$ findet man nach (2) oder nach (6):

$$x = + 4380,327 \text{ m}, \quad y = - 236\,512,017 \text{ m}, \quad c = - 2\,1222,997.$$

Mittels dieser Werte und der vorher gefundenen Werte von s und α sind jetzt nach § 17—19 die ebenen Koordinaten x_1, y_1 des Bildpunktes P_1 von P_1 herzuleiten. Dazu dienen die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x &= d \cos \vartheta & x_1 - x &= r', & y_1 - y &= \eta, & \frac{y_1 + y}{2} &= v \\ y_1 - y &= d \sin \vartheta & \log d &= \log s + \frac{M}{2} r^2 \left(1 - \frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{12} (r^2 - 2\eta)^2 \right) + \frac{M}{24} \eta^2 \\ & & & & & & & - \frac{M}{6} e'^2 \sin 2B' \cdot r \eta \\ \vartheta &= \alpha - c - \psi \\ \psi &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 &= \frac{e''}{2} r \xi \left(1 - \frac{1}{3} r^2 (1 - 2e'^2 \cos^2 B') + \frac{1}{12} \xi^2 \right) \\ & \quad + \frac{e''}{2} e'^2 \sin 2B' \cdot \eta \left(r^2 - \frac{1}{6} \xi^2 + \frac{1}{12} \eta^2 \right) \\ \varphi_2 &= \frac{e''}{12} \xi \eta - \frac{e''}{6} e'^2 \sin 2B' \cdot r (r^2 - \eta^2). \end{aligned} \right\} (55)$$

B' und r' gehören in den Formeln zu $\frac{1}{2}(x_1 + x)$, vom Anfangspunkt dieser Abbildung an gezählt. Wenn bei beiden Abbildungen der Anfangspunkt auf demselben Parallelkreise liegt, so ist der Wert von r' , der sich für x_1 ergeben hat, nur wenig von dem hier zu benutzenden Werte für $\frac{1}{2}(x_1 + x)$ verschieden.

In erster Annäherung ist:

$$\begin{aligned} x_1 - x &= s \cos(\alpha - c) \dots 5,218\,23, & y_1 - y &= s \sin(\alpha - c) \dots 4,648\,68, \\ & & \frac{1}{2}(y_1 + y) &\dots 5,330\,91_n; \end{aligned}$$

damit und mit dem vorher angegebenen Werte $r' \dots 3,195\,32 - 10$ wird

$$\xi \dots 8,41355, \quad \eta \dots 7,84400, \quad v \dots 8,52623_n,$$

und weiter:

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{l} s \dots 5,233\,4499 \\ \frac{M}{2} r^2 = + \quad 2450 \\ \frac{M}{24} \eta^2 = + \quad 9 \\ d \dots 5,233\,6958 \end{array} & \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{e''}{2} r \xi = -249,4 \\ \varphi_2 = \frac{e''}{12} \xi \eta = + \quad 8,6 \\ \psi = -258,0 \end{array} & \begin{array}{l} \alpha = 12^\circ 95' 66,9 \\ -c = + \quad 2 \quad 12\,23,0 \\ \psi = + \quad \quad \quad 2\,58,0 \\ \vartheta = 15^\circ 10' 47,9. \end{array} \end{array}$$

In zweiter Annäherung wird mit den vorstehenden Werten von d und ϑ :

$$x_1 - x \dots 5,218\,4260, \quad y_1 - y \dots 4,649\,646, \quad y + \frac{1}{2}(y_1 - y) \dots 5,330\,8115_n.$$

Dem Meridianbogen $x + \frac{1}{2}(x_1 - x) = + 87059$ -m entspricht $B' = 45^\circ 7834$ und $v : v' \dots 3, 195 3192 - 10$; es ist also jetzt:

$$\xi \dots 8, 413 7452 \quad \eta \dots 7, 844 965 \quad v \dots 8, 526 1307_n$$

Nach (55) wird nun:

$\frac{M}{2} \xi^2$	$= 2449 15$	$\frac{q''}{2} \xi^2$	$= - 249, 442$
$\frac{1}{6} \xi^2$	$= \times 54$	$\frac{1}{3} \xi^2$	$= \times 06$
$\frac{1}{12} (\xi^2 - 2\eta^2)$	$= 12$	$\frac{1}{12} \xi^2$	$= 14$
$\frac{M}{24} \eta^2$	$= 886$	$\frac{q''}{2} \xi^2 \sin 2B' \cdot \eta \cdot v^2$	$= \times 85$
$\frac{M}{6} \xi^2 \sin 2B' \cdot v \xi \eta$	$= 3$	$\frac{1}{12} (2\xi^2 - \eta^2)$	$= 1$
$d \dots 5, 233 4499 44$		φ_1	$= - 249, 349$
$a = 12^\circ 9566, 906$		$\frac{q''}{12} \xi \eta$	$= + 8, 663$
$c = + 2 1222, 997$		$\frac{q''}{6} \xi^2 \sin 2B' \cdot v (\xi^2 - \eta^2)$	$= 13$
$\psi = + 258, 025$		φ_2	$= - 8, 676$
$\vartheta = 15^\circ 1047, 928$			

Mit diesen Werten von d und ϑ ändern sich ξ, η, v , soweit sie hier gebraucht werden, nicht mehr; sie können also zur endgültigen Berechnung von $x_1 - x$ und $y_1 - y$ dienen. Diese ergibt:

$$d \cos \vartheta = x_1 - x = + 165 358, 254 \quad d \sin \vartheta = y_1 - y = + 44 631, 920$$

dazu $x = + 4 380, 327$ $y = - 236 512, 017$

folglich $x_1 = + 169 738, 581$ m $y_1 = - 191 880, 097$ m.

Dabei entspricht dem Anfangspunkt der Abszissen die geographische Breite $B = 45^\circ$.

Die Werte von x_1, y_1 sind zur Kontrolle auch mit Hilfe der geographischen Koordinaten ermittelt worden. Zu $x'_1 = + 166 822, 558$ m und $y'_1 = + 38 376, 617$ m, wobei der Anfangspunkt der x' die geographische Breite 45° besitzt, findet man nach (14): $B_1 = 46^\circ 5$ und $l_1 = + 0^\circ 5$. Berechnet man dann weiter zu $B = 46^\circ 5$ und $l = l_1 + 0^\circ 5 - (l_1 + 3^\circ) = - 2^\circ 5$ nach (3) oder (6) die ebenen rechtwinkligen Koordinaten, so findet man:

$$x_1 - X_{40,5} = + 3 037, 487$$

$$X_{46,5} - X_{45} = + 166 701, 093$$

$$x_1 = + 169 738, 580 \text{ m} \quad y_1 = - 191 880, 096 \text{ m.}$$

Bei einer größeren Anzahl von Punkten, deren Koordinaten zu transformieren sind, ist es vorzuziehen, besonders wenn wie hier die Entfernung der beiden Hauptmeridiane groß ist, die Transformationsgleichungen des § 23 aufzustellen.

Herleitung einiger Werte für m_0 .

§ 29. Durch die Einführung von m_0 wird nur eine Änderung des Maßstabes des Bildes bewirkt, die Form des Bildes bleibt ungeändert. m_0 soll dazu dienen, die Vergrößerung unter einer bestimmten Grenze zu halten. Der Bequemlichkeit der Rechnung wegen, wird man für m_0 einen abgerundeten Wert annehmen.

Sind B und l die geographischen Koordinaten, l vom Hauptmeridian an gerechnet, so ist, wenn $\frac{l}{\rho} \cos B = l'$ gesetzt wird:

$$m = 1 + \frac{1}{2} Q l'^2 \left(1 + \frac{1}{12} [5 - 4 \sin^2 B] l'^2 \right) + Gl_6. \quad Q = 1 + e'^2 \cos^2 B. \quad (56)$$

m_0 ist der Wert des Vergrößerungsverhältnisses auf der Abszissenachse.

Für $B = 30^\circ$ ist	$\frac{m}{m_0} - 1 =$	0,000 258
= 35	"	= 231
= 40	"	= 202
= 45	»	= 172
= 50	»	= 142
= 55	"	= 113
= 60	»	= 86

Im folgenden sind einige Annahmen gemacht worden, durch die man Werte für m_0 erhalten kann.

Es sei m_* der Wert des Vergrößerungsverhältnisses auf dem Grenzmeridian l_* des abzubildenden Streifens in der Breite B .

I. Setzt man fest, daß zwischen m_0 und m_* die Beziehung

$$1 - m = m_* - 1$$

bestehen soll, so ist:

$$m_* = 2 - m_0 = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} Q l_*'^2 + Gl_* \right),$$

$$\text{folglich } m_0 = 1 - \frac{1}{4} Q l_*'^2 + Gl_* \quad (57)$$

$$\text{und } m_0 = 1 + \frac{1}{4} Q l_*'^2 + Gl_*.$$

m ist mit B veränderlich. Man wird einen Mittelwert für B_0 innerhalb des Meridianstreifens, der von der Breite B_1 bis zur Breite B_2 reicht, erhalten, indem man bildet:

$$m_0(B_2 - B_1) = \int_{B_1}^{B_2} \left(1 - \frac{1}{4 Q^2} (1 + e'^2 \cos^2 B) l_*'^2 \cos^2 B \right) dB;$$

das gibt:

$$m_c = 1 - \frac{l_*^2}{8q^2} \left(1 + \frac{3}{4} e'^2 \right) - \frac{l_*^2}{8q(B_2 - B_1)} \left\{ (1 + e'^2) \cos(B_2 + B_1) \sin(B_2 - B_1) \right. \\ \left. + \frac{e'^2}{8} \cos 2(B_2 + B_1) \sin 2(B_2 - B_1) \right\} + Gl_4. \quad (58)$$

Dieser Wert ist nur wenig von demjenigen m_s verschieden, das sich nach (57) für $\frac{1}{2}(B_2 + B_1)$ ergibt. Es wird nämlich

$$m_c = 1 - \frac{l_*^2}{4q^2} \left(1 + e'^2 \cos^2 \frac{B_2 + B_1}{2} \right) \cos^2 \frac{B_2 + B_1}{2} + Gl_4, \quad (59)$$

folglich ist:

$$m_s - m_o = \frac{1}{48q^4} l_*^2 (B_2 - B_1)^2 \left\{ (1 + e'^2) \cos(B_1 + B_2) + e'^2 \cos 2(B_1 + B_2) \right\} + Gl_6.$$

l_* und $B_2 - B_1$ sind in Graden vorausgesetzt.

Für $B_2 = 57^\circ$ und $B_1 = 47^\circ$, ferner $l_* = 1^{\circ}5$ wird nach (58) $1 - m_c = 0,000065$, dasselbe gibt auch (59). Nach der letzten Gleichung ist $m - m_o = -0,0000001$.

Für $B_2 = 60^\circ$, $B_1 = 30^\circ$ und $l_* = 1^{\circ}5$ ergibt sich nach (58) und (59): $1 - m_o = 0,000086$; hier wird $m_s - m_o = 0,00000003$,

II. Ein anderer Wert für m_o wird wie folgt erhalten:

Ist dF ein Flächenelement des Ellipsoids und df sein Bild in der Ebene, so ist $df = m^2 dF$, also $df - dF = (m^2 - 1)dF$ die Änderung des Bildes gegen das Urbild.

Für die abzubildenden Streifen von 3° Längenunterschied genügt es, überall $\frac{m}{m_o} = 1 + \frac{1}{2} Q \cos^2 B \cdot l^2$ zu setzen. Wird

$$m_o = 1 - \mu l^2, \quad (60)$$

angenommen, so ist: $m = 1 + \frac{1}{2} Q \cos^2 B \cdot l^2 - \mu l^2$, wobei l in Bogenmaß vorausgesetzt ist.

$m^2 - 1$ kann positiv oder negativ sein; man kann $m^2 - 1$ auch als Fehler des Bildes ansehen. Unter dieser Voraussetzung wird der

günstigste Wert von μ dadurch bestimmt, daß für ihn $\int (m^2 - 1)^2 dF = \text{Minimum}$ wird. Da $\frac{\partial m^2}{\partial \mu} = -2l_*^2(1 + Gl_2)$ ist, so wird das in erster Annäherung, so weit als der vorher angenommene Wert von m gilt, für

$$\int (m^2 - 1) dF = 0$$

stattfinden, d. h. wenn die Änderung der Abbildung gleich Null ist, die Fläche des Bildes also mit der Fläche des abgebildeten Meridianstreifens übereinstimmt. Für den Meridianstreifen vom Hauptmeridian bis zum Grenzmeridian l_* und vom Parallelkreise in der Breite B_1 bis zum Parallelkreise in der Breite B_2 , ist bei der angegebenen Vernachlässigung mithin:

$$\int_{B_1}^{B_2} RN \cos B dB \int_0^{l_*} (Q \cos^2 B \cdot l^2 - 2\mu l_*^2 + Gl_4) dl = 0.$$

Hieraus wird erhalten:

$$\mu = \frac{1}{12} (Q_2 \cos^2 B_2 + Q_1 \cos^2 B_1) \quad (61)$$

$$+ \frac{1}{36} \left\{ (\sin B_2 - \sin B_1)^2 (1 + e'^2 [2 - 10 \sin B_1 \sin B_2 - \frac{43}{15} (\sin B_2 - \sin B_1)^2 + e'^4 (\dots)]) \right\}$$

Für $B_1 = 30^\circ$ und $B_2 = 60^\circ$ ergibt sich: $\mu = 0,087336$, mit $l_* = 1^\circ 5'$ wird daher

$$1 - m_0 = \mu \left(\frac{l_*}{Q} \right)^2 = 0,000060.$$

III. Zu demselben Wert von μ und damit von m_0 führt auch die folgende Betrachtung.

Es seien ds und ds_1 zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve auf dem Ellipsoid; ds' und ds'_1 ihre Bilder in der Ebene. Alsdann ist $ds' = m ds$ und $ds'_1 = \left(m + \frac{\partial m}{\partial s} ds \right) ds_1 = m \left(1 + \frac{\partial \ln m}{\partial s} ds \right) ds_1$, also:

$$\frac{ds'_1}{ds'} = \left(1 + \frac{\partial \ln m}{\partial s} ds \right) \frac{ds_1}{ds}.$$

Wenn man nun von irgendeinem Punkte P_0 des Ellipsoids, für den $m = 1$ ist, auf einer beliebigen Kurve nach einem veränderlichen Punkte P geht, und gleichzeitig das Bild dieser Kurve in der Ebene zeichnet, so addieren sich längs derselben alle Elemente $\frac{\partial \ln m}{\partial s} ds$. Folglich kann $\ln m$

angesehen werden als die Abweichung von der Ähnlichkeit beim Übergange vom Punkte P_0 zum Punkte P , oder $\ln m$ ist der Fehler des Bildes im Punkte P , verglichen mit dem Punkte P_0 . Dieser Fehler kann positiv oder negativ sein; man wird demnach $(\ln m)^2$, über alle Punkte der abzubildenden Fläche erstreckt, zum Minimum machen. Bei der vorher getroffenen Annahme über m ist aber

$$\ln m = \frac{1}{2}(m^2 - 1) + Gl_4, \quad \frac{1}{m} = 1 + Gl_2, \quad \frac{\partial m}{\partial \mu} = -l^2 (1 + Gl_2).$$

Aus der Gl. $\int (\ln m)^2 dF = \min.$ folgt aber $\int \frac{\ln m}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu} dF = 0$, also angenähert $\int (m^2 - 1) dF = 0$, wie vorher.

In der Übereinkunft von 1917 ist festgesetzt worden, m_0 so zu wählen, daß $m - 1$ für $B = 45^\circ$ unterhalb 0,0001 bleibt.

Gedruckt bei E. S. Mittler & Sohn,
Berlin SW68, Kochstraße 68-71.