

H. RODEMANN, Braunschweig

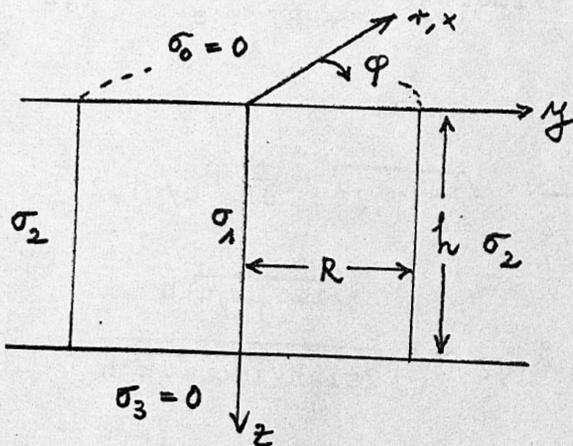
"Modellrechnungen zur Magnetotellurik an kreissymmetrischen Strukturen"

Mittwoch, den 13.03.1974

Das Problem des unendlich langen leitfähigen Zylinders im homogenen Magnetfeld ist von KERTZ [1960] und MEYER [1963] behandelt worden. Eine andere Aufgabenstellung ergibt sich, wenn man den Zylinder abschneidet und aufrecht in einen leitfähigen Halbraum stellt. Solch einer kreissymmetrischen Struktur entspricht z.B. ein runder Salzstock oder eine Insel.

Wie bei zweidimensionalen Leitfähigkeitsverteilungen kann man versuchen, die Aufgabe numerisch oder analytisch anzupacken. An beiden Methoden sind wir interessiert. Eine numerische Behandlung des Zylinderproblems ist 1972 von WATTS geliefert worden. Wir sind dabei, seine Methode, bei der die Zeitabhängigkeit nicht absepariert wird, nachzuprogrammieren. Auf numerische Rechnungen möchte ich jedoch nicht eingehen, sondern Ihnen eine analytische Methode kurz skizzieren.

Eine Lösung kann ich leider noch nicht angeben, sondern nur eine 1. Näherung, bei der die horizontalen Komponenten des Magnetfeldes an der Oberfläche konstant gehalten werden. Das Ergebnis soll später als Ausgangspunkt für eine 2. Näherung benutzt werden. Wir betrachten folgendes Modell:



In eine horizontal unendlich ausgedehnte Platte der Dicke h und der Leitfähigkeit σ_2 sei eine zylindrische Leitfähigkeitsanomalie mit dem Radius R und der Leitfähigkeit σ_1 eingelagert. Oberhalb und unterhalb der Platte herrsche die Leitfähigkeit $\sigma_0 = \sigma_3 = 0$.

Die Rechnung für ein Modell mit $\sigma_3 = \infty$ verläuft fast genauso, die Terme sind im betrachteten Fall einfacher. Der Grenzübergang $h \rightarrow \infty$ ergibt den Halbraum mit halbumendlichem Zylinder.

Das induzierende Magnetfeld variere periodisch mit der Kreisfrequenz ω und sei linear in y -Richtung polarisiert.

Indem wir die Verteilung der Tangentialkomponenten des Magnetfeldes auf der Oberfläche des betrachteten Volumens festlegen, definieren wir eine eindeutig lösbare Randwertaufgabe.

Der folgende Rechengang ähnelt dem von ERCEVILLE u. KUNETZ (1962) zur H-Polarisation und der Arbeit von WEAVER (1963) zur H- und E-Polarisation.

Die Felder werden als Summe von Cagniardverteilung und geeigneten Störtermen angesetzt.

Der Cagniardteil hat nach Abseparation des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$ (in Phasendarstellung, cart. Koordinaten u. im SI-System) folgende Form, wenn die Randbedingungen

$$\vec{H}_C(z=0) = (0, H_0, 0), \quad \vec{H}_C(z=h) = 0 \quad \text{beachtet werden:}$$

$$H_{cx \ 1,2} = 0$$

$$H_{cy \ 1,2} = A_{1,2} e^{\sqrt{i\omega\sigma_{1,2}\mu} z} + B_{1,2} e^{-\sqrt{i\omega\sigma_{1,2}\mu} z}$$

$$H_{cz \ 1,2} = 0$$

$$E_{cx \ 1,2} = -\frac{1}{\sigma_{1,2}} \cdot \sqrt{i\omega\sigma_{1,2}\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_{cy \ 1,2}$$

$$H_{cy \ 1,2} = 0$$

$$H_{cz \ 1,2} = 0 ; \quad A_{1,2} = -\frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma_{1,2}\mu} h}}{2\sinh\sqrt{i\omega\sigma_{1,2}\mu} h} ;$$

$$B_{1,2} = \frac{e^{+\sqrt{i\omega\sigma_{1,2}} \mu' h}}{2 \sinh \sqrt{i\omega\sigma_{1,2}} \mu' h}$$

In Zylinderkomponenten erhalten wir:

$$H_{cr\ 1,2} = H_{cy\ 1,2} \cdot \sin \phi$$

$$H_{c\phi\ 1,2} = H_{cy\ 1,2} \cdot \cos \phi$$

$$E_{cr\ 1,2} = E_{cx\ 1,2} \cdot \cos \phi$$

$$E_{c\phi\ 1,2} = -E_{cx\ 1,2} \cdot \sin \phi$$

Um die Cagniardterme mit den Störtermen verknüpfen zu können, stellen wir sie als Fourierreihen dar:

$$H_{cy\ 1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n\ 1,2} \sin \frac{n\pi z}{h}, \quad b_{n\ 1,2} = \frac{2n\pi \cdot H_0}{h^2 \cdot \alpha_{1,2}^2}$$

$$E_{cx\ 1,2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n\ 1,2} \cos \frac{n\pi z}{h}, \quad c_{n\ 1,2} = \frac{2i\omega\mu \cdot H_0}{h \cdot \alpha_{1,2}^2} \cdot \frac{1}{\epsilon}; \quad \epsilon = \begin{cases} 2f \cdot k=0 \\ 1f \cdot k \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } \alpha_{1,2}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{h^2} + i\omega\sigma_{1,2} \cdot \mu$$

Über die Randbedingungen bekommen wir Aussagen über die Störterme.

Für die Grenzfläche $r=R$ muß gelten:

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2, \text{ also } \vec{H}_{c2} - \vec{H}_{c1} = \vec{H}_{s1} - \vec{H}_{s2}$$

$$\vec{E}_{\parallel 1} = \vec{E}_{\parallel 2}, \quad (E_{\phi}, E_z)$$

$$(\sigma E_{\perp})_1 = (\sigma E_{\perp})_2; \quad (E_r)$$

Außerdem müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$H_{sr}(z=0) = H_{s\phi}(z=0) = H_{sr}(z=h) = H_{s\phi}(z=h) = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} H_{sr} \\ H_{s\phi} \end{matrix} \right\} (r \rightarrow \infty) = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} H_{sr} \\ H_{s\phi} \end{matrix} \right\} (r \rightarrow 0) \text{ endlich}$$

Aus der Grenzflächenbedingung folgt, daß die Differenzen der Störterme bei $r=R$ dieselbe ϕ -Abhängigkeit besitzen müssen wie die Differenzen der Cagniardterme. Sie folgen also entweder einzeln der gegebenen ϕ -Abhängigkeit, oder es existieren zusätzlich Terme mit anderer Abhängigkeit, deren Differenz bei $r=R$ verschwindet. Wir beschränken uns auf die erste Möglichkeit. Es ist wahrscheinlich, daß diese Terme ausreichen.

Danach ist folgende Winkelabhängigkeit der Störterme sinnvoll:

$$H_{sr} \sim \sin \phi, \quad E_{sr} \sim \cos \phi$$

$$H_{s\phi} \sim \cos \phi, \quad E_{s\phi} \sim \sin \phi$$

$$H_{sz} \sim \sin \phi, \quad E_{sz} \sim \cos \phi$$

Die letzten beiden Abhängigkeiten ergeben sich notwendig aus den anderen, z.B. über die Divergenzbeziehungen.

Um die r - und z -Abhängigkeit zu ermitteln, betrachten wir die Maxwellgleichungen in quasi-stationärer Näherung und Phasendarstellung:

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}.$$

Für Gebiete mit konstanter Leitfähigkeit erhalten wir die Verknüpfung

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = -i\omega\sigma\mu\vec{H}, \quad \text{also} \quad \Delta \vec{H} = i\omega\sigma\mu\vec{H}$$

In kartesischen Koordinaten entspricht der vektorielle Laplaceoperator dem skalaren, auf jede Komponente einzeln angewandt. Dies ist in Zylinderkoordinaten anders. Bezeichnet man den skalaren Laplaceoperator mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{so hat obige Gleichung}$$

die Form

$$\Delta H_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \left(i\omega\sigma\mu + \frac{1}{r^2}\right) H_r = 0$$

$$\Delta H_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \left(i\omega\sigma\mu + \frac{1}{r^2}\right) H_\phi = 0$$

$$\Delta H_z - i\omega\sigma\mu H_z = 0 \quad ; \quad \text{entsprechend für } \vec{E}$$

Lediglich die dritte Gleichung ist von vornherein separabel. Es existieren zwei Möglichkeiten für die Wahl der Partikularlösungen:

$$H_z = [c_1 J_m(qr) + c_2 Y_m(qr)] [c_3 e^{wz} + c_4 e^{-wz}] [c_5 \sin m\phi + c_6 \cos m\phi]$$

$$\text{mit } w^2 = q^2 + i\omega\sigma\mu$$

oder

$$H_z = [c_1 J_m(i\alpha r) + c_2 Y_m(i\alpha r)] [c_3 \sin kz + c_4 \cos kz] [c_5 \sin m\phi + c_6 \cos m\phi]$$

$$\text{mit } \alpha^2 = k^2 + i\omega\sigma\mu, \quad \text{entsprechend für } E_z.$$

Um die Divergenzbeziehungen zu befriedigen, muß für die anderen Feldkomponenten dieselbe z-Abhängigkeit benutzt werden.

Der zweite Ansatz bietet den Vorteil, daß die z-Abhängigkeit durch orthogonale Funktionen gegeben ist.

Die Koeffizienten erhalten wir aus den Randbedingungen. Die geforderte Winkelabhängigkeit ergibt sich mit $m=1$ und $c_6=0$.

Bei der r-Abhängigkeit ist der Übergang zu den modifizierten Besselfunktionen $I_1(\alpha r)$ und $K_1(\alpha r)$ sinnvoll. Diese Funktionen sind linear unabhängig, und im betrachteten Bereich von α ($0 \leq \arg(\alpha) \leq \frac{\pi}{4}$, also zwischen modifizierten Besselfunktionen mit reellem Argument und Kelvinfunktionen) gilt:

$$I_1(|\alpha r| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \quad \text{sonst regulär, im wesentlichen.}$$

$$K_1(|\alpha r| \rightarrow 0) \rightarrow \infty \quad \text{exponentielles Verhalten.}$$

Im Zylinder kommt daher nur I_1 in Frage, im Außenbereich nur K_1 . Der Zusammenhang mit J und Y ist durch

$$Y_1(zi) = -I_1(z) + \frac{2}{\pi} i K_1(z)$$

und $J_1(zi) = i I_1(z)$ gegeben. ($-\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$)

Bei der z-Abhängigkeit muß $\left(\begin{smallmatrix} H_r \\ H_\phi \end{smallmatrix} \right) \sim \sin kz$ angesetzt werden, um

die Störung an der Oberfläche zu Null zu machen. Aus $\vec{H}=0$ folgt damit $H_z \sim \cos kz$. Dies ist auch sinnvoll, da wir die Störung von H_z an der Oberfläche herausbekommen wollen. Bei E_z muß der Sinus-Term genommen werden, um zu gewährleisten, daß $E_z(z=0) = 0$. Die dazu außerdem notwendige Bedingung, daß bei der Summation über a_k $\sin kz$ der Koeffizient a_k schneller als $\frac{1}{k}$ abnimmt, ist in den zu entwickelnden Formeln erfüllt.

Aus der Reihenentwicklung der Cagniardterme folgt, daß $k = \frac{n \cdot \pi}{h}$ gesetzt werden muß.

Wir setzen als Partikularlösungen daher an:

$r \leq R$ Zylinder	$r \geq R$ Außenbereich
$H_{sz1} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n} \cdot I_1(\alpha_1 r) \cos kz \cdot \sin \phi;$	$H_{sz2} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} K_1(\alpha_2 r) \cos kz \sin \phi$
$E_{sz1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{1n} \cdot I_1(\alpha_1 r) \sin kz \cdot \cos \phi;$	$E_{sz2} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n} K_1(\alpha_2 r) \sin kz \cos \phi$
mit $e_{10} = e_{20} = 0$	

Um die r-Abhängigkeit für die Horizontalkomponenten zu erhalten, gehen wir mit diesem Ansatz in die Rotationsbeziehungen. Dieses Verfahren hat SPENCER (1951) vorgeschlagen.

Mit

$$H_{sr} = \sum_n \tilde{H}_r(r, n) \sin kz \sin \phi$$

$$H_{s\phi} = \sum_n \tilde{H}_\phi \cdot \sin kz \cos \phi$$

$$E_{sr} = \sum_n \tilde{E}_r \cdot \cos kz \cos \phi$$

$$E_{s\phi} = \sum_n \tilde{E}_\phi \cdot \cos kz \sin \phi$$

erhalten wir z.B. für $r \leq R$

$$\text{rot}_\phi \vec{H} = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma_1 E_\phi \rightarrow \tilde{H}_r \cdot k - h_1 \frac{\partial I_1}{\partial r} = \sigma_1 \tilde{E}_\phi$$

$$\text{rot}_r \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -i\omega\sigma_1 \mu H_r \rightarrow -e_1 \frac{1}{r} I_1 + \tilde{E}_\phi k = -i\omega\sigma_1 \tilde{H}_r$$

Zwei weitere Gleichungen erhalten wir aus

$$\text{rot}_r \vec{H} \text{ und } \text{rot}_\phi \vec{E}.$$

Aus diesen beiden Paaren von Gleichungen mit je zwei Unbekannten folgt für $r \leq R$:

$$\tilde{H}_r = \frac{1}{\alpha_1} \left(k \frac{\partial I_1}{\partial r} h_1 + \sigma_1 \frac{1}{r} I_1 e_1 \right)$$

$$\tilde{H}_\phi = \frac{1}{\alpha_1} \left(k \frac{1}{r} I_1 h_1 + \sigma_1 \frac{\partial I_1}{\partial r} e_1 \right)$$

$$\tilde{E}_r = \frac{1}{\alpha_1} \left(i\omega\mu \frac{1}{r} I_1 h_1 - k \frac{\partial I_1}{\partial r} e_1 \right)$$

$$\tilde{E}_\phi = \frac{1}{\alpha_1} \left(-i\omega\mu \frac{\partial I_1}{\partial r} h_1 + k \frac{1}{r} I_1 e_1 \right)$$

Die Ausdrücke für $r \geq R$ ergeben sich durch Indexvertauschung und durch Ersetzen von I_1 ($\alpha_1 r$) durch K_1 ($\alpha_2 r$).

Die Koeffizienten h_1 , h_2 , e_1 und e_2 können wir mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen für $r=R$ berechnen.

Sie lauten:

$$\tilde{H}_{r1} - \tilde{H}_{r2} = b_{n2} - b_{n1}$$

$$\tilde{H}_{\phi1} - \tilde{H}_{\phi2} = b_{n2} - b_{n1}$$

$$\sigma_1 \tilde{E}_{r1} - \sigma_2 \tilde{E}_{r2} = \sigma_2 c_{n2} - \sigma_1 c_{n1}$$

$$\tilde{E}_{\phi 1} - \tilde{E}_{\phi 2} = c_{n1} - c_{n2}$$

$$\tilde{H}_{z1} - \tilde{H}_{z2} = 0$$

$$\tilde{E}_{z1} - \tilde{E}_{z2} = 0$$

Folgende Lösungen erfüllen diese sechs Gleichungen:

$$e_1 = k \cdot K \cdot F \cdot (T_1 + T_3)$$

$$e_2 = e_1 \frac{I}{K}$$

$$h_1 = K \cdot F \cdot (T_2 - T_4)$$

$$h_2 = h_1 \frac{I}{K}$$

mit den Abkürzungen:

$$F = \frac{2i\omega\mu(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot H_0}{h(T_1 T_2 + T_3 T_4)} ; \quad T_1 = \alpha_2^2 I' K - \alpha_1^2 K' I$$

$$T_2 = \sigma_1 \alpha_2^2 I' K - \sigma_2 \alpha_1^2 K' I$$

$$T_3 = i\omega\mu(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1}{R} IK$$

$$T_4 = k^2(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1}{R} IK$$

$$\text{wobei } I' =_{\text{Df}} \left(\frac{\partial}{\partial r} I_1(\alpha_1 r) \right)_{r=R} ; \quad K' =_{\text{Df}} \left(\frac{\partial}{\partial r} K_1(\alpha_2 r) \right)_{r=R}$$

$$I =_{\text{Df}} I_1(\alpha_1 R) ; \quad K =_{\text{Df}} K_1(\alpha_2 R) .$$

Das auf diese Weise berechenbare E_r entspricht der H-Polarisation im zweidimensionalen Fall, E_ϕ und H_z entsprechen der E-Polarisation. Für den Grenzfall $R \rightarrow \infty$ ergeben sich die Formeln von d'ERCEVILLE und KUNETZ (1962) und, wenn man zusätzlich $h \rightarrow \infty$ streben läßt, diejenigen von WEAVER (1963). Es ist geplant, die noch fehlenden Korrekturen für H_r und H_ϕ mit Hilfe von Hilbert-Transformationen aus $H_z(z=0)$ zu berechnen.

Literatur:

d'ERCEVILLE and Kunetz: The effect of a fault on the earth's natural electromagnetic field.

Geophysics, 27, S. 651-665, 1962.

KERTZ, W.: Leitungsfähiger Zylinder im transversalen magnetischen Wechselfeld.

Gerlands Beiträge zur Geophysik, 69, S. 4-28, 1960.

MEYER, J.: Elektromagnetische Induktion in einem leitenden homogenen Zylinder durch äußere magnetische und elektrische Wechselfelder.

Mitteilungen Max-Planck-Institut für Aeronomie, 13, 67 S., 1963.

SPENCER, S.E.: Separation of variables in electromagnetic theory.

Journal of Applied Physics, 22, S. 386-389, 1951.

WATTS, R.D.: Magnetotelluric Fields over Round Structures.

Ph.D.Thesis, University of Toronto, 81 S., 1972.

WEAVER, J.T.: The electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micropulsations near a coastline.

Can.J.Phys., 41, S. 484-495, 1962.

