

Dipl.-Phys. V. HAAK, München

"Die Bestimmung von Übertragungsfunktionen in der Tellurik
mit Methoden der Statistik"

Dienstag, den 4. 3. 1969

Die horizontalen Komponenten des erdelektrischen Feldes seien sowohl an einer Basis- als auch an einer Wanderstation auf zwei, jeweils senkrecht zueinander liegenden Meßstrecken registriert worden. Damit sind der Auswertung folgende vier Zeitfunktionen vorgegeben:

Basisstation : $x_0(t), y_0(t)$ (Dies können z.B. die Kom=
Wanderstation: $x(t), y(t)$ ponenten EW und NS sein.)

Hieraus sollen die Übertragungs-Funktionen bestimmt werden, aus denen die Veränderung der integrierten Leitfähigkeit des Untergrundes von Basis- zur Wanderstation ableitbar ist.

Zunächst ist die Transformation der obigen Zeitfunktionen in den Frequenzbereich notwendig. Man erhält dann die folgenden Spektralfunktionen:

Basisstation : $X_0(\omega), Y_0(\omega)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$
Wanderstation: $X(\omega), Y(\omega)$

Für die wechselseitige Beziehung dieser vier Spektralfunktionen wird allgemein der folgende Ansatz gemacht:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= t_x(\omega) \cdot X_0(\omega) + t_y(\omega) \cdot Y_0(\omega) , \\ Y(\omega) &= p_x(\omega) \cdot X_0(\omega) + p_y(\omega) \cdot Y_0(\omega) . \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei muß man voraussetzen, daß das induzierende Magnetfeld mindestens im Meßgebiet homogen sei. Dann enthalten die Übertragungsfunktionen $t_x(\omega), t_y(\omega), \dots$ die gewünschte Information über die Veränderung der integrierten Leitfähigkeit im Untergrund.

Die in den Gleichungen (1) gemachte Annahme der Linearität des Zusammenhangs zwischen den E-Feldkomponenten (im Frequenzbereich) von Wander- und Basisstation konnte hier durch die

beobachteten E-Feldkomponenten bestätigt werden. Hierzu wurden mehrere Zeitintervalle, also Abschnitte aus den Registrierungen fourieranalysiert (aus den Registrierungen der EW-Komponente an den Stationen KUH und TRI, die etwa 45 km voneinander entfernt lagen). Aus den berechneten Fourier-Spektren wurden jene Koeffizienten gewählt, die zu Perioden zwischen 20 und 30 sec gehörten. Zwischen den Paaren von Fourierkoeffizienten X^i und X_0^i , die zu zeitgleichen Abschnitten der Registrierung gehören, wurde also der folgende lineare Zusammenhang vermutet

$$X^i = q^i \cdot X_0^i .$$

Trägt man diese Wertepaare X^i und X_0^i in ein doppelt-logarithmisches Netz ein, so sollten sich aufgrund der entsprechenden Gleichung

$$\log X^i = \log q^i + \log X_0^i$$

die einzelnen Punkte entlang einer Geraden anordnen, die eine Steigung von 45° hat. Eine andere Steigung würde auf einen anderen als einen linearen Zusammenhang hinweisen.

Man erkennt aus Fig. 1, daß die angenommene lineare Beziehung wirklich die beste Darstellung ist. Die weitere Untersuchung ergab, daß die einzelnen Amplituden-Verhältnisse q^i normal verteilt sind. Die in Fig. 1 eingezeichnete Gerade gibt das dieser Verteilung entsprechende wahrscheinlichste Amplituden-Verhältnis wieder.

Die Bestimmung der Übertragungsfunktionen ist auf den folgenden drei Wegen möglich:

- a) Registrierung \rightarrow Fourieranalyse \rightarrow Methode der kleinsten Quadrate \rightarrow Übertragungs-Funktionen;
- b) Registrierung \rightarrow Numerische Filter \rightarrow Methode der kleinsten Quadrate \rightarrow Übertragungs-Funktionen;
- c) Registrierung \rightarrow Verallgemeinerte Fourieranalyse \rightarrow Übertragungs-Funktionen.

Nach welchen Kriterien soll man nun eines dieser drei Verfahren als das geeignete auswählen? Ein Kriterium wäre das der erreichbaren statistischen Sicherheit, mit der man die Übertragungsfunktionen ermitteln kann, was gleichbedeutend ist mit der

erreichbaren Anzahl von Freiheitsgraden. Da diese Anzahl allgemein durch die Länge der zu analysierenden Zeitfunktion und der durch eines der drei obigen Verfahren erreichbaren, tatsächlichen Frequenz-Auflösung bestimmt ist, kann mit jedem der drei Verfahren die gleich große statistische Sicherheit erreicht werden.

In der Praxis aber wird es dann so gehandhabt, daß man entweder ein langes Stück (bzw. wenige lange) aus der Registrierung (z.B. 60 min) mit der dritten der oben genannten Methode (über die statistische Frequenzanalyse) oder der zweiten Methode (dem numerischen Filter) auswertet, oder dieses lange Stück in viele kurze zerlegt (z.B. 60 min in 10 nichtüberlappende Stücke mit je 6 min) und 10 Fourieranalysen (mit je 10 bis 15 Harmonischen) durchführt. Man hat dann je 10 Koeffizienten der gleichen Periode, aus denen man dann mit der Methode der kleinsten Quadrate die Übertragungs-Funktionen bestimmt.

Hierbei ergibt sich bereits die Antwort auf ein zweites Kriterium, nämlich das der praktischen Anwendbarkeit der drei Methoden. Bei dem Weg über die Fourieranalyse kann man diese vielen kurzen Registrierabschnitte beliebig aus dem ganzen zur Verfügung stehenden Registriermaterial heraussuchen. Das ist dann wirklich notwendig, wenn die Registrierungen durch vagabundierende Ströme der Technik stark gestört sind. Der Erfahrung nach lassen sich immer kurze ungestörte Abschnitte mit erkennbaren Amplituden finden. Aus diesem Grunde wurde bei der Auswertung der Fourieranalyse der Vorzug gegeben.

Berechnung der Übertragungs-Funktionen nach der Fourieranalyse:

Es sind zum Beispiel 10 Registrierabschnitte nach Fourier analysiert worden, wobei jeder Registrierabschnitt eine gleichzeitige Beobachtung an Wander- und Basisstation in jeweils zwei zueinander senkrechten Richtungen (EW/NS) darstellt. Dann werden aus jedem dieser Spektren die Fourier-Koeffizienten der gleichen Periode entnommen, für die dann folgende 10 Gleichungen

gelten:

$$\begin{aligned} X_1 &= t_x \cdot X_{o1} + t_y \cdot Y_{o1} + dX_1, \\ X_2 &= t_x \cdot X_{o2} + t_y \cdot Y_{o2} + dX_2, \\ &\dots \\ X_{10} &= t_x \cdot X_{o10} + t_y \cdot Y_{o10} + dX_{10}. \end{aligned} \quad (2)$$

Unbekannt sind t_x und t_y , außerdem alle Fehler dX_i , die nun so bestimmt werden sollen, daß die Summe ihrer Quadrate zum Minimum wird. Dann erhält man eine zunächst recht umfangreiche Bestimmungsgleichung zum Beispiel für t_x . Faßt man diese Formel zusammen, kann man sie auf folgende Form reduzieren:

$$t_x = \sqrt{\frac{S_x}{S_{x_0}}} \cdot \frac{\text{KOH}(XX_o) - \text{KOH}(XY_o) \text{KOH}(X_o Y_o)}{\underbrace{1 - \text{KOH}^2(X_o Y_o)}_A}. \quad (3)$$

Zeichenerklärung:

S_x/S_{x_0} ist das Verhältnis der Power-Spectra zwischen den Komponenten X und X_o für eine feste Periode.

$\text{KOH}(XY)$ ist die Kohärenz zwischen den Koeffizienten:

$$X_1, X_2, \dots, X_{10} \text{ und } Y_1, Y_2, \dots, Y_{10};$$

mit $X_i = X_{ai} \cdot \cos \omega t + X_{bi} \sin \omega t$, $i = 1, 2, \dots, 10$ ist

$$\text{KOH}(XY) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (X_{ai} Y_{ai} + X_{bi} Y_{bi})^2 + (Y_{ai} X_{bi} - X_{ai} Y_{bi})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (X_{ai}^2 + X_{bi}^2) \sum_{i=1}^{10} (Y_{ai}^2 + Y_{bi}^2)}} \quad (4)$$

(Beachte: die Kohärenz zwischen einer cos- und einer sin-Schwingung ist gleich 1!)

Diskussion von Gleichung (3):

a) Wenn alle Fehler $dX_i = 0$ wären, so sollte $\{A\}$ von (3) gleich Eins werden. Das ist dann der Fall, wenn

- 1) $\text{KOH}(XX_o) = 1$ was erfüllt ist, wenn X von X_o linear abhängt (notwendige und hinreichende Bedingung!)

und wenn

2) $KOH(X_0 Y_0) = 0$ mit anderen Worten: X_0 ist von Y_0 unabhängig.

b) Da die Fehler $dX_i \neq 0$ sind, muß man die obigen Kriterien in Begriffe der Statistik umwandeln:

1) Die Linearität zwischen X und X_0 darf mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% erwartet werden, wenn

$$KOH(X X_0) > \sqrt{4/k} .$$

2) X_0 wird von Y_0 als unabhängig betrachtet werden können, wenn

$$KOH(X_0 Y_0) \approx \sqrt{2/k} , \quad k = \text{Freiheitsgrad} .$$

Diese Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichungen (2) sind aber allgemein nicht erfüllt. Dies ist das Ergebnis der Anwendung folgender Methode, mit der dann aber auch diese Bedingungen erfüllt werden können.

Zu Fig. 2, obere Reihe: Zunächst wird die Kohärenz zwischen den Variationen der NS und der EW-Komponente berechnet, der berechnete Wert in einem Polarkoordinatennetz auf der NS und der EW Achse eingetragen. Dann wird das Koordinatensystem um jeweils 2° weitergedreht, die Komponenten des horizontalen Feldes in diesen gedrehten Koordinatensystemen berechnet, und jeweils die Kohärenz der zueinander senkrechten Komponenten bestimmt. Die beiden in der oberen Reihe eingetragenen Rosetten geben diese Kohärenzen als Funktion des Azimuts an. Das Resultat ist: Es existiert ein bevorzugtes Koordinatensystem (in Fig. 2 orientiert nach der Streichrichtung des Rheingrabens), in dem die zueinander senkrechten Variationen ein Minimum der Kohärenz haben. Kohärenzwerte größer als $\sqrt{4/k}$ wurden durch dicke Punkte bezeichnet, kleinere Werte durch dünne Punkte.

Damit ist eine Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems (2) erfüllt. Eine ausführliche Untersuchung des Beobachtungsmaterials ergab, daß eine Achse dieser Koordinatensysteme minimaler Kohärenz mit der Vorzugsrichtung des erdelektrischen Feldes übereinstimmt (d.h. mit jener Richtung, in der im Mittel über viele Effekte das erdelektrische Feld seine größte Intensität erreicht). Es ergab sich außerdem,

daß die Phasen-Differenz zwischen den Variationen von Abszisse und Ordinate dieser Koordinatensysteme minimaler Kohärenz stets etwa $\pm 90^\circ$ ist.

Das an der Erdoberfläche gemessene horizontale Gesamtfeld ist also in zwei zueinander senkrechte, linear unabhängige Feldkomponenten zerlegbar. Bezeichnet man die eine Komponente einmal als die "rote", die andere als die "blaue", so stellt sich die Frage, ob man diese roten und blauen Komponenten auch an den Wanderstationen wiederfindet. Die hierbei angewandte Methode wird an den Beispielen der 2. Zeile in Fig. 2 erläutert: Es wird zu der beispielsweise als rot bezeichneten Komponente an der Basisstation KUH (senkrecht zum Graben) die entsprechende rote an der Wanderstation gesucht. Es wird deshalb das Koordinatensystem *n u r* an der Wanderstation gedreht. Dabei werden die Kohärenzen zwischen den gedrehten Komponenten an der Wanderstation und der stets gleich bleibenden roten Komponente der Basisstation berechnet. Die Punkte sind wiederum dick gezeichnet worden, wenn wie oben ein mit 95% Wahrscheinlichkeit sicherer Zusammenhang erwartet werden kann. Das Ergebnis ist: Die rote Komponente an der Basisstation mit einem Azimut von $N 113^\circ E$ ist mit der Komponente an der Wanderstation FLE kohärent, die den Azimut $N 110^\circ E$ hat. Somit ist auch die zweite Bedingung für die Lösbarkeit des Gleichungssystems (2) erfüllbar.

In Fig. 3 ist das Ergebnis einer Anwendung dieser "Kohärenz-Methode" für alle Stationen des Rheingraben-Profiles I (Kaiserslautern - Stuttgart) für Perioden größer als 100 sec dargestellt.

1. Zeile: Bestimmung der Koordinatensysteme minimaler Kohärenz. Die sich aus den Einschnitten in den "Kleeblättern" ergebenden Koordinatensysteme sind in der 2. Zeile nocheinmal wiedergegeben. Auffallend ist die Erhaltungs-Neigung der Orientierung dieser Koordinatensysteme vom westlichen Ende des Profils (TRI) bis zum östlichen Rand des Grabens. Erst von diesem Rand an bis zum östlichen Ende des Profils drehen sich diese Koordinatensysteme. Die dicken Achsen dieser Koordinatensysteme geben die Vorzugsrichtung des erdelektrischen Feldes an: Sie ändert an den

Grabenrändern um etwa 90° ihre Richtung. 3. Zeile: Es wird das als rot bezeichnete Feld längs des Profils gesucht. Die Richtung der roten Komponenten an der Basisstation KUH ist senkrecht zum Graben. 4. Zeile: Hier wird entsprechend das blaue Feld entlang des Profils gesucht. An der Basisstation KUH ist die Richtung der blauen Komponente in Streichrichtung des Grabens. Um zu rechtwinkligen Koordinatensystemen auch an den Wanderstationen zu kommen, muß man bei der Festlegung der roten Komponente gleichzeitig auch die Richtung der blauen Komponente bestimmen.

Zusammenfassung: Das Gleichungssystem (2), das die Übertragungsfunktionen des erdelektrischen Feldes von der Basis- zur Wanderstation enthält, erfordert: Unabhängigkeit der Komponenten an einer Station untereinander, aber lineare Abhängigkeit der zu vergleichenden Komponenten von Wander- und Basisstation. Diese Forderungen wurden in Begriffe der Statistik übertragen. Damit konnte dann eine Methode angegeben werden, mit der die oben genannten Bedingungen erfüllt werden können.

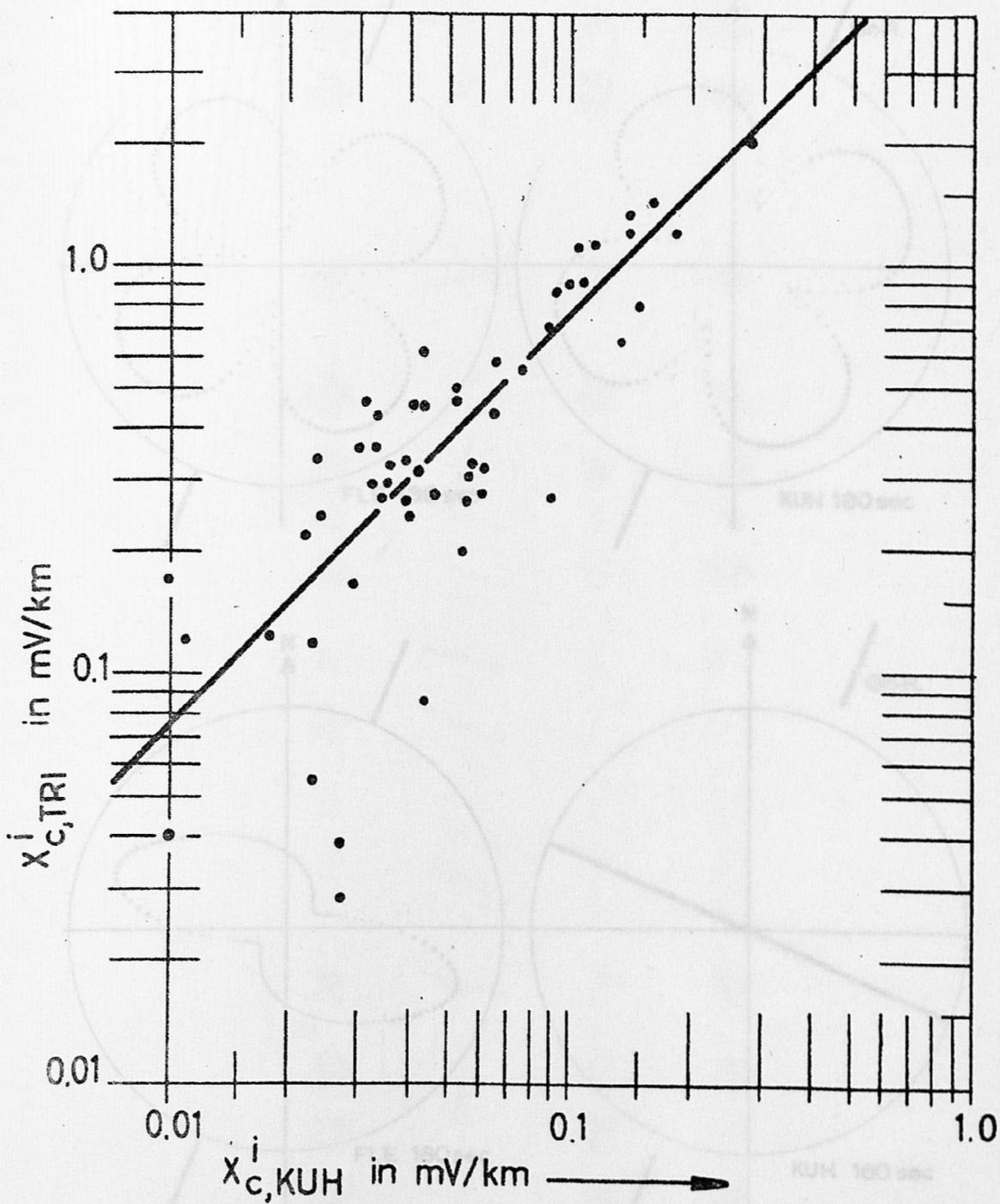


Fig. 1

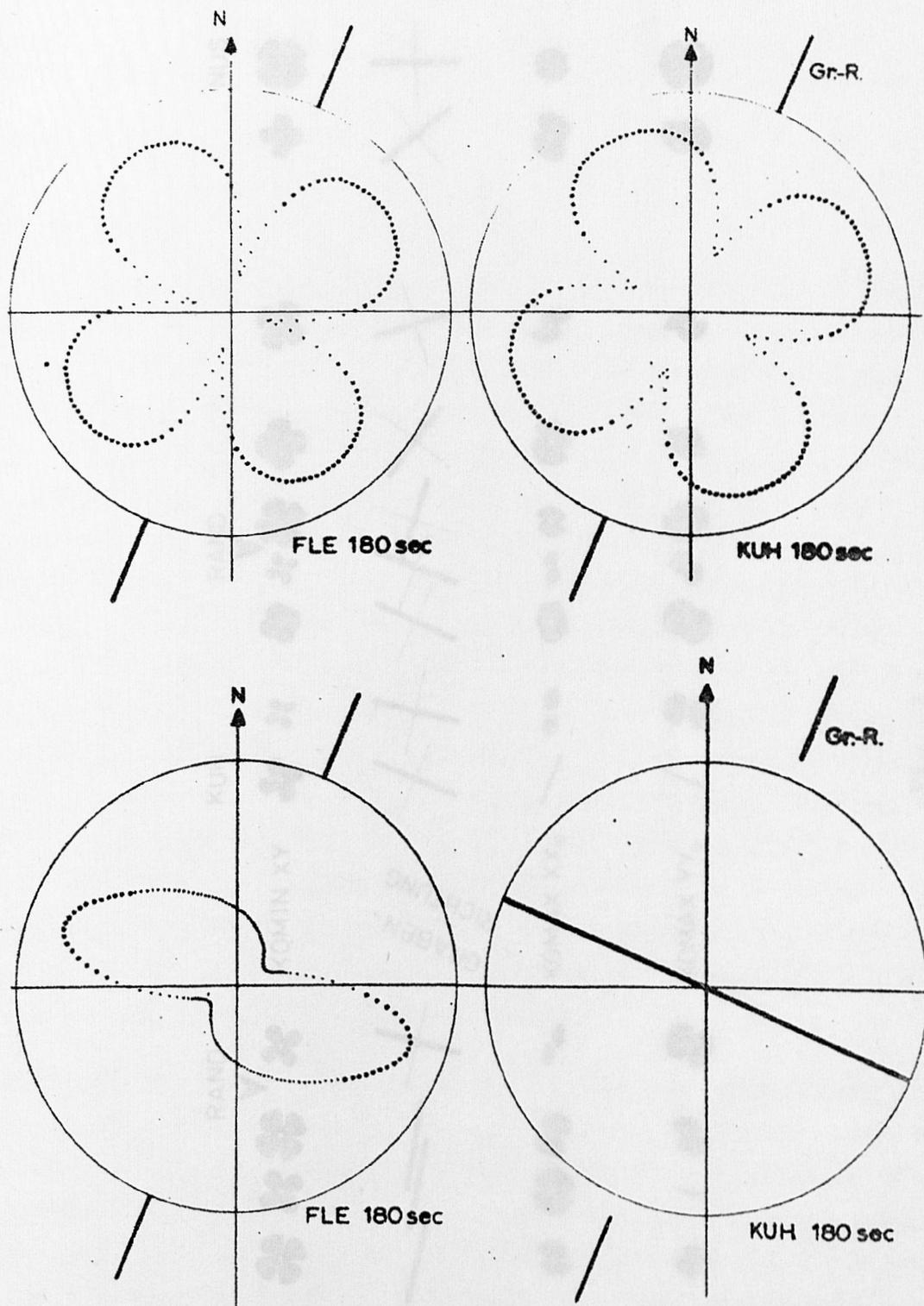


Fig. 2

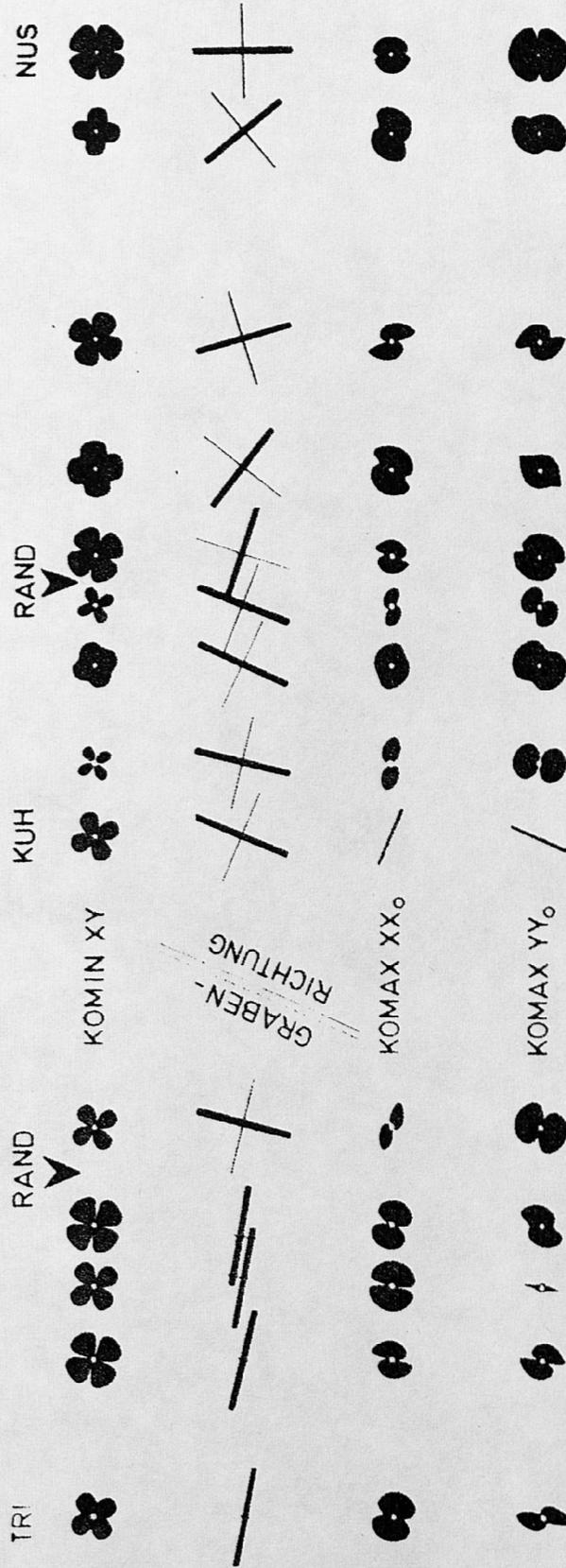


Fig. 3