

H. M. Maurer

Das elektromagnetische Feld eines horizontalen elektrischen Dipols bei beliebiger anisotroper Leitfähigkeit

Komplizierte Leitfähigkeitsstrukturen bei aktiven elektromagnetischen Meßverfahren werden meist durch dreidimensionale Modelle beschrieben. Eine andere Möglichkeit ist, die elektrische Leitfähigkeit richtungsabhängig anzusetzen. Damit kann z. B. eine nicht horizontale Feinschichtung berücksichtigt werden. Der elektrische Widerstand ist dann ein Tensor. Der Widerstandstensor muß positiv definit sein, damit die dissipierte Energie positiv ist:

$$\underline{E} = \underline{\rho} \underline{J} \quad P = \underline{J}^T \underline{E} = \underline{J}^T \underline{\rho} \underline{J} > 0 \quad (1)$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn alle Hauptunterdeterminanten des Widerstandstensors positiv sind

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad \rho_{xx} > 0$$

Da \underline{H} und \underline{J} divergenzfrei sind, lassen sie sich in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil aufspalten. Als Ansatz werden 4 Potentiale gewählt: T_H, P_H, T_J, P_J .

$$\underline{H} = \nabla \times (\hat{z} T_H) + \nabla \times \nabla \times (\hat{z} P_H) \quad (2)$$

$$\underline{J} = \nabla \times (\hat{z} T_J) + \nabla \times \nabla \times (\hat{z} P_J) \quad (3)$$

\hat{z} ist der Einheitsvektor in z-Richtung, Die Größen werden in den Wellenzahlbereich transformiert, gekennzeichnet durch das Symbol $\tilde{}$, ' ist die Ableitung nach z.

$$\tilde{\underline{J}} = \begin{pmatrix} ivT_J + iuP_J' \\ -iuT_J + ivP_J' \\ \kappa^2 P_J \end{pmatrix} \quad \tilde{\underline{H}} = \begin{pmatrix} ivT_H + iuP_H' \\ -iuT_H + ivP_H' \\ \kappa^2 P_H \end{pmatrix} \quad (4)$$

Durch Einsetzen in die Maxwell'schen Gleichungen lassen sich zwei dieser Potentiale eliminieren. Eine Transformation auf Polarkoordinaten κ, β und r, φ

$$\underline{\kappa} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cos \beta \\ \kappa \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Abkürzungen

$$\begin{aligned} a : &= \rho_{xx} \sin^2 \beta - 2\rho_{xy} \sin \beta \cos \beta + \rho_{yy} \cos^2 \beta \\ b : &= \rho_{xy} (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) + (\rho_{xx} - \rho_{yy}) \sin \beta \cos \beta \\ c : &= \kappa (\rho_{xz} \sin \beta - \rho_{yz} \cos \beta) \\ d : &= \rho_{xx} \rho_{yy} - \rho_{xy}^2 \\ e : &= 2i\kappa [(\rho_{xz} \rho_{xy} - \rho_{yz} \rho_{xx}) \sin \beta + (\rho_{yz} \rho_{xy} - \rho_{xz} \rho_{yy}) \cos \beta] \\ f : &= i\omega \mu_0 + \rho_{zz} \kappa^2 \end{aligned} \quad (5)$$

führen auf die Gleichungen

$$aP_H'' - (\kappa^2 a + i\omega\mu_0)P_H - bP_J' + icP_J = 0 \quad (6)$$

$$dP_J'' + eP_J' + (c^2 - af)P_J - i\omega\mu_0 bP_H' + \omega\mu_0 cP_H = 0 \quad (7)$$

Als Lösung dieses gekoppelten linearen Differentialgleichungssystems ist ein Exponentialansatz möglich, da die Koeffizienten nicht von der Variablen z abhängen:

$$P_H = A_H e^{-\alpha z} \quad P_J = A_J e^{-\alpha z} \quad (8)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 a - \kappa^2 a - i\omega\mu_0 & \alpha b + ic \\ \alpha i\omega\mu_0 b + \omega\mu_0 c & \alpha^2 d - \alpha e + c^2 - af \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_H \\ A_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muß die Determinante verschwinden. Daraus folgt eine Gleichung vierten Grades für α :

$$ad\alpha^4 - ae\alpha^3 - (\kappa^2 ad + i\omega\mu_0 d - ac^2 + a^2 f + i\omega\mu_0 b^2)\alpha^2 + (\kappa^2 ae + i\omega\mu_0 e)\alpha - \kappa^2 ac^2 + \kappa^2 a^2 f - 2i\omega\mu_0 c^2 = 0 \quad (10)$$

und das Verhältnis der Amplituden:

$$\frac{A_{J_k}}{A_{H_k}} := \gamma_k \quad k = 1, 2 \quad (11)$$

Da die Potentiale für den anisotropen Halbraum im Unendlichen verschwinden müssen, sind nur die beiden α mit positivem Realteil möglich.

Die Potentiale haben also die Form

$$P_H = A_{H_1} e^{-\alpha_1 z} + A_{H_2} e^{-\alpha_2 z} \quad P_J = \gamma_1 A_{H_1} e^{-\alpha_1 z} + \gamma_2 A_{H_2} e^{-\alpha_2 z} \quad (12)$$

Im isotropen Fall ($a = \rho, b = 0, c = 0, d = \rho^2, e = 0, f = i\omega\mu_0 + \rho\kappa^2$) oder bei einer einachsigen Anisotropie in z -Richtung (horizontal/vertikal Anisotropie) entkoppeln die Potentiale P_H und P_J in TE- und TM-Mode. Der isotrope Fall kann mit diesen Gleichungen nicht behandelt werden, da dann alle Koeffizienten des Gleichungssystems (9) null sind.

Mit den Ankopplungsbedingungen für einen horizontalen elektrischen Dipol mit dem Strommoment $\underline{d} = (d_x, d_y, 0)^T$

$$P_H(0, \underline{\kappa}) = -\frac{i}{\kappa^2(\kappa + \alpha)} (\underline{\kappa} \times \hat{z}) \cdot \underline{d} \quad (13)$$

$$P_J(0, \underline{\kappa}) = -\frac{i}{\kappa^2} (\underline{\kappa} \cdot \underline{d}) \quad (14)$$

erhält man als Gleichungssystem für die Amplituden

$$\begin{pmatrix} \kappa + \alpha_1 & \kappa + \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{H_1} \\ A_{H_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\kappa}(d_x \sin\beta - d_y \cos\beta) \\ -\frac{i}{\kappa}(d_x \cos\beta + d_y \sin\beta) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Die Rücktransformation in den Ortsbereich muß durch eine doppelte sin-cos Transformation erfolgen, da die Felder nicht rotationssymmetrisch sind oder sich als Richtungsableitung einer rotationssymmetrischen Größe darstellen lassen. Diese Transformation ist sehr aufwendig, da die Integralkerne an ca. 120×120 Stützstellen berechnet werden müssen. Der Cray-Rechner in Berlin benötigt etwa 25 CPUs pro Frequenz.

Für das Fernfeld ($\kappa = 0$) lassen sich analytische Lösungen finden. Auch im anisotropen Fall fließen alle Ströme horizontal, d. h. es baut sich dann ein so gerichtetes vertikales elektrisches Feld auf, daß die vertikalen Ströme verschwinden. Es gehen also nur die Tensorelemente $\varrho_{xx}, \varrho_{xy}, \varrho_{yy}$ in die Fernfeldgleichungen ein.

Als Modell habe ich einen anisotropen Halbraum mit

$$\underline{\underline{\varrho}} = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 25 \\ 0 & 50 & 0 \\ 25 & 0 & 75 \end{pmatrix} \Omega m$$

gewählt. Das ist ein Widerstand von $100 \Omega m$ in der Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ d. h. 45° geneigt in der x-z-Ebene und $50 \Omega m$ in den dazu senkrechten Richtungen.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Isolinienkarten des scheinbaren spezifischen Widerstandes für $\varrho_{ar\varphi}$ (aus E_r/H_φ) und für $\varrho_{a\varphi r}$ (aus E_φ/H_r), jeweils bei einer Frequenz von 15 Hz . Die Isolinien haben wenig Ähnlichkeit mit dem isotropen Fall, wo sie konzentrische Kreise um den Sender bilden mit dem Nahfeldanstieg zum Sender hin. Abbildung 3 zeigt die Richtung des elektrischen Feldes in der x-z-Ebene. Die Länge der Pfeile ist mit $(x^2 + z^2)^{3/2}$ normiert, um sie trotz der großen Dynamik noch zeichnen zu können. Die Felder zeigen keine Symmetrie mehr in Bezug auf die y-z-Ebene. In Abbildung 4 ist die Interpretation einer Frequenzsondierung über diesem anisotropen Halbraum am Punkt $(3000, 3000, 0)^T m$ durch ein isotropes Zweischichtmodell gezeigt. Die Anpassung ist befriedigend und die beiden Modelle wären in der Praxis nicht zu unterscheiden. An anderen Punkten zeigen die Frequenzkurven aber Verläufe, die nicht eindimensional interpretierbar sind.

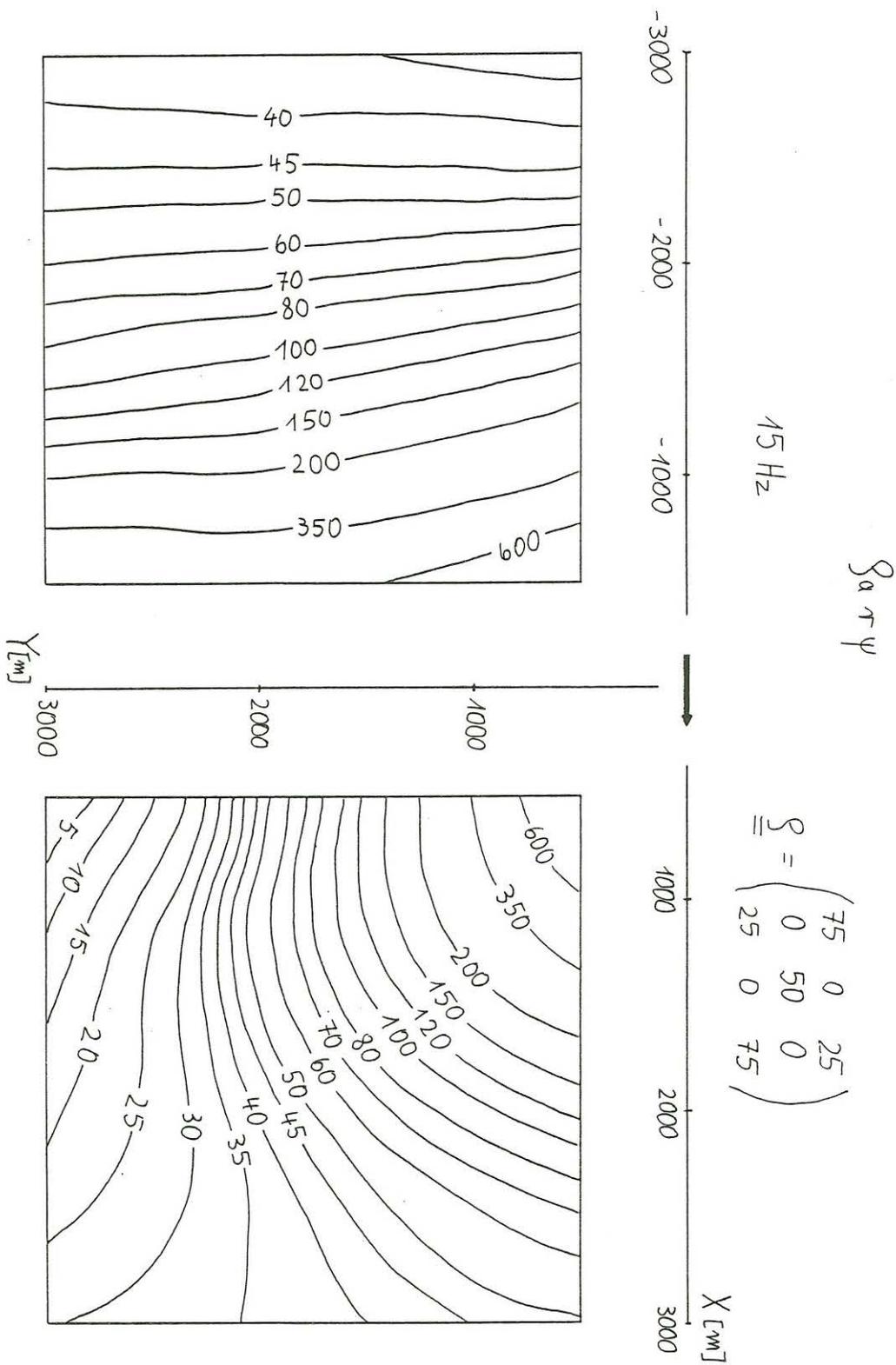


Abbildung 1: Isolinenkarte des scheinbaren spezifischen Widerstands über einem anisotropen Halbraum

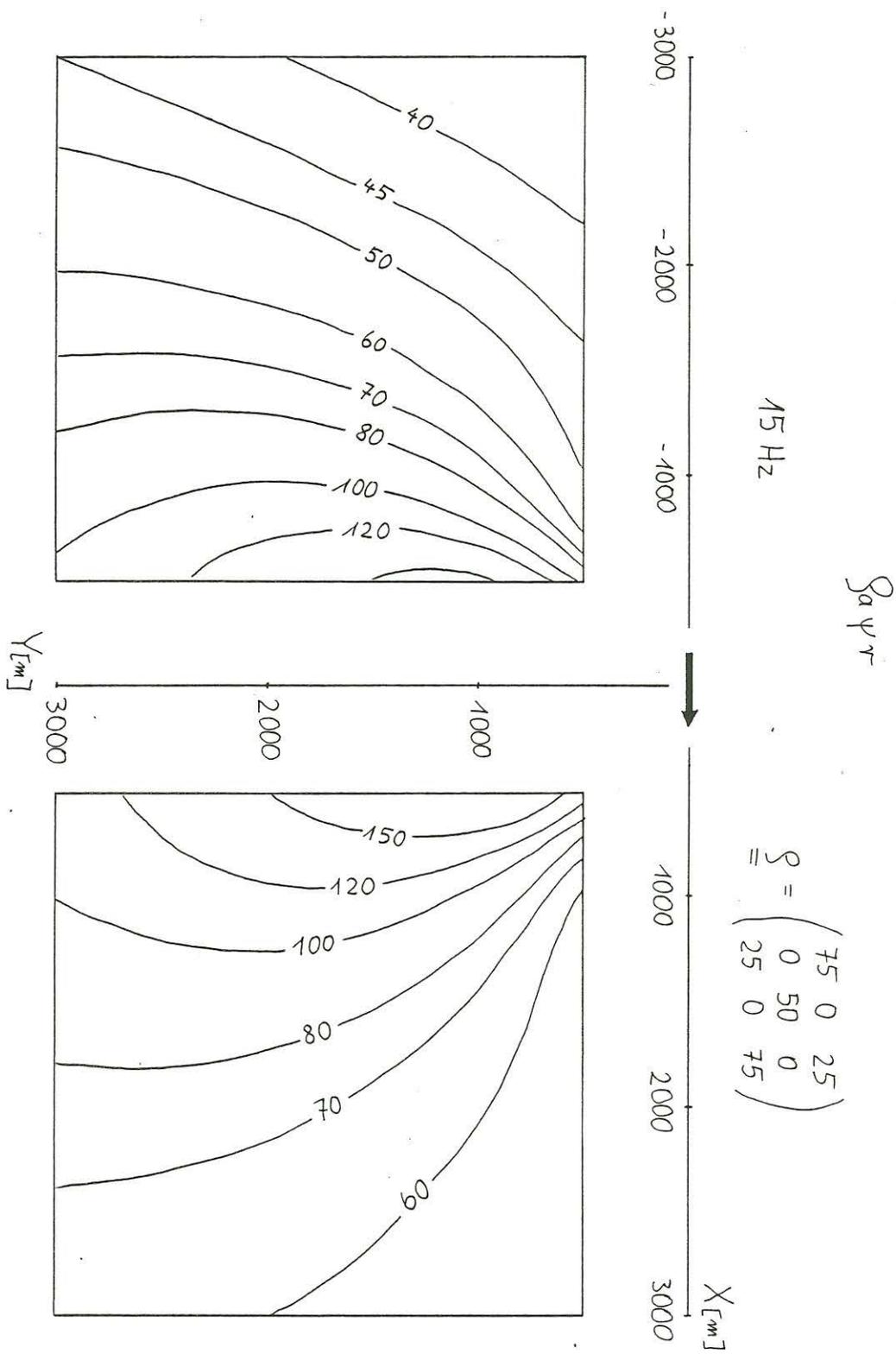
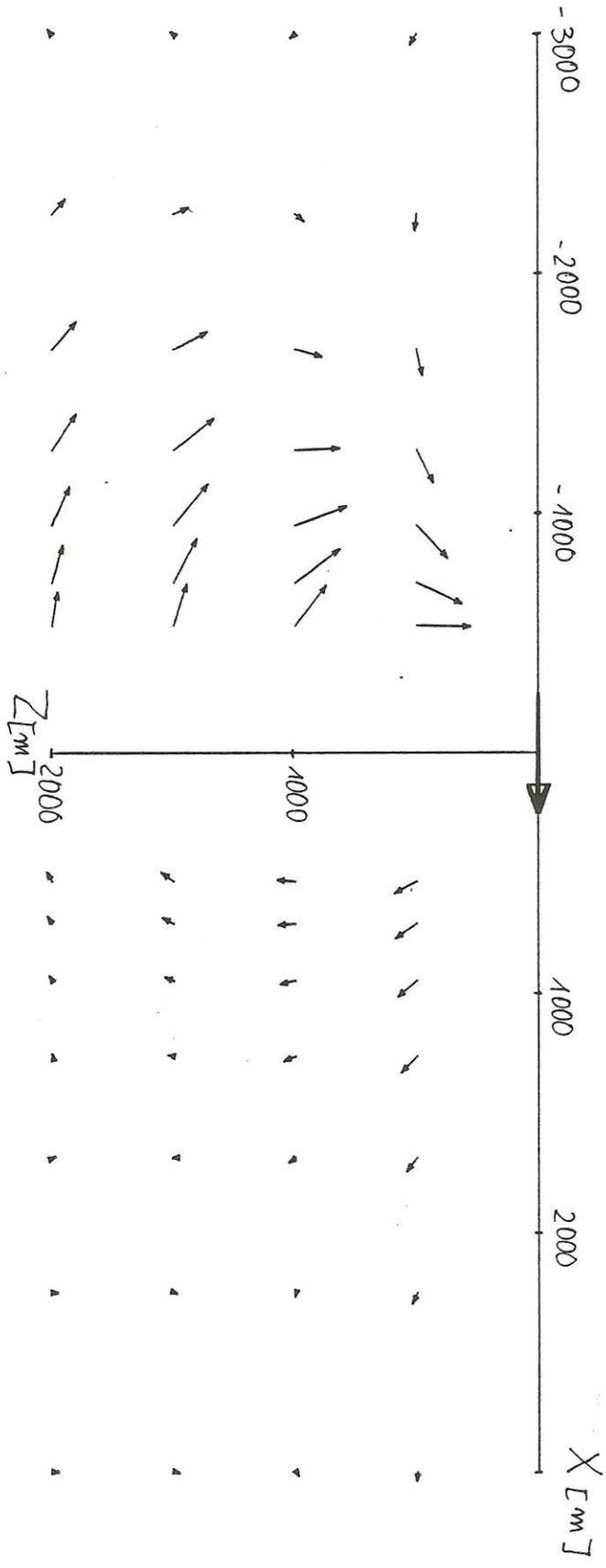


Abbildung 2: Isolinenkarte des scheinbaren spezifischen Widerstandes über einem anisotropen Halbraum

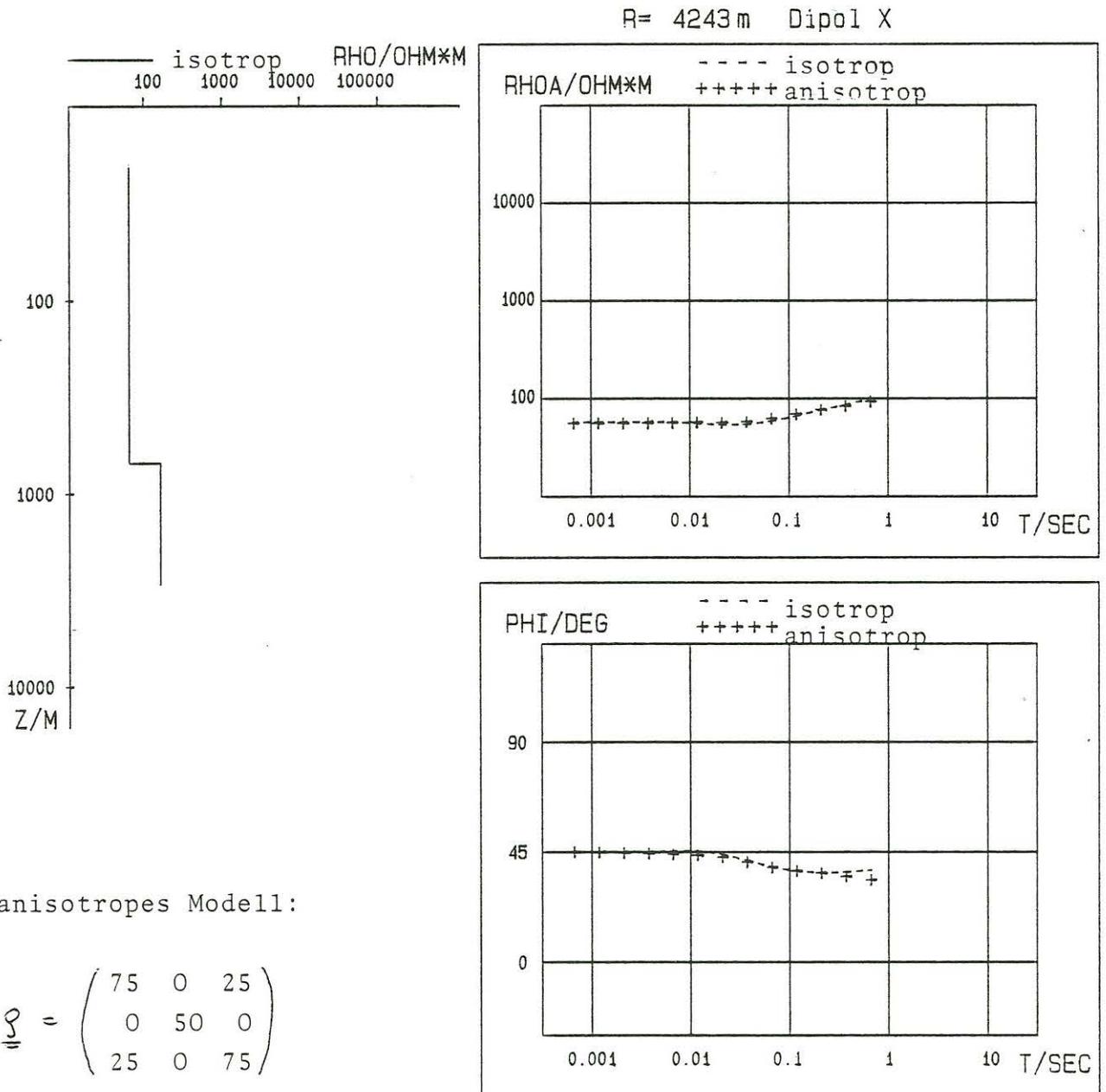


$$S = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 25 \\ 0 & 50 & 0 \\ 25 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

E - Feld

15 Hz

Abbildung 3: Richtungen des elektrischen Feldes in der x-z-Ebene eines anisotropen Halbraums



anisotropes Modell:

$$\underline{\underline{\rho}} = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 25 \\ 0 & 50 & 0 \\ 25 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

isotropes Modell:

	5.81E+01	1.48E+02
RHO/OHM*M		
	7.10E+02	
D/M		

Abbildung 4: Anpassung eines isotropen Zweischichtmodells an die Daten eines anisotropen Halbraums