

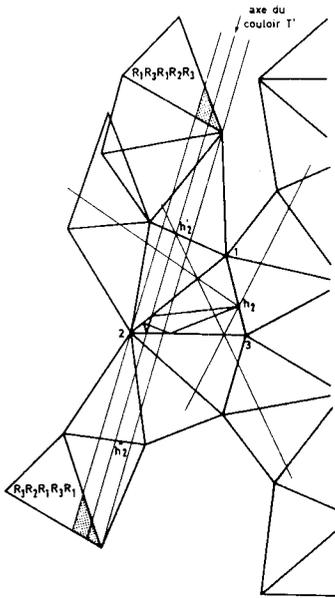
**Travaux de
Michel GAUDIN**

CEA Saclay - Service de Physique Théorique

Modèles exactement résolus



**Avenue du Hoggar
Zone Industrielle de Courtabœuf
B.P. 112
F-91944 Les Ulis cedex A, France**



Document de couverture :

La translation $T' = (R_1R_3R_1R_2R_3)^2$ et le couloir associé. La trajectoire pentagonale singulière correspondant à l'axe du couloir.

M. Gaudin, figure 3 p.407 dans "Réduction du problème du billard quantique triangulaire".

ISBN : 2-86883-264-4

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective", et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite" (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© Les Editions de Physique 1995

Les Editions de Physique

France

Avenue du Hoggar
Zone Industrielle de Courtabœuf
B.P. 112
91944 Les Ulis cedex A

Tel.: (33-1) 69 18 75 75

Fax.: (33-1) 69 28 84 91

Serveur: <http://www.ed-phys.fr>

USA

PCG Inc.
875-81 Massachusetts
Avenue Cambridge MA
02139 USA

Fax.: (1) 617 354 6875

Préface

A l'occasion des 60 ans de Michel Gaudin, les membres du Service de Physique Théorique de Saclay ont voulu lui rendre hommage. Ceux qui ont été tant marqués par son originalité et sa curiosité intellectuelle ont pensé que la meilleure façon de l'honorer était d'offrir aux physiciens une synthèse de son œuvre scientifique.

Michel Gaudin, ingénieur des Ponts, est entré au CEA en 56 grâce à G. Vendryès pour y travailler deux ans en Neutronique expérimentale. Après la session des Houches de 58, il entre finalement au service de physique théorique dirigé alors par C. Bloch, service où il aura effectué toute sa carrière à l'exception d'une année chez C.N. Yang à l'université de Stony Brook en 1970.

Ce recueil contient essentiellement ce qu'on appelle, pour être bref, des solutions exactes à des problèmes de physique dont la formulation est simplifiée en un modèle. Par là, j'entends que l'on peut, presque toujours, s'intéresser au sujet traité sans être un spécialiste. Sa lecture nécessite néanmoins certaines connaissances de physique et de mathématiques, et peut conduire à consulter des ouvrages de référence. Je ne connais pas d'article de Michel Gaudin qui ne m'ait appris une méthode d'analyse ou une technique de raisonnement, et dans tous les domaines ses travaux m'ont apporté l'éclairage profondément vivifiant d'un physicien imprégné de culture classique. Son style presque littéraire peut surprendre, il s'accorde avec une approche artisanale des problèmes et il faut, pour le lire, faire l'effort de suivre le cheminement exigeant et fécond de sa pensée. Je souhaite que cet ouvrage puisse être une source d'inspiration en donnant l'exemple d'une personnalité de la physique française parmi les plus créatives, bien que restée fidèle à elle-même en se tenant à l'écart des modes. Je crois qu'il n'est pas exagéré d'ajouter que certains des articles que nous reproduisons participent à des démarches originales qui ont ouvert des voies en physique théorique et en mathématiques. Ils ont été regroupés dans cinq chapitres :

Le premier traite des propriétés statistiques des ensembles de matrices sur lesquelles M. Gaudin a travaillé durant ses premières années à Saclay. Les articles contiennent entre autres la dérivation de la loi limite des espacements de niveaux.

Le deuxième chapitre est consacré à la mécanique statistique. Deux articles en particulier concernent les propriétés d'un gaz de particules qui se repoussent selon les lois de l'électrostatique à deux dimensions.

Le troisième chapitre regroupe les travaux sur les systèmes quantiques intégrables qui ont occupé leur auteur pendant une partie importante de sa carrière. Il commence par sa thèse non publiée, jusqu'ici, consacrée à l'étude d'un modèle de fermions en interaction. On y trouvera en outre ses fameux résultats sur la normalisation des états de Bethe, les propriétés thermodynamiques de la chaîne XXZ ainsi que l'introduction de la méthode algébrique pour diagonaliser une classe d'Hamiltoniens de spin.

Le quatrième chapitre rassemble des travaux sur des modèles non-intégrables, soit résolus complètement, soit réduits jusqu'à un certain point. Un exemple est le problème du spectre du Laplacien dans un triangle.

Le dernier chapitre contient un article non publié qui développe un algorithme pour calculer un Lagrangien effectif de fermions couplés à un champ de jauge.

Je remercie chaleureusement M. A. Landesman et Mme J. Berger pour tout le soin qu'ils ont apporté à la préparation et à l'édition de ce livre.

Je terminerai en évoquant le souvenir de Claude Itzykson. Sa haute considération pour l'oeuvre de M. Gaudin l'avait conduit à en encourager vivement la publication. Survenue pendant la préparation de cet ouvrage, sa mort, qui nous laisse profondément choqués, est une perte immense pour la physique française.

V. Pasquier

Table des matières

A. Ensembles de matrices	1
On the Density of Eigenvalues of a Random Matrix	3
Sur la loi limite de l'espacement des valeurs propres d'une matrice aléatoire	13
Une famille à un paramètre d'ensembles unitaires	25
Calculation of a Partition Function Defined in the Statistical Theory of Nuclear Reactions	57
B. Mécanique statistique	71
Sur le développement de la grande fonction de partition pour des systèmes de particules identiques	73
Gaz Coulombien discret à une dimension	93
L'isotherme critique d'un plasma sur réseau ($\beta = 2, d = 2, n = 2$)	105
Les premiers termes de l'énergie libre dans le modèle de Feynman pour la transition λ	121
Méthode d'intégration sur les variables d'énergie dans les graphes de la théorie des perturbations	125
C. Systèmes intégrables	153
Thèse soutenue le 21 Novembre 1967 (Université Paris): Étude d'un modèle à une dimension pour un système de fermions en interaction	155
<i>Détermination du spectre d'énergie</i>	155
1. Introduction	155
2. Spin total et type de symétrie [14]	159
3. Forme générale d'une solution élémentaire	160
4. Les conditions de symétrie	161
5. Les conditions aux limites	165
6. Paramétrisation des ensembles $\{k\}$ par l'ensemble $\{q\}$	168
7. Les coefficients de la fonction d'onde dans le secteur initial	170
8. Le cas du spin $S = 0$	174
9. Le cas général de spin S	175
10. Caractère complet de la solution	178

<i>Quelques propriétés de l'état fondamental</i>	185
11. <i>Étude des équations couplées</i>	185
12. <i>Nature du gaz attractif</i>	190
13. <i>Voisinage de $V = 0$ à volume fini</i>	196
14. <i>Énergie de l'état fondamental de spin donné : cas attractif</i>	200
15. <i>Énergie de l'état fondamental (spin 0) : cas attractif</i>	204
16. <i>Énergie de l'état fondamental (spin 0) : cas répulsif</i>	211
17. <i>Excitations élémentaires</i>	214
18. <i>Conclusion</i>	221
<i>Appendices</i>	223
Etats propres et valeurs propres de l'Hamiltonien d'appariement	247
Un système à une dimension de fermions en interaction	279
Boundary Energy of a Bose Gas in One Dimension	281
Bose Gas in One Dimension. I. The Closure Property of the Scattering Wavefunctions	289
Bose Gas in One Dimension. II. Orthogonality of the Scattering States	293
Thermodynamics of the Heisenberg-Ising Ring for $\Delta \geq 1$	297
Diagonalisation d'une classe d'Hamiltoniens de spin	301
Matrices R de dimension infinie	313
The Periodic Toda Chain and a Matrix Generalization of the Bessel Function Recursion Relations	323
Une preuve de la relation étoile-triangle du modèle elliptique Z_N de Zamolodchikov	333
D. Modèles exacts non intégrables	345
Solution exacte d'un problème modèle à trois corps. Etat lié	347
Sur le problème de deux ou trois électrons en présence d'un moment localisé	363
Spectre du noyau intégral $(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$	389
Réduction du problème du billard quantique triangulaire	403
E. Divers	417
Algorithme invariant pour le développement d'un Lagrangien effectif en polynômes dérivatifs locaux	419

Ensembles de matrices

ON THE DENSITY OF EIGENVALUES OF A RANDOM MATRIX

M. L. MEHTA † and M. GAUDIN

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette (S. et O.) France

Received 5 May 1960

Abstract: An exact expression for the density of eigenvalues of a random-matrix is derived. When the order of the matrix becomes infinite, it can be seen very directly that it goes over to Wigner's "semi-circle law".

1. Introduction

In heavy nuclei, the interactions are so numerous and so complex that almost all the theories are statistical in nature and they try to explain only the average properties like level-density, mean square angular momenta, distribution of level-spacings, transition probability, etc. ††.

In this paper, which is essentially the continuation of the preceding one ¹⁾, we start from the random matrix hypothesis and calculate exactly the level-density. This, in the proper limit, will be found to be the famous "semi-circle law" of Wigner ²⁾. The proof here is, however, mathematically rigorous.

The joint probability frequency function of the eigenvalues $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ of an $n \times n$ hermitian matrix, whose elements are randomly and independently distributed (these distributions being invariant under unitary transformations), is given by ³⁾

$$P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \mu_0^{-1} e^{-\sum_{i=1}^n \theta_i^2} \prod_{i < j} |\theta_i - \theta_j|, \quad (1)$$

with

$$\mu_0 = n! 2^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{g=1}^n \Gamma(\frac{1}{2}g). \quad (2)$$

To get the level-density one must integrate the expression (1) over all the variables but one, i.e.

$$P(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(\theta, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n) d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_n. \quad (3)$$

We shall do it explicitly for $n = 2m$. As in the preceding paper, we overcome the serious difficulty of the unfavourable symmetrical nature of the integrand in eq. (3) by integrating over half the variables, $\theta_3, \theta_5, \dots$, say. We then drop the ordering of the variables, expressing the result in determinantal form.

† On leave of absence from Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

†† For a fairly extensive list of references see the preceding paper.

After some reductions this determinant will be transformed into the integral of the square of another one whose elements are Hermite polynomials. This will permit us to use the orthonormality properties of the harmonic oscillator wave functions. In this form the problem becomes that of the density of a one dimensional Fermi-gas. By taking the limit when $n \rightarrow \infty$, one gets the "semi-circle law":

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sqrt{n-\theta^2} & \text{for } \theta < \sqrt{n}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

2. Symmetrization and Reduction

By definition, we have

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{(n-1)!} P(\theta) &= \int_{-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{x_1=\theta} dx_2 dx_3 \dots dx_n \\ &+ \int_{-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{x_2=\theta} dx_1 dx_3 \dots dx_n \\ &+ \dots + \dots \\ &= \mathcal{O}(\theta) + \mathcal{E}(\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathcal{O}(\theta)$ includes the integrals in which an x with an odd index is put equal to θ , while $\mathcal{E}(\theta)$ includes the other terms. Introducing the functions

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^x e^{-y^2} y^i dy, \quad (6)$$

and the step-function

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > \theta, \\ 0 & \text{if } x < \theta, \end{cases} \quad (7)$$

$\mathcal{O}(\theta)$ is readily seen to be

$$\mathcal{O}(\theta) = - \int_{-\infty < x_2 < x_4 < \dots < \infty} e^{-(\theta^2 + x_2^2 + x_4^2 + \dots)} \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon(x_2) & 0 & \varepsilon(x_4) & 0 & \dots \\ 1 & F_0(x_2) & 1 & F_0(x_4) & 1 & \dots \\ \theta & F_1(x_2) & x_2 & F_1(x_4) & x_4 & \dots \\ \theta^2 & F_2(x_2) & x_2^2 & F_2(x_4) & x_4^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} dx_2 dx_4 \dots \quad (8)$$

For simplicity, we shall take n even, $n = 2m$. As for $\mathcal{E}(\theta)$ we may integrate over x_2, x_4, \dots in a similar way by introducing the functions

$$\phi_i(x) = \int_x^\infty e^{-y^2} y^i dy, \tag{9}$$

and by an obvious change of the variables to their negatives, it is seen that

$$\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{O}(-\theta). \tag{10}$$

Now the integrand in eq. (8) being symmetric in x_2, x_4, \dots, x_{2m} we can integrate over these variables separately and independently over the whole range and divide the result by $m!$. It is easy to verify directly (see appendix I of the preceding article) by expanding with respect to the first column, for example, that

$$\mathcal{O}(\theta) = \mathcal{O}_{\text{even}}(\theta) + \mathcal{O}_{\text{odd}}(\theta), \tag{11}$$

with

$$\mathcal{O}_{\text{even}}(\theta) = -e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & \phi_1(\theta) & \phi_3(\theta) & \dots & \phi_{2m-1}(\theta) \\ 1 & f_0^1 & f_0^3 & \dots & f_0^{2m-1} \\ \theta^2 & f_2^1 & f_2^3 & \dots & f_2^{2m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & f_{2m-2}^1 & f_{2m-2}^3 & \dots & f_{2m-2}^{2m-1} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

and

$$\mathcal{O}_{\text{odd}}(\theta) = e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & \theta & \theta^3 & \dots & \theta^{2m-1} \\ \phi_0(\theta) & f_0^1 & f_0^3 & \dots & f_0^{2m-1} \\ \phi_2(\theta) & f_2^1 & f_2^3 & \dots & f_2^{2m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2m-2}(\theta) & f_{2m-2}^1 & f_{2m-2}^3 & \dots & f_{2m-2}^{2m-1} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

where the f_i^j are the numbers

$$f_i^j = F_i^j - F_j^i, \tag{14}$$

with

$$F_i^j = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F_i(x) x^j dx = \int_{-\infty < y < x < +\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^j y^i dx dy. \tag{15}$$

The following recurrence relations are easily established:

$$f_i^j - \frac{1}{2}(j-1)f_i^{j-2} = 2^{-\frac{1}{2}(i+j)} \Gamma\left(\frac{i+j}{2}\right) \equiv \xi_{i+j-1}, \tag{16}$$

say, and

$$\phi_j(\theta) - \frac{1}{2}(j-1)\phi_{j-2}(\theta) = \frac{1}{2}\theta^{j-1}e^{-\theta^2}. \tag{17}$$

Using these recurrence relations it is elementary to reduce the determinants (12) and (13) to the forms

$$\mathcal{O}_{\text{even}} = -\frac{1}{2}e^{-2\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \theta^2 & \dots & \theta^{2m-2} \\ 1 & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \theta^2 & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

and

$$\mathcal{O}_{\text{odd}} = \theta e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \theta^2 - 1 & \dots & \theta^{2m-2} - (m-1)\theta^{2m-4} \\ \phi_0(\theta) & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \phi_2(\theta) & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{2m-2}(\theta) & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Now, as

$$\phi_i(x) = (-)^i F_i(-x), \quad (21)$$

we can write the result as

$$\frac{\mu_0}{(2m-1)!} P(\theta) = T_1(\theta) + T_2(\theta) + T_3(\theta), \quad (22)$$

with

$$T_1(\theta) = 2 \mathcal{O}_{\text{even}}(\theta), \quad (23)$$

$$T_2(\theta) = -\theta e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \theta^2 & \dots & \theta^{2m-2} \\ \rho_0(\theta) & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \rho_2(\theta) & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{2m-2}(\theta) & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}, \quad (24)$$

and

$$T_3(\theta) = \theta e^{-\theta^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\theta^2 & \dots & (m-1)\theta^{2m-4} \\ \rho_0(\theta) & \xi_0 & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m-2} \\ \rho_2(\theta) & \xi_2 & \xi_4 & \xi_6 & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{2m-2}(\theta) & \xi_{2m-2} & \xi_{2m} & \xi_{2m+2} & \dots & \xi_{4m-4} \end{vmatrix}, \quad (25)$$

where the functions $\rho_{2i}(\theta)$ are defined by

$$\rho_{2i}(\theta) = \int_{-\theta}^{+\theta} e^{-x^2} x^{2i} dx. \quad (26)$$

We may note that

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\theta} e^{\theta^2} T_2(\theta) \right\} = -2e^{\theta^2} T_3(\theta) + 2e^{\theta^2} T_1(\theta). \quad (27)$$

One can easily show that (see appendix III of the preceding paper)

$$\begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2m} \\ b_0 & \xi_0 & \xi_2 & \dots & \xi_{2m} \\ b_2 & \xi_2 & \xi_4 & \dots & \xi_{2m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2m} & \xi_{2m} & \xi_{2m+2} & \dots & \xi_{4m} \end{vmatrix} \quad (28)$$

$$= -\frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_m e^{-(v_1^2 + \dots + v_m^2)} \begin{vmatrix} a_0 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & y_1^2 & \dots & y_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2m} & y_1^{2m} & \dots & y_m^{2m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_0 & 1 & \dots & 1 \\ b_2 & y_1^2 & \dots & y_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2m} & y_1^{2m} & \dots & y_m^{2m} \end{vmatrix}.$$

And hence we have

$$T_1(\theta) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{m-1} e^{-2(\theta^2 + v^2 + \dots + v_{m-1}^2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^2 & y_1^2 & \dots & y_{m-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & y_1^{2m-2} & \dots & y_{m-1}^{2m-2} \end{vmatrix}^2, \quad (29)$$

as well as

$$\frac{1}{\theta} T_2(\theta) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{m-1} \int_{-\theta}^{+\theta} dx e^{-(\theta^2 + x^2) - 2(v_1^2 + \dots + v_{m-1}^2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^2 & y_1^2 & \dots & y_{m-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{2m-2} & y_1^{2m-2} & \dots & y_{m-1}^{2m-2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^2 & y_1^2 & \dots & y_{m-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{2m-2} & y_1^{2m-2} & \dots & y_{m-1}^{2m-2} \end{vmatrix}. \quad (30)$$

3. Transformation to Oscillator Wave-Functions

In the equations (29) and (30) let us put

$$z = \theta\sqrt{2}, \quad x_i = y_i\sqrt{2}, \quad v = x\sqrt{2}.$$

As the Hermite polynomials are linearly independent, we can express the powers of the variables as linear combinations of them. Then in each row of the determinants we can retain only those Hermite polynomials whose indices are the highest. We can also take the exponentials inside. Multiplying by the proper normalization factors according to

$$u_i(x) = (\sqrt{\pi} 2^i i!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_i(x),$$

we get

$$T_1(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}(m-1)} m^{-1}}{(m-1)! \prod_{i=0}^{m-1} \{2^{-4i} \sqrt{\pi} (2i)!\}} \left| \begin{array}{cccc} u_0(z) & u_0(x_1) & \dots & u_0(x_{m-1}) \\ u_2(z) & u_2(x_1) & \dots & u_2(x_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2m-2}(z) & u_{2m-2}(x_1) & \dots & u_{2m-2}(x_{m-1}) \end{array} \right|^2, \quad (31)$$

and

$$\frac{1}{\theta} T_2(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}m-1} m^{-1}}{(m-1)! \prod_{i=0}^{m-1} \{2^{-4i} \sqrt{\pi} (2i)!\}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{m-1} \int_{-z}^{+z} dv$$

$$\times \left| \begin{array}{cccc} u_0(z) & u_0(x_1) & \dots & u_0(x_{m-1}) \\ u_2(z) & u_2(x_1) & \dots & u_2(x_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2m-2}(z) & u_{2m-2}(x_1) & \dots & u_{2m-2}(x_{m-1}) \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cccc} u_0(v) & u_0(x_1) & \dots & u_0(x_{m-1}) \\ u_2(v) & u_2(x_1) & \dots & u_2(x_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2m-2}(v) & u_{2m-2}(x_1) & \dots & u_{2m-2}(x_{m-1}) \end{array} \right|. \quad (32)$$

Multiplying the determinants and using the orthonormality properties of the oscillator wave functions $u_i(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(x) u_j(x) dx = \delta_{ij},$$

we find

$$T_1(\theta) = \sqrt{2} \frac{\mu_0}{(2m)!} \sum_{i=0}^{m-1} u_{2i}^2(z), \quad (33)$$

and

$$\frac{1}{\theta} T_2(\theta) = \frac{\mu_0}{(2m)!} \sum_{i=0}^{m-1} u_{2i}(z) \int_{-z}^{+z} u_{2i}(v) dv, \quad (34)$$

with $z = \theta\sqrt{2}$.

Eqs. (22), (27), (33) and (34) give

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ u_{2i}^2(z) - u'_{2i}(z) \int_0^z u_{2i}(v) dv \right\}. \quad (35)$$

Using the recurrence relation

$$\sqrt{2}u'_n = \sqrt{n}u_{n-1} - \sqrt{n+1}u_{n+1},$$

and its integral, together with $u_{2i+1}(0) = 0$, we can transform the second term in the brackets of eq. (35) to the more suitable form

$$\sqrt{2} \sum_{i=0}^{m-1} u'_{2i}(z) \int_0^z u_{2i}(v) dv = -\sqrt{2} \sum_{i=0}^{m-2} u_{2i+1}^2(z) - \sqrt{2m-1} u_{2m-1}(z) \int_0^z u_{2m-2}(v) dv.$$

Therefore the final result is

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{2m-2} u_i^2(z) + \sqrt{2m-1} u_{2m-1}(z) \int_0^z u_{2m-2}(x) dx. \quad (36)$$

4. The Limit $m \rightarrow \infty$

Equation (36) is exact. If the second term on the right hand side were absent, the problem would be exactly that of finding the density of a one dimensional degenerate Fermi-gas in a quadratic potential. We shall use this analogy to derive the limit in a simple way.

The equation satisfied by u_i is

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + z^2\right)u_i = (2i+1)u_i \quad (37)$$

and therefore, classically, the Fermi-momentum for our problem is given by

$$P_F^2 = 2(2m-2) - z^2 \sim 4m - z^2, \quad m \rightarrow \infty.$$

Also, in eq. (37) we have $\hbar = 1$, so that the density of the Fermi-gas is given by

$$\delta_F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-p_F}^{+p_F} dp = \frac{1}{\pi} \sqrt{4m - z^2} & \text{for } z^2 \leq 4m, \\ 0 & \text{for } z^2 > 4m. \end{cases}$$

Replacing the sum in (36) by this classical limit, and neglecting the second term, we get

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \sim \begin{cases} \sqrt{2} \frac{1}{\pi} \sqrt{4m - z^2} & \text{for } z^2 \leq 4m, \\ 0 & \text{for } z^2 > 4m. \end{cases} \quad (38)$$

which is the same as eq. (4).

One can estimate (see appendix) that the neglected term is of the order of $1/\sqrt{m}$ when $z^2 \ll 4m$. For $z^2 \gg 4m$, the function u_{2m-1} decreases exponentially. In the neighbourhood of $z^2 = 4m$ we can say nothing, as in this neighbourhood u_{2m-1} is known to be very large.

We are thankful to Dr. C. Bloch for suggesting the problem, guidance and many helpful discussions throughout the work. One of us (M. L. M.) wishes to express his thanks to the Commissariat à l'Énergie Atomique for the kind hospitality and the award of a de Broglie fellowship.

Appendix

We divide the discussion into three parts.

1) $z \gg \sqrt{2n}$

In the differential equation (37), for $i = n$, putting

$$u'_n/u_n = -\sqrt{z^2 - (2n+1)}v(z),$$

it is easily seen ⁴⁾ that $v(z)$ has an asymptotic expansion in powers of $\{z^2 - (2n+1)\}^{-\frac{1}{2}}$ starting with the constant term unity:

$$v(z) \sim 1 + \frac{a_1}{(z^2 - (2n+1))^{\frac{1}{2}}} + \dots;$$

hence

$$u_n(z) \sim A \exp \left\{ - \int^z \sqrt{x^2 - 2n - 1} dx + \dots \right\},$$

where A is a const.

2) $z \ll \sqrt{2n}$

Applying the second mean value theorem to

$$u_n = - \frac{u_n''}{2n+1-z^2},$$

we get

$$\begin{aligned} \int_0^z u_n(x) dx &= \frac{1}{2n+1-z^2} \{u_n'(\xi) - u_n'(z)\} \quad (\text{where } 0 \leq \xi \leq z) \\ &\leq \sqrt{2n+2} \{|u_{n-1}(\xi)| + |u_{n+1}(\xi)| + |u_{n-1}(z)| + |u_{n+1}(z)|\}, \end{aligned}$$

where we have used the recurrence relation

$$\sqrt{2} u_n' = \sqrt{n} u_{n-1} - \sqrt{n+1} u_{n+1}.$$

For estimating u_n , we may apply the WKB approximation or asymptotic methods ⁴⁾ to get

$$|u_n(z)|^2 \lesssim (2n+1-z^2)^{-\frac{1}{2}};$$

collecting all these, we have the result stated in the text.

3) $z \sim \sqrt{2n}$

As u_n^2 approaches in the mean to the classical limit

$$|u_n(z)|^2 \sim \pi^{-1} (2n+1-z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

we know that $u_n(z)$ is large for $z \sim \sqrt{2n}$.

References

- 1) M. L. Mehta, Nuclear Physics **18** (1960) 395
- 2) E. P. Wigner, 4th Canadian Math. Cong. Proc. (1957) 174
- 3) P. L. Hsu, Ann. Eug. **9** (1939) 250;
D. N. Nanda, Ann. Math. Stat. **19** (1948) 47;
C. E. Porter and N. Rosenzweig, Tiedea-katemian Toimituksia
- 4) See for example N. G. de Bruijn, Asymptotic methods in analysis (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958) §§ 9.4, 9.5

ADDENDUM AND ERRATUM

In an article with the title "On the density of eigenvalues of a random matrix" (this journal, **18** (1960) 420) we estimated the dominant behaviour of the density of eigenvalues of a random matrix of order n when n is large. However, the sum of the squares of the first n oscillator wave functions can be expressed explicitly [see Bateman manuscript project, Higher Transcendental functions, ed. by A. Erdélyi (New York, Toronto, London), Vol. 2, Ch. 10, and Szegő, Orthogonal Polynomials (New York)], so that the equation (36) of our article mentioned above may be replaced by

$$2mP\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \left\{ (2m-1)u_{2m-2}^2(z) - \sqrt{(2m-2)(2m-1)}u_{2m-3}(z)u_{2m-1}(z) \right\} \\ + \sqrt{2m-1}u_{2m-1}(z) \int_0^z u_{2m-2}(x)dx.$$

As asymptotic expansions of $u_n(x)$ for n large are known [apart from those already mentioned, one may see also F. Tricomi, Ann. Mat. Pura. Appl. **28** (1949) 263, and A. Erdélyi in Golden Jubilee Commemoration volume of the Indian Mathematical Society, 1959] for all the three cases according to whether $x > \sqrt{2n}$, $x \approx \sqrt{2n}$ or $x < \sqrt{2n}$, one can get not only the "semi-circle law", but higher terms as well.

A correction to be incorporated in our article: on page 427, twelfth line from above the factor before the bracket should read as

$$\sqrt{2n+2}/2(2n+1-z^2).$$

M. L. Mehta and M. Gaudin

SUR LA LOI LIMITE DE L'ESPACEMENT DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE ALÉATOIRE

MICHEL GAUDIN

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette (S. et O.), France

Reçu le 16 Janvier 1961

Abstract: The distribution function of the level spacings for a random matrix in the limit of large dimensions is expressed by means of a rapidly converging infinite product which has been used for a numerical calculation. Comparison with Wigner's hypothesis gives a very good agreement.

1. Introduction

Cet article fait suite à un travail de M. L. Mehta ¹⁾, où la fonction de distribution de l'espacement des valeurs propres d'une matrice symétrique d'ordre n , à coefficients aléatoires, est donnée explicitement. Adoptant les hypothèses de Mehta, dont nous désignerons l'article par (M), nous nous proposons ici de donner la forme limite de cette distribution lorsque n augmente indéfiniment. L'expression obtenue dérive d'un produit infini rapidement convergent, ce qui nous a permis de présenter une table de valeurs numériques dans tout l'intervalle utile. La comparaison avec la fonction de Wigner ²⁾ $\rho_W(S)$ pour la densité de probabilité d'un espacement S , montre que celle-ci diffère de moins de 5 % de la fonction exacte pour $S/D < 2$, et constitue donc une excellente approximation dans la région où cette fonction n'est pas très petite.

2. Formules de Base

Nous reprenons les notations de (M). La fonction $P(\theta_1, \theta_2)$ (voir (M), § 5) est la densité de probabilité d'observer tel niveau en θ_1 et tel autre en θ_2 , sans aucun niveau dans l'intervalle θ_1, θ_2 . Dans la région où la densité de niveaux est constante et égale à $D^{-1} = 2\sqrt{n}/\pi$, il est plausible que $P(\theta_1, \theta_2)$ ne dépende que de l'espacement $S = \theta_2 - \theta_1$. Il a donc suffi de considérer $P(-\theta, \theta)$, que la formule (M.48) donne sous la forme suivante:

$$P(-\theta, \theta) = \frac{(2m-2)!}{\mu_0} \frac{d}{d\theta} (e^{-2\theta^2} R_1(\theta)), \quad (1)$$

avec

$$R_1(\theta) = \frac{2^{m-1}}{(m-1)!} \int_{\theta}^{\infty} dy_1 \dots \int_{\theta}^{\infty} dy_{m-1} e^{-2(y_1^2 + \dots + y_{m-1}^2)} \prod_i (y_i^2 - \theta^2)^2 \prod_{i < j} (y_i^2 - y_j^2)^2, \quad (2)$$

et $n = 2m$. Si nous définissons $\phi_m(\theta)$ par l'égalité

$$\phi_m(\theta) = \int_{\theta}^{\infty} dy_1 \dots \int_{\theta}^{\infty} dy_m e^{-2(y_1^2 + \dots + y_m^2)} \prod_{i < j}^m (y_i^2 - y_j^2)^2, \quad (3)$$

nous pourrons combiner (1) et (2) sous la forme

$$2m(2m-1)P(-\theta, \theta) = \frac{2m!2^{m-1}}{m!\mu_0} \frac{d^2}{d\theta^2} \phi_m(\theta). \quad (4)$$

Par la suite nous ne nous soucierons pas de la normalisation de $P(-\theta, \theta)$ telle qu'elle est donnée par (3) et (4). La formule (M.47) s'écrit en effet

$$\int_0^{\infty} 2m(2m-1)DP(-\theta, \theta)d(2\theta) = 1. \quad (5)$$

La densité de probabilité $p(S)$ de l'espacement S est donc égale à $2m(2m-1)DP(-\theta, \theta)$, et la normalisation est déterminée par les équations

$$\int_0^{\infty} p(S)d\left(\frac{S}{D}\right) = 1, \quad \int_0^{\infty} Sp(S)d\left(\frac{S}{D}\right) = D. \quad (6)$$

Par commodité, nous rapporterons $\phi_m(\theta)$ à sa valeur à l'origine et poserons $\Psi_m(\theta) = \phi_m(\theta)/\phi_m(0)$. Notre but est maintenant de chercher la forme limite de la fonction $\Psi_m(\theta)$ lorsque m augmente indéfiniment et que la variable θ reste de l'ordre de l'espacement moyen des niveaux, c'est-à-dire lorsque $\theta/D = 2\theta\sqrt{2m}/\pi$ tend vers une limite finie. Nous poserons $2\theta\sqrt{2m} = t$, de sorte que l'on a

$$\frac{S}{D} = \frac{2\theta}{D} = \frac{2t}{\pi}.$$

Soit $\Psi(t)$ la limite de $\Psi_m(\theta)$ dans ces conditions; d'après (4) la fonction $p(S)$ est proportionnelle à $d^2\Psi/dt^2$ et les égalités (6) s'écrivent

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2\Psi}{dt^2} \frac{2}{\pi} dt \propto 1, \quad \int_0^{\infty} t \frac{d^2\Psi}{dt^2} \frac{4D}{\pi^2} dt \propto D,$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2}{\pi}, \quad \text{puisque l'on a } \Psi(0) = 1.$$

La fonction $p(S)$ s'écrit donc

$$p(S) = \frac{1}{4}\pi^2 \frac{d^2\Psi}{dt^2}, \quad (7)$$

et la fonction de distribution $F(S)$, probabilité d'un espacement inférieur à S est égale à

$$F(S) = \int_0^S p(S')d\left(\frac{S'}{D}\right) = 1 + \frac{1}{2}\pi \frac{d\Psi}{dt}. \quad (8)$$

3. La Fonction $\Psi_m(\theta)$

Dans l'intégrale (3) qui nous donne $\phi_m(\theta)$, effectuons le changement de variables

$$\begin{aligned} \sqrt{2} y_i &= z_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sqrt{2} \theta &= \tau. \end{aligned}$$

Nous obtenons pour $\phi_m(\theta)$, à un facteur constant près,

$$\phi_m(\theta) = \phi_m\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) \propto \int_{\tau}^{\infty} dz_1 \dots \int_{\tau}^{\infty} dz_m e^{-(z_1^2 + \dots + z_m^2)} \Delta^2(z_1, z_2, \dots, z_m),$$

où $\Delta(z_1, z_2, \dots, z_m)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^4 & \dots & z_1^{2m-2} \\ 1 & z_2^2 & z_2^4 & \dots & z_2^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_m^2 & z_m^4 & \dots & z_m^{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Par une méthode déjà utilisée dans un précédent travail ³⁾, nous exprimons Δ en fonction des polynômes d'Hermite; chaque monôme z_i^{2p} qui figure dans Δ est en effet une forme linéaire de polynômes pairs de degré inférieur ou égal à $2p$. Nous avons donc

$$\Delta(z_1, z_2, \dots, z_m) \propto \begin{vmatrix} H_0(z_1) & H_2(z_1) & \dots & H_{2m-2}(z_1) \\ H_0(z_2) & H_2(z_2) & \dots & H_{2m-2}(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_0(z_m) & H_2(z_m) & \dots & H_{2m-2}(z_m) \end{vmatrix}.$$

Ceci nous permet d'exprimer $\phi_m(\tau/\sqrt{2})$ au moyen des fonctions normalisées de l'oscillateur harmonique $u_{2p}(z)$

$$\phi_m\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) \propto \int_{\tau}^{\infty} dz_1 \dots \int_{\tau}^{\infty} dz_m \begin{vmatrix} u_0(z_1) & u_2(z_1) & \dots & u_{2m-2}(z_1) \\ u_0(z_2) & u_2(z_2) & \dots & u_{2m-2}(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0(z_m) & u_2(z_m) & \dots & u_{2m-2}(z_m) \end{vmatrix}^2.$$

Les u_{2p} vérifient donc les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{2i}(z)u_{2j}(z)dz = \delta_{ij}.$$

Le théorème de Gram appliqué à (10) nous conduit à l'expression suivante:

$$\phi_m \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \propto \begin{vmatrix} \int_{\tau}^{\infty} u_0^2(z) dz & \int_{\tau}^{\infty} u_0(z) u_2(z) dz & \dots & \int_{\tau}^{\infty} u_0(z) u_{2m-2}(z) dz \\ \int_{\tau}^{\infty} u_2(z) u_0(z) dz & \int_{\tau}^{\infty} u_2^2(z) dz & \dots & \int_{\tau}^{\infty} u_2(z) u_{2m-2}(z) dz \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\tau}^{\infty} u_{2m-2}(z) u_0(z) dz & \int_{\tau}^{\infty} u_{2m-2}(z) u_2(z) dz & \dots & \int_{\tau}^{\infty} u_{2m-2}^2(z) dz \end{vmatrix}; \quad (11)$$

ϕ_m est donc un déterminant d'ordre m , d'éléments $\int_{\tau}^{\infty} u_{2i}(z) u_{2j}(z) dz = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2i} u_{2j} dz)$. Sa valeur à l'origine $\tau = 0$ se calcule simplement: les éléments non diagonaux sont nuls et les éléments diagonaux égaux à $\frac{1}{2}$, d'où la valeur de la fonction $\Psi_m(\tau/\sqrt{2}) = \phi_m(\tau/\sqrt{2})/\phi_m(0)$:

$$\Psi_m \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) = \det \left| \delta_{ij} - \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2i}(z) u_{2j}(z) dz \right|. \quad (12)$$

Ψ_m prend la valeur 1 pour $\tau = 0$ par définition, et la valeur 0 pour $\tau = \infty$, et reste toujours compris entre ces deux valeurs puisque, d'après (9), elle est décroissante.

4. La Fonction Ψ_m Comme Déterminant de Fredholm

La fonction Ψ_m , définie par (12), est le déterminant de Fredholm, pour la valeur $\lambda = 1$, relatif au noyau symétrique, continu, borné

$$K_m(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} u_{2k}(x) u_{2k}(y), \quad |x| \leq \tau, \quad |y| \leq \tau. \quad (13)$$

L'équation homogène de Fredholm s'écrit en effet

$$\lambda f(x) = \int_{-\tau}^{+\tau} K_m(x, y) f(y) dy, \quad (14)$$

où $f(x)$ est une fonction propre et λ la valeur propre correspondante.

A l'aide de la définition (13), l'équation (14) s'écrit

$$\lambda f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} u_{2k}(x) \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2k}(y) f(y) dy.$$

Posant $c_k = \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2k}(y) f(y) dy$, nous obtenons le système linéaire

$$\lambda c_q = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2k}(x) u_{2q}(x) dx, \quad q = 0, 1, \dots, m-1,$$

qui possède une solution, si $\det |\lambda \delta_{kq} - \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2k} u_{2q} dx| = 0$. Cette équation caractéristique possède m racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Nous avons donc

$$\det |\delta_{ij} - \int_{-\tau}^{+\tau} u_{2i} u_{2j} dz| = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_m),$$

qui est bien le déterminant de Fredholm de l'équation inhomogène correspondant à (14) pour $\lambda = 1$.

La formule de Christoffel ⁴⁾ donne une expression plus concise du noyau $K_m(x, y)$,

$$\begin{aligned}
 K_m(x, y) &= \sum_{k=0}^{m-1} u_{2k}(x)u_{2k}(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{2k} 2k!} H_{2k}(x)H_{2k}(y) \\
 &= \text{partie paire en } x \text{ de } \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{2^k k!} H_k(x)H_k(y) \tag{15} \\
 &= \text{partie paire en } x \text{ de } \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2^{2m}(2m-1)!} \frac{H_{2m}(x)H_{2m-1}(y) - H_{2m}(y)H_{2m-1}(x)}{x-y} \\
 &= \text{partie paire en } x \text{ de } \sqrt{m} \frac{u_{2m}(x)u_{2m-1}(y) - u_{2m}(y)u_{2m-1}(x)}{x-y}.
 \end{aligned}$$

5. Forme Limite de l'Équation (14) pour m Infini

Nous effectuons d'abord le changement de variables qui fait passer de $\tau = \theta\sqrt{2}$ à $t = 2\theta\sqrt{2m}$, en posant

$$\xi = 2x\sqrt{m}, \quad \eta = 2y\sqrt{m}.$$

L'équation homogène (14) s'écrit alors

$$\lambda f\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}\right) = \int_{-t}^{+t} \frac{1}{2\sqrt{m}} K_m\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}, \frac{\eta}{2\sqrt{m}}\right) f\left(\frac{\eta}{2\sqrt{m}}\right) d\eta. \tag{16}$$

Dans le domaine $|\xi| \leq t, |\eta| \leq t$, le noyau devient donc

$$\begin{aligned}
 Q_m(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} K_m\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}, \frac{\eta}{2\sqrt{m}}\right) \\
 &= \text{Partie paire en } \xi \text{ de } \sqrt{m} \frac{u_{2m}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}\right)u_{2m-1}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{m}}\right) - u_{2m}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{m}}\right)u_{2m-1}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}\right)}{\xi - \eta}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Notons que le déterminant de Fredholm relatif à l'équation (14) est identique à celui de l'équation (16) écrite sous la forme

$$\lambda f_1(\xi) = \int_{-t}^{+t} Q_m(\xi, \eta) f_1(\eta) d\eta \tag{18}$$

où

$$f_1(\xi) = f\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}\right).$$

Il est maintenant facile d'obtenir la limite de $Q_m(\xi, \eta)$ lorsque m tend vers l'infini, ξ, η, t restant fixes. Uniformément par rapport à ξ sur tout intervalle fini $|\xi| \leq t$, nous avons †.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-)^m \sqrt{m}}{2^{2m} m!} H_{2m} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \xi,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-)^m}{2^{2m} m!} H_{2m+1} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \xi,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{2}} (-)^m u_{2m} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \xi,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{2}} (-)^m u_{2m-1} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \sin \xi.$$

Par conséquent, uniformément par rapport à ξ, η ,

$$Q(\xi, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m(\xi, \eta) = \text{Paire en } \xi \text{ de } \frac{-1 \cos \xi \sin \eta - \cos \eta \sin \xi}{\pi \xi - \eta}$$

$$= \text{Partie paire en } \xi \text{ de } \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\xi - \eta)}{\xi - \eta}.$$

Alors, on a

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\xi - \eta)}{\xi - \eta} + \frac{\sin(\xi + \eta)}{\xi + \eta} \right\}, \quad |\xi| < t, |\eta| < t.$$

Ce noyau est symétrique, continu, borné. La forme limite de l'équation homogène (14) ou plutôt (18) est donc

$$\lambda g(\xi) = \int_{-t}^{+t} Q(\xi, \eta) g(\eta) d\eta. \quad (19)$$

6. Les Fonctions Sphéroïdales Solutions de l'Équation (19)

Les solutions $g(\xi)$ sont nécessairement paires. L'équation intégrale (19) est alors équivalente à la suivante⁵⁾

$$\lambda g(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^{+t} \frac{\sin(\xi \pm \eta)}{\xi \pm \eta} g(\eta) d\eta, \quad (20)$$

à condition de se restreindre au sous-espace des fonctions paires, ce que nous ferons dans tout le paragraphe.

† Voir réf. 4), Vol. II, ch. X, §§ 10, 13, formules (24), (25).

Le noyau $\sin(\xi + \eta)/\pi(\xi + \eta)$ est le carré du noyau $\exp(i\xi\eta/t)/\sqrt{2\pi t}$, équivalent lui-même à $\cos(\xi\eta/t)/\sqrt{2\pi t}$, symétrique, réel, dont les valeurs propres sont donc réelles. Si nous obtenons un système complet de fonctions $L^2(-t, +t)$, paires, solutions de l'équation

$$\mu g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-t}^{+t} e^{i\xi\eta/t} g(\eta) d\eta, \quad (21)$$

nous aurons par là même les solutions de (20) et (19) avec la correspondance $\lambda = \mu^2$. Par le changement d'échelle $\xi = xt$, $\eta = yt$, qui ramène les limites d'intégration aux valeurs ± 1 , l'équation (21) prend la forme

$$\gamma f(x) = \int_{-1}^{+1} e^{itxy} f(y) dy, \quad (22)$$

avec $f(x) = g(tx)$ et $\gamma = \mu\sqrt{2\pi}/t$, c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{t}{2\pi} \gamma^2. \quad (23)$$

Les solutions de l'équation (22) sont les fonctions dites sphéroïdales ^{5, 6} dépendant du paramètre t . Celles-ci sont définies comme les solutions régulières aux points ± 1 de l'équation différentielle

$$(L-l)f(x) = 0, \quad (24)$$

avec

$$L \equiv (x^2-1)d^2/dx^2 + 2xd/dx + t^2x^2.$$

Cet opérateur self-adjoint commute avec le noyau e^{itxy} défini sur l'intervalle $-1, +1$. Supposons en effet que $\varphi(x)$ soit une solution particulière de (24)

$$(L-l)\varphi(x) = 0.$$

Posons $\chi(x) = \int_{-1}^{+1} e^{itxy} \varphi(y) dy$. Il est facile de vérifier que $(L-l)\chi = 0$, sous les conditions suivantes

$$\left. \begin{aligned} (1-x^2)\varphi(x) &= 0 \\ (1-x^2)\varphi'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } |x| = 1. \quad (25)$$

Or les conditions (25) imposent la régularité de $\varphi(x)$ en $x = \pm 1$ et déterminent les valeurs de l . La fonction χ nécessairement régulière en ± 1 , est donc proportionnelle à $\varphi(x)$, d'où

$$\chi(x) = \gamma\varphi(x).$$

Les fonctions sphéroïdales $f_2, f_4, \dots, f_{2q}, \dots$ forment un système complet de fonctions paires $L^2(-1, +1)$. Elles constituent donc le système des fonctions propres du noyau $\exp(itxy)$, de son carré $\sin t(x+y)/(x+y)$ et du noyau original

Q , après le changement d'échelle $\xi = tx$. Les valeurs propres γ s'obtiennent par exemple en posant $x = 0$ dans l'équation (22), c'est-à-dire

$$\gamma_{2a} = \int_{-1}^{+1} f_{2a}(x) dx / f_{2a}(0), \quad (26)$$

et

$$\lambda_a = \frac{t}{2\pi} \gamma_{2a}^2.$$

7. La Fonction $\Psi(t)$

Le noyau $Q(\xi, \eta)$ admet pour valeurs propres toutes positives les nombres $\lambda_a = (t/2\pi)\gamma_{2a}^2$, où les γ_{2a} sont définis par (26). C'est donc un noyau positif ⁷⁾. Cette propriété nous permet d'écrire le déterminant de Fredholm relatif à l'équation (19), sous la forme du produit infini suivant:

$$D(\lambda) = \prod_{a=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{t}{2\pi} \gamma_{2a}^2 \right), \quad (27)$$

qui est une fonction entière de $1/\lambda$.

Considérons maintenant, pour t fixé, la suite des noyaux $Q_m(\xi, \eta)$; nous avons montré (§§ 4 et 5) que $\Psi_m(\tau/\sqrt{2})$ est le déterminant de Fredholm relatif à l'équation

$$f(\xi) - \int_{-t}^{+t} Q_m(\xi, \eta) f(\eta) d\eta = \text{second membre},$$

or $Q_m(\xi, \eta)$ converge uniformément vers $Q(\xi, \eta)$ (§ 5) on en déduit ⁷⁾ que Ψ_m converge vers le déterminant de Fredholm du noyau Q , avec $\lambda = 1$, c'est-à-dire

$$\Psi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m \left(\frac{t}{2\sqrt{2m}} \right) = D(1), \quad (28)$$

soit

$$\Psi(t) = \prod_{a=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \gamma_{2a}^2 \right).$$

8. Propriétés de $\Psi(t)$ et Calcul Numérique

La fonction $\Psi(t)$, limite de quantités positives, est positive. Elle décroît de 1 à 0, lorsque t augmente de 0 à $+\infty$. Pour les petites valeurs de t , les fonctions sphéroïdales sont voisines des fonctions de Legendre et l'on peut calculer les coefficients du développement des premières fonctions sur les secondes par une méthode de perturbation. Les tables des fonctions sphéroïdales de Stratton ⁶⁾ donnent la valeur de ces coefficients jusqu'à $t = 10$

(page 203 et suivantes). Les fonctions $f_{2q}(x)$ sont alors définies par les séries

$$f_{2q}(x) = \sum_p d_{2p}(t|2q) P_{2p}(x). \tag{29}$$

Par exemple, à l'ordre 0, nous obtenons d'après (26)

$$\begin{aligned} \gamma_{2q} &= \int_{-1}^{+1} P_{2q}(x) dx / P_{2q}(0) = 0, \quad \text{si } q \neq 0, \\ \gamma_0 &= 2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Psi(t) = 1 - \frac{2t}{\pi} + \dots,$$

d'où

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2}{\pi}.$$

De cette façon, nous avons jusqu'au 5ème ordre en t

$$\Psi(t) = 1 - \frac{2t}{\pi} + \frac{2t^3}{9\pi^2} - \frac{2t^5}{75\pi} + \text{termes en } t^6 + \dots$$

ou encore pour la fonction $F(S)$

$$F = 1 + \frac{1}{2}\pi \frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{15}t^4 + \dots, \quad \frac{S}{D} = \frac{2t}{\pi}.$$

M. L. Mehta avait obtenu par un calcul direct (voir (M.63) et suivante)

$$\{1 - F(S)\} e^{\left(\frac{\pi S}{4D}\right)^2} = 1 - \frac{1}{3}(2m\theta^2) + \frac{7}{30}(2m\theta^2)^2 + \dots,$$

qui coïncide bien avec le développement limité de

$$\begin{aligned} \{1 - F\} e^{t^2} &= \left(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{15}t^4 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{16}t^4 + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{4}t^2 + \frac{7}{30} \left(\frac{1}{4}t^2\right)^2 + \dots, \quad \frac{1}{4}t^2 = 2m\theta^2. \end{aligned}$$

Pour les grandes valeurs de t , les fonctions sphéroïdales tendent vers celles de l'oscillateur harmonique, tous les λ_q tendent vers l'unité et $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$. Cependant nous n'avons rien pu dire sur le comportement asymptotique de $\Psi(t)$.

Nous avons effectué le calcul numérique des premières valeurs de γ_{2q} dans l'intervalle $0 \leq t \leq 5$, afin d'éprouver l'utilité du produit infini (28). Il se trouve que le calcul est simple et la convergence rapide. Grâce aux tables ⁶⁾ des coefficients $d_{2p}(t|2q)$, nous exprimons les γ_{2q} sous la forme suivante:

$$\gamma_{2q} = \frac{\int_{-1}^{+1} f_{2q}(x) dx}{f_{2q}(0)} = \frac{2d_0(t|2q)}{\sum_p (-)^p \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} d_{2p}(t|2q)}.$$

Il est facile de voir que les γ_{2q} sont de l'ordre de grandeur des $d_0(2q)$ et décroissent vite avec q . Dans l'intervalle exploré $0 \leq t \leq 5$, il a suffi des 4 premiers facteurs de Ψ pour obtenir cinq chiffres exacts. Les valeurs numériques de $\Psi(t)$, de $F(S) = 1 + \frac{1}{2}\pi d\Psi/dt$ et de $\phi(S) = \frac{1}{4}\pi^2 d^2\Psi/dt^2$ sont présentées dans la table 1, ainsi que les valeurs des fonctions $F_w(S)$ et $\phi_w(S)$, définies par les égalités

$$F_w(S) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{S}{D}\right)^2\right] = 1 - e^{-t^2/\pi}, \quad \phi_w(S) = \frac{1}{2}\pi\frac{S}{D}\exp\left[-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{S}{D}\right)^2\right].$$

Les dérivations successives de $\Psi(t)$ laissent respectivement 4 chiffres et 3 chiffres exacts aux fonctions F et ϕ .

TABLE 1
Les fonctions Ψ , F et ϕ

t	S/D	Ψ	F	F_w	ϕ	ϕ_w
0	0	1	0	0	0	0
0.1	0.064	0.936408	0.00330	0.00317	0.104	0.0996
0.2	0.127	0.873239	0.01321	0.01265	0.207	0.1974
0.3	0.191	0.810904	0.02947	0.02824	0.303	0.2915
0.4	0.255	0.749796	0.05168	0.04965	0.395	0.3801
0.5	0.318	0.690283	0.07947	0.07649	0.477	0.4617
0.6	0.382	0.632698	0.11219	0.10827	0.549	0.5350
0.7	0.446	0.577337	0.14920	0.14441	0.6117	0.5989
0.8	0.509	0.524450	0.18982	0.18430	0.6630	0.6525
0.9	0.573	0.474248	0.23338	0.22727	0.7032	0.6954
1	0.637	0.426889	0.27908	0.27262	0.7308	0.7273
1.2	0.764	0.341117	0.37410	0.36768	0.7547	0.7587
1.4	0.891	0.267527	0.46962	0.46414	0.7396	0.7502
1.6	1.018	0.205888	0.56114	0.55730	0.6933	0.7083
1.8	1.146	0.155459	0.64529	0.64346	0.6255	0.6417
2	1.273	0.115153	0.71986	0.72007	0.5445	0.5598
2.2	1.400	0.083669	0.78376	0.78575	0.4587	0.4713
2.4	1.528	0.059626	0.83681	0.84014	0.3750	0.3836
2.6	1.655	0.041674	0.87956	0.88372	0.2978	0.3023
2.8	1.782	0.028563	0.91307	0.91749	0.2301	0.2308
3	1.910	0.019199	0.93863	0.94300	0.1730	0.1709
3.2	2.037	0.012654	0.95760	0.96159	0.1267	0.1229
3.4	2.164	0.008177	0.97133	0.97476	0.0906	0.0857
3.6	2.292	0.005182	0.98104	0.98384	0.0631	0.0581
3.8	2.419	0.003219	0.98772	0.98991	0.0429	0.0383
4	2.546	0.001961	0.99223	0.99386	0.0286	0.0245
4.2	2.674	0.001171	0.99518	0.99635	0.0185	0.0153
4.4	2.801	0.0006858	0.99708	0.99789	0.0117	0.0092
4.6	2.928	0.0003937	0.9983	0.99881	0.0062	0.0054
4.8	3.055	0.0002216	0.9990	0.99934	0.0030	0.0031
5	3.183	0.0001222	0.9994	0.99965	0.002	0.0017

Sur la fig. 1, on a représenté F et F_w , peu distinguables à l'échelle adoptée, encadrées par les bornes inférieure F_0 , et supérieure F_1 , données par Mehta

(M.60),

$$F_0 = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right), \quad F_1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{12}t^2\right)\exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right).$$

F et F_w diffèrent de moins de 1 % pour $S < 1.4D$ et la différence absolue est inférieure à 0.0066 dans la région $S < 3D$. La fig. 2 représente les fonctions p et p_w dont la différence relative est inférieure à 5 % pour $S < 2D$, et l'écart moindre que 0.0162.

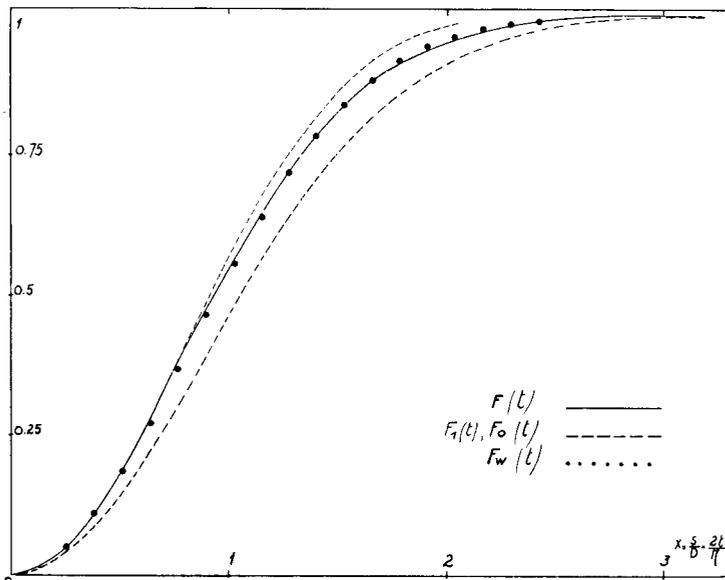


Fig. 1. La distribution de Wigner $F_w(S)$ et la fonction exacte $F(S)$ comprise entre F_0 et F_1 .

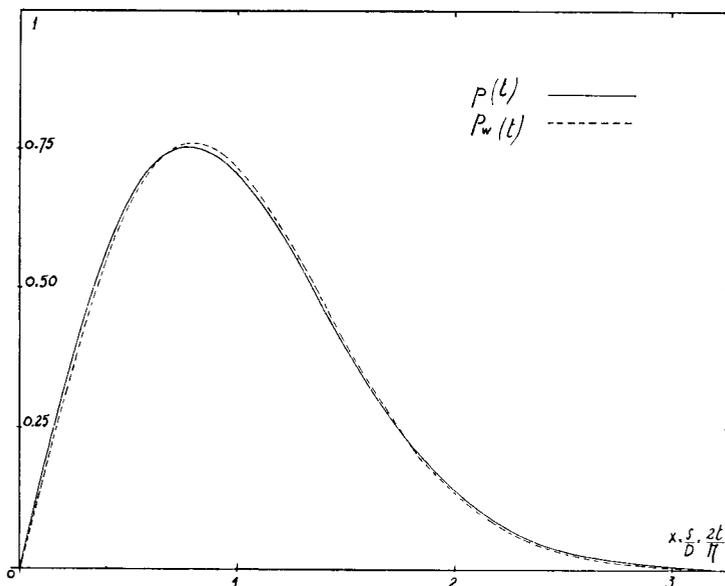


Fig. 2. Les densités de probabilité $p(S)$ et $p_w(S)$.

M. L. Mehta a mis au point une méthode de calcul de la fonction $I_m(\theta)$, donnée sous forme de déterminant (M.54) à l'aide de laquelle s'exprime F . La convergence est rapide et pour $m = 8$, la courbe de F se superpose à celle qui est donnée fig. 1.

Il propose de représenter la fonction F dans la région $S < 2D$ par la forme $(1+at^2)^{-\alpha} \exp(-\frac{1}{4}t^2)$, qui réalise une meilleure approximation que F_w , si l'on prend $\alpha = 1.003$ et $a = 0.078$.

Je remercie le Professeur C. Bloch et Monsieur M. L. Mehta de l'intérêt qu'ils ont pris à ce travail, ainsi que Mademoiselle N. Castille du Bureau de Calcul de Saclay pour les résultats numériques.

Bibliographie

- 1) M. L. Mehta, Nuclear Physics **18** (1960) 420
- 2) Wigner et Gatlinberg, Conf. on Neutron Physics by time of flight, Oak-Ridge, National Laboratory Report ORNL 2309 (1957) p. 59
- 3) M. L. Mehta et M. Gaudin, Nuclear Physics **18** (1960) 420
- 4) Bateman, dans Manuscript Project, édité par A. Erdélyi (New-York, Toronto, London) Vol. II, ch. X, §§ 10, 13, formule (11)
- 5) L. Robin, Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales (Gauthiers-Villars, 1959) Tome III, p. 250, formule (255)
- 6) J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little and F. J. Corbato, Spheroidal wave functions (The Technology Press of M.I.T.-Wiley)
- 7) E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique (Gauthiers-Villars, Paris, 1956) Tome III, p. 454 § 592, p. 389 § 572

UNE FAMILLE À UN PARAMÈTRE D'ENSEMBLES UNITAIRES

M. GAUDIN

*Service de Physique Théorique, Centre d'Études Nucléaires de Saclay,
91, Gif-Sur-Yvette, France*

Reçu le 1 mars 1966

Abstract: A one-parameter family of unitary matrix ensembles is studied. We define the ensemble $E_2(z)$ of unitary random matrices, whose eigenvalues are $\varepsilon_j = \exp 2\pi i \varphi_j$, by the following joint probability density:

$$P(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n \propto \prod_{i < j} \left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i - z\varepsilon_j} \right|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n.$$

It realizes a continuous interpolation between the distribution of the eigenvalues in the Dyson unitary ensemble E_2 for $z = 0$ and the uniform distribution of n random points on the unit circle for $z = 1$. The thermodynamic analogy with a circular or linear classical repulsive gas at temperature $\beta^{-1} = \frac{1}{2}$ is developed. The isotherm $\beta = 2$ and the corresponding virial series are exactly calculated. All the correlation functions are given in the limit of an infinite linear gas or of an infinite series of levels. This model shows the short-range repulsion effect between eigenvalues but no long-range crystalline order, which is a strong characteristic of all ensembles so far studied.

1. Introduction

Rappelons brièvement les principes de la théorie des ensembles de matrices [†] appliquée à l'étude des spectres complexes. L'expérience donne certaines séquences de niveaux d'énergie successifs de systèmes atomiques ou nucléaires; ces niveaux sont assez nombreux pour que leur densité soit définissable et varie continûment avec l'énergie d'excitation totale du système. Les spectres peuvent être dits complexes à un double point de vue: la complexité est celle de l'interaction réelle entre les particules composant le système d'un nombre élevé de degrés de liberté; elle est aussi celle du problème de la détermination des valeurs propres de l'Hamiltonien, si l'on suppose connu le potentiel d'interaction.

L'ignorance des lois d'interaction ou des méthodes de résolution conduit naturellement à l'emploi de la méthode statistique. Ici l'élément aléatoire est un système lui-même et non plus l'état du système comme en mécanique statistique ordinaire. La nouvelle mécanique statistique des ensembles de systèmes considère un objet particulier, par exemple un noyau atomique d'énergie à peu près définie par le mode d'excitation, de spin, parité et autres constantes absolues définies, comme un élément représentatif d'un ensemble auquel est associée de façon naturelle une probabilité à

[†] Pour un exposé général, voir par exemple celui de Rosenzweig ¹⁾ ou l'article d'introduction de Porter ⁶⁾.

priori. Le rôle de l'ensemble est de permettre une définition plausible, ou même unique, de l'équiprobabilité. L'expérience permet alors de voir dans quelle mesure l'objet observé s'écarte de l'élément moyen de l'ensemble, dans quelle mesure l'écart est compatible avec la variance théorique, etc. . . C'est, résumé, le point de vue exposé par Dyson dans sa théorie statistique des niveaux d'énergie des systèmes complexes²⁾.

Comme d'habitude en statistique, avant de pouvoir arguer de son ignorance, il est nécessaire de tenir compte de ce que l'on sait. On a vu comment les constantes absolues du mouvement entraînent dans la définition de l'élément de l'ensemble, mais il faut tenir compte aussi des constantes approchées: la séparation des raies spectrales due à une faible perturbation introduit une complexité apparente qu'il faut réduire, par exemple en remplaçant chaque multiplet par son centre de gravité³⁾. Enfin, la connaissance des propriétés de symétrie des systèmes actuels permet de placer tout ensemble dans l'un des trois types suivants: orthogonal, symplectique ou unitaire^{2,4)}. Par exemple: ensemble orthogonal de systèmes invariants par renversement du sens du temps et de spin entier, ou bien invariants par rotation; ensemble symplectique pour le spin demi-entier; ensemble unitaire de systèmes sans invariance par renversement du sens du temps.

A la suite de Wigner, on a d'abord étudié les ensembles gaussiens. Des matrices symétriques réelles⁵⁾ ou hermitiques⁶⁾ représentent directement les Hamiltoniens, dont les lois de distribution résultent de l'hypothèse que dans toute représentation physique les éléments de matrice sont des variables aléatoires indépendantes. Une hypothèse analogue suffit aussi pour les ensembles de matrices complexes non hermitiques¹¹⁾.

Pour réduire l'arbitraire d'une telle hypothèse d'indépendance, Dyson²⁾ introduit des ensembles de matrices unitaires en correspondance biunivoque avec les Hamiltoniens de sorte que, localement, la distribution des valeurs propres d'une matrice unitaire sur un arc du cercle unité, soit identique à la distribution des valeurs propres de l'Hamiltonien correspondant sur un segment de l'axe réel. L'introduction des espaces de matrices unitaires qui ont les propriétés de symétrie des Hamiltoniens permet de définir la probabilité à priori d'une matrice de l'ensemble avec la seule hypothèse suivante: cette probabilité est invariante dans tous les automorphismes unitaires qui conservent la symétrie.

Prenons par exemple l'ensemble circulaire des matrices unitaires symétriques S . L'automorphisme $S \rightarrow W^T S W$ où W est unitaire préserve la symétrie, et il existe une seule mesure $\mu(S)$ dans l'espace des matrices S qui soit invariante par W .

Cette hypothèse maximale d'équiprobabilité à priori de S et de $W^T S W$ traduit le fait de l'ignorance totale en dehors de la symétrie de S , mais elle n'est évidemment pas nécessaire. C'est pourquoi on a pu considérer des „ensembles généralisés”[†] fournissant des modèles, propices au calcul, qu'il peut être intéressant de comparer aux distributions observées.

† Voir le “fixed strength ensemble” de N. Rosenzweig, réf. 6), et les réfs. 7-10).

Si l'on abandonne l'hypothèse d'indépendance, dans le cas des matrices symétriques réelles, en ne gardant que l'hypothèse de l'invariance de la loi de distribution par changement de repère orthogonal, on obtient une loi du type

$$P(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = f(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

pour la probabilité d'une matrice de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ici $f(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ est une fonction positive et symétrique des valeurs propres. On a pu étudier aisément les cas où f est factorisé sous la forme $f(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$. On a spécifié encore, en prenant pour $g(\lambda)$ une fonction poids des polynômes orthogonaux classiques. Le cas $g(\lambda) = \exp -\lambda^2$ est celui de Wishart.

Le modèle proposé dans cet article est une sorte d'extension du modèle unitaire de Dyson. Soit S une matrice unitaire de valeurs propres $\varepsilon_k = \exp 2\pi i \varphi_k, k = 1, 2, \dots, n$. On sait qu'il existe dans l'espace des matrices unitaires une seule mesure invariante, et donnant la probabilité élémentaire pour que les angles $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ soient compris entre φ_1 et $\varphi_1 + d\varphi_1, \varphi_2$ et $\varphi_2 + d\varphi_2, \dots$, etc; c'est la suivante:

$$P d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n \propto \prod_{i < j} |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

Abandonnant l'hypothèse d'invariance par les translations à gauche, on peut „généraliser” cette loi en prenant

$$P d\varphi_1 \dots d\varphi_n = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \prod_{i < j} |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_n,$$

où f est seulement fonction de la classe de S , c'est-à-dire fonction symétrique des angles $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Dans ce qui suit, nous étudions l'ensemble $E_2(z)$ défini par la loi de probabilité suivante, dépendant d'un paramètre réel z compris entre 0 et 1:

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \propto \prod_{i < j} \left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i - z\varepsilon_j} \right|^2. \quad (1.1)$$

Pour l'exposé, plutôt que de partir directement de la loi de probabilité (1.1) nous préférons montrer d'abord, à défaut d'une hypothèse justificatrice, comment une telle expression peut tomber sous la main; c'est l'objet de la section 2.

Comme pour les ensembles de matrices unitaires avec le gaz de Coulomb, l'analogie avec un gaz circulaire ou linéaire développée section 3 est utile pour l'intuition de la loi de probabilité étudiée. Les propriétés analytiques des grandes fonctions de partition permettent de montrer l'équivalence thermodynamique du gaz linéaire et du gaz circulaire. Dans la section 4 nous considérons la loi de probabilité (1.1) comme définissant un ensemble de matrices unitaires, faute de savoir, à partir d'une hypothèse générale, suivre la démarche inverse. La distribution (1.1) dépend d'un paramètre. Elle fournit une interpolation continue entre la distribution des n valeurs propres d'une matrice de l'ensemble unitaire de Dyson et la distribution uniforme de

n points sur le cercle unité. Les fonctions de corrélation d'ordre fini sont toutes calculées à la limite d'un nombre de niveaux infini, mais le problème du calcul pratique de la distribution des espacements des niveaux voisins n'est pas résolu.

2. Préliminaires: Une Simple Équation Intégrale

2.1. DÉFINITION

Nous considérons l'équation intégrale linéaire et homogène

$$\int_0^1 K(\varphi, \varphi') f(\varphi') d\varphi' = \lambda f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 1. \quad (2.1)$$

Le noyau K , dépendant d'un paramètre z réel compris entre 0 et 1, est le suivant:

$$K(\varphi, \varphi') = [1 - z e^{2\pi i(\varphi - \varphi')}]^{-1}; \quad (2.2)$$

il est hermitique, du type d'Hilbert-Schmidt. Du développement uniformément convergent par rapport à φ et φ'

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{2\pi i n \varphi} e^{-2\pi i n \varphi'}, \quad (2.3)$$

il résulte que la fonction propre du noyau K , $f_n(\varphi) = e^{2\pi i n \varphi}$, appartient à la valeur propre $\lambda_n = z^n$ pour $n \geq 0$, et que pour $n < 0$, $f_n(\varphi)$ est fonction propre pour la valeur propre $\lambda = 0$, qui est donc infiniment dégénérée. Le système de fonctions $e^{2\pi i n \varphi}$ étant complet dans $L^2(0, 1)$, nous obtenons tout le spectre de K .

2.2. NOYAU RÉSOUVANT ET DÉTERMINANT DE FREDHOLM

Introduisant un paramètre de développement ζ , nous définissons le noyau résolvant comme $\Gamma(\varphi, \varphi')$:

$$\Gamma = \zeta K(1 + \zeta K)^{-1}, \quad (2.4)$$

ce qui donne d'après le paragraphe 2.1

$$\Gamma(\varphi, \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta z^n}{1 + \zeta z^n} e^{2\pi i n(\varphi - \varphi')}, \quad (2.5)$$

et le déterminant de Fredholm du noyau $1 + \zeta K$:

$$Q(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \det |K(\varphi_i, \varphi_j)|_n, \quad (2.6)$$

où la notation $\det |K(\varphi_i, \varphi_j)|_n$ est ainsi définie:

$$\det |K(\varphi_i, \varphi_j)|_n = \begin{vmatrix} K(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & K(\varphi_1, \varphi_n) \\ K(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & K(\varphi_2, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\varphi_n, \varphi_1) & \dots & K(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}.$$

Puisque K est borné, $Q(\zeta)$ est une fonction entière de ζ . C'est même une fonction de genre 0 d'après un théorème de Mercer ¹³⁾ sur les noyaux positifs. On obtient donc le produit infini suivant pour $Q(\zeta)$:

$$Q(\zeta) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \zeta z^n). \tag{2.7}$$

Cette formule sera démontrée aussi sect. 2.4 par un calcul direct dont la méthode sera utile pour la suite.

2.3. LES COEFFICIENTS DE $Q(\zeta)$

Nous écrivons

$$Q(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} q_n, \tag{2.8}$$

avec

$$q_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \det |K(\varphi_i, \varphi_j)|_n. \tag{2.9}$$

Développons d'abord $\det |K(\varphi_i, \varphi_j)|$. Nous introduisons la notation $\varepsilon_j = \exp 2\pi i \varphi_j$, qui permet d'écrire

$$\det |K(\varphi_i, \varphi_j)| = \det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right|_n. \tag{2.10}$$

D'après un lemme dû à Cauchy ¹⁴⁾,

$$\det \left| \frac{1}{1 - x_i y_j} \right|_n = \frac{\Delta(x_1 \dots x_n) \Delta(y_1 \dots y_n)}{\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)}, \tag{2.11}$$

où Δ est le produit des différences

$$\Delta(x_1 x_2 \dots x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Appliquons ce lemme en prenant

$$x_i = \varepsilon_i, \quad y_i = z\varepsilon_i^{-1} = z\varepsilon_i^*;$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(y_1 y_2 \dots y_n) &= z^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Delta^*(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n), \\ \prod_{i,j} (1 - x_i y_j) &= (1 - z)^n \prod_{i \neq j} (1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}), \end{aligned}$$

et enfin

$$\det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right| = \frac{z^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1 - z)^n} \prod_{i < j} \left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i - z\varepsilon_j} \right|^2. \tag{2.12}$$

On peut écrire aussi, en posant $\psi(z) = \prod_{i < j} (\varepsilon_i - z\varepsilon_j)$,

$$\det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right| = \frac{z^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1 - z)^n} \frac{\Delta \Delta^*}{\psi(z) \psi^*(z)}, \tag{2.13}$$

d'où la seconde forme du coefficient q_n :

$$q_n = \frac{z^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-z)^n} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \frac{\Delta\Delta^*}{\psi(z)\psi^*(z)}. \quad (2.14)$$

Une troisième forme s'obtient en revenant aux angles φ_j :

$$\begin{aligned} \text{Posons } z &= e^{-2\gamma}, \quad \gamma \text{ réel et positif,} \\ |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2 &= 4 \sin^2 \pi(\varphi_i - \varphi_j), \\ |\varepsilon_i - z\varepsilon_j|^2 &= 4e^{-2\gamma} [\text{sh}^2 \gamma + \sin^2 \pi(\varphi_i - \varphi_j)], \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'expression

$$\frac{z^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1-z^n} \frac{\Delta\Delta^*}{\psi(z)\psi^*(z)} = \prod_{i < j} \left[1 + \frac{\text{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \pi(\varphi_i - \varphi_j)} \right]^{-1}, \quad (2.15)$$

et la troisième forme du coefficient q_n

$$q_n = \frac{1}{(1-z)^n} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \prod_{i < j} \left[1 + \frac{\text{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \pi(\varphi_i - \varphi_j)} \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

2.4. CALCUL DE q_n ET DE $Q(\zeta)$

D'après la définition (2.9) et l'expression (2.10), le coefficient de ζ^n dans le développement du déterminant de Fredholm $Q(\zeta)$ s'écrit ainsi:

$$Q_n = \frac{q_n}{n!} = \frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right|_n. \quad (2.17)$$

Pour $|z| < 1$, on développe le déterminant de l'intégrand en série multiple normalement convergente:

$$\begin{aligned} \det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right| &= \sum_P I(P) \left(1 - z \frac{\varepsilon_{P1}}{\varepsilon_1} \right)^{-1} \left(1 - z \frac{\varepsilon_{P2}}{\varepsilon_2} \right)^{-1} \dots \left(1 - z \frac{\varepsilon_{Pn}}{\varepsilon_n} \right)^{-1} \\ &= \sum_{\alpha_i \geq 0} \sum_P I(P) z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \left(\frac{\varepsilon_{P1}}{\varepsilon_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\varepsilon_{P2}}{\varepsilon_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\varepsilon_{Pn}}{\varepsilon_n} \right)^{\alpha_n}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La somme porte sur toutes les permutations P d'ordre n de signature $I(P)$, et sur toutes les suites de n entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ positifs ou nuls. Portant (2.18) dans (2.17), la convergence normale permet l'intégration terme à terme et l'on obtient

$$Q_n = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_i \geq 0} \sum_P I(P) z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \varepsilon_{P1}^{\alpha_1 - \alpha_{P1}} \varepsilon_{P2}^{\alpha_2 - \alpha_{P2}} \dots \varepsilon_{Pn}^{\alpha_n - \alpha_{Pn}}. \quad (2.19)$$

Chaque intégrale relative à la permutation P vaut

$$\delta(\alpha_1 - \alpha_{P1}) \delta(\alpha_2 - \alpha_{P2}) \dots \delta(\alpha_n - \alpha_{Pn})$$

et après sommation sur P on obtient

$$Q_n = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_i \geq 0} z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \det |\delta(\alpha_i - \alpha_j)|. \tag{2.20}$$

Or $\det |\delta(\alpha_i - \alpha_j)|$ s'annule dès que deux α sont égaux, et vaut 1 si les α sont tous distincts, on peut écrire

$$Q_n = \sum_{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n} z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}. \tag{2.21}$$

On en déduit immédiatement la fonction génératrice

$$\sum_n \zeta^n Q_n = \prod_{\alpha=0}^{\infty} (1 + \zeta z^\alpha).$$

C'est le résultat énoncé formule (2.7). On peut aussi effectuer sur l'expression (2.21) de Q_n les sommations successives sur $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$, on trouve

$$\frac{q_n}{n!} = Q_n = \frac{z}{1-z} \frac{z^2}{1-z^2} \dots \frac{z^{n-1}}{1-z^{n-1}} \frac{1}{1-z^n} = z^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-z^k}. \tag{2.22}$$

Compte tenu des expressions (2.13), (2.17) et (2.22) on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \frac{\Delta \Delta^*(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)}{\psi(z)\psi^*(z)} = \prod_{k=1}^n \frac{1-z}{1-z^k}. \tag{2.23}$$

2.5. REMARQUE SUR L'ÉGALITÉ (2.23)

Le premier membre de l'égalité (2.23) se présente comme la moyenne sur le groupe unitaire à n dimensions de la fonction de classe $[\psi(z)\psi^*(z)]^{-1}$. En effet, si U est une matrice unitaire à n dimensions de valeurs propres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, la quantité $\psi\psi^* = \prod_{i < j} |\varepsilon_i - z\varepsilon_j|^2$ n'est évidemment fonction que de la classe de U .

L'expression $|\Delta(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_n$ est l'élément de volume du groupe dans le voisinage de la classe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, défini par les angles $d\varphi_1, \dots, d\varphi_n$. Une intégrale analogue à (2.23) fait l'objet du chapitre sur le polynôme de Poincaré † dans le livre de Weyl sur les groupes classiques. Weyl donne une méthode de calcul due à R. Brauer pour la valeur moyenne sur le groupe unitaire de la quantité $\psi(z)\psi^*(z)$, alors que dans (2.23) c'est l'expression inverse qui intervient. L'égalité (11.4) de Weyl †† est la suivante:

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \psi(z)\psi^*(z) |\Delta|^2 = \prod_{k=1}^n \frac{1-z^{2k-1}}{1-z}. \tag{2.24}$$

La formule (2.23) lui est vraiment analogue, bien que beaucoup plus simple à montrer que (2.24) pour laquelle un calcul direct paraît difficile. On peut d'ailleurs aussi démontrer la formule (2.23) en suivant la méthode de Weyl et de Brauer. Puisque les

† Voir ref. 14), Chap. VII sect. 11.

†† Voir ref. 14), Théorème VII 11 A.

intégrales (2.24) et (2.23) ont un lien étroit avec la théorie du groupe unitaire U_n , il peu être intéressant de rappeler comment elles s'y rattachent.

Soit S une matrice de U_n . La représentation adjointe $A(S)$ opère dans l'algèbre de Lie G_n du groupe U_n :

$$A(S) : x \rightarrow SxS^{-1}$$

où x est une matrice infinitésimale de U_n , c'est-à-dire $x \in G_n$. Calculons le déterminant de $1 - zA(S)$; il ne dépend que de la classe de $A(S)$, donc seulement de celle de S . Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ les valeurs propres de S . Soit x_{ik} une matrice de G_n , elle est transformée par $A(S)$ en $(SxS^{-1})_{ik} = x_{ik}\varepsilon_k\varepsilon_i^{-1}$. Les valeurs propres de $A(S)$ sont donc les n^2 nombres $\varepsilon_k\varepsilon_i^{-1}$, d'où l'on déduit

$$\det |1 - zA(S)| = \prod_{i,k} (1 - z\varepsilon_k\varepsilon_i^{-1}) = (1 - z)^n \psi \psi^*. \quad (2.25)$$

L'égalité (2.23) peut donc se mettre sous la forme

$$\langle \det \left| \frac{1}{1 - zA(S)} \right| \rangle = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - z^k}, \quad (2.26)$$

où les crochets signifient: valeur moyenne sur U_n .

3. Un Gaz Classique a Une Dimension

3.1. L'ANALOGIE THERMODYNAMIQUE

L'analogie est évidente entre l'expression (2.16) de q_n et la fonction de partition d'un gaz classique de n particules réparties sur un cercle de rayon 1, se repoussant deux à deux selon une loi de force dépendant de la distance. En effet, si les particules sont repérées sur le cercle unité par les angles $2\pi\varphi_1, 2\pi\varphi_2, \dots, 2\pi\varphi_n$, l'expression (2.16) peut être écrite sous la forme

$$q_n = \frac{1}{(1-z)^n} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n \exp \left\{ -\beta \sum_{i < j} V(\varphi_i - \varphi_j) \right\}, \quad (3.1)$$

avec

$$\beta V(\varphi_1 - \varphi_2) = \log \left(1 + \frac{\text{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \pi(\varphi_1 - \varphi_2)} \right). \quad (3.2)$$

L'identification entre (2.16) et (3.1) n'est donc possible que pour une seule température, d'ailleurs arbitraire. Nous choisissons $\beta = 2$, à cause de la ressemblance étroite avec le cas du gaz purement coulombien à la température inverse $\beta = 2$, ce qui paraîtra clairement dans la suite.

Au facteur $(1-z)^{-n}$ près, l'expression (3.1) est bien la fonction de partition d'un gaz classique de particules sur un cercle, que nous pouvons appeler gaz circulaire. Le potentiel à deux corps défini par la formule (3.2) dépend d'un paramètre γ lié à la quantité z par la relation $z = \exp\{-2\gamma\}$.

En fonction de la distance x entre deux particules 1 et 2 de coordonnées angulaires φ_1 et φ_2 , on peut écrire

$$V(x) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\text{sh}^2 \gamma}{4x^2} \right), \quad (3.3)$$

avec

$$x = \frac{1}{2} |\sin \pi(\varphi_1 - \varphi_2)|.$$

Pour un gaz à une dimension c'est un bon potentiel, de type répulsif. A courte distance, ou pour les grandes valeurs du paramètre de portée γ , il est semblable au potentiel coulombien entre deux charges unités en électrostatique à deux dimensions.

En effet, si $\varphi_1 - \varphi_2 \approx 0$, on obtient

$$V(\varphi_1 - \varphi_2) \approx \frac{1}{2} \log \frac{\text{sh}^2 \gamma}{\sin^2 \pi(\varphi_1 - \varphi_2)} \approx \log \frac{1}{x} + \text{const.} \quad (3.4)$$

Enfin, à longue distance, il décroît en x^{-2} dès que l'on a $1 \gg x \gg \gamma$, et la répulsion coulombienne disparaît.

3.2. LE MODÈLE LINÉAIRE

Afin d'étudier commodément les propriétés thermodynamiques du système en question à la limite d'un grand nombre de particules ainsi que les diverses corrélations à l'échelle de la distance moyenne de séparation, il est utile de transformer le modèle circulaire déjà défini en un modèle linéaire. Considérons n particules en interaction sur un segment de droite de longueur L . Soient s_1, s_2, \dots, s_n leurs abscisses et a une longueur. Dans l'expression (3.1) de la fonction de partition q_n du gaz circulaire, effectuons le changement de variables

$$\varphi_i = s_i/L,$$

et le changement de paramètre

$$\gamma = \pi a/L, \quad z = \exp - (2\pi a/L). \quad (3.5)$$

On obtient une nouvelle écriture de q_n :

$$q_n = [L(1-z)]^{-n} \int_0^L \dots \int_0^L ds_1 \dots ds_n \exp \left\{ -\beta \sum_{i < j} V_L(s_i - s_j) \right\}, \quad (3.6)$$

avec la définition suivante de V_L :

$$V_L(s_1 - s_2) = \frac{1}{2} \log \left\{ 1 + \frac{\text{sh}^2(\pi a/L)}{\sin^2(\pi(s_1 - s_2)/L)} \right\}. \quad (3.7)$$

Le second membre de l'égalité (3.6) est proportionnel à la fonction de partition d'un gaz linéaire de n points dans le volume L , en interaction par le potentiel à deux corps V_L donné par la formule (3.7). Ce potentiel V_L a le défaut de dépendre du volume L . Cependant lorsque L augmente indéfiniment, $V_L(s_1 - s_2)$ tend uniformément dans tout

intervalle fini vers une limite $V(s_1 - s_2)$:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} V_L(s) = V(s) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right). \quad (3.8)$$

Notons aussi que le facteur $[L(1-z)]^{-n}$ figurant dans la formule (3.6) est sans importance puisqu'à la limite nous avons

$$L(1-z) = L \left(1 - \exp - \frac{2\pi a}{L} \right) \rightarrow 2\pi a.$$

Nous définissons maintenant le modèle linéaire construit avec le potentiel limite $V(s)$ donné par (3.8) et nous appelons \tilde{q}_n la fonction de partition de ce modèle linéaire:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n &= \frac{1}{(2\pi a)^n} \int_0^L \dots \int_0^L ds_1 \dots ds_n \exp \left\{ -\beta \sum_{i < j \leq n} V(s_i - s_j) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi a)^n} \int_0^L \dots \int_0^L ds_1 \dots ds_n \prod_{i < j} \frac{(s_i - s_j)^2}{a^2 + (s_i - s_j)^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La question se pose alors de l'équivalence thermodynamique du modèle circulaire ou périodique dont la fonction de partition q_n est donnée par (3.6) et du modèle linéaire dont la fonction de partition \tilde{q}_n est donnée par (3.9). Ces deux modèles ne diffèrent au fond que par les conditions aux limites. Pour le voir, supposons que nous ayons eu affaire à un gaz quantique avec le potentiel V , dans le volume L . Au lieu de confiner le système dans le volume L , nous aurions pu lui imposer des conditions de périodicité L en remplaçant le potentiel réel $V(s)$ par le potentiel périodique $V_p(s)$ ainsi construit ¹⁷⁾:

$$V_p(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(s+kL). \quad (3.10)$$

Dans le cas présent, on trouve justement

$$V_p(s) \equiv V_L(s). \quad (3.11)$$

Le modèle circulaire correspond donc exactement aux conditions aux limites périodiques. Comme nous ne savons pas en général dans quelle mesure les conditions aux limites périodiques altèrent les propriétés thermodynamiques, nous avons établi l'équivalence des deux modèles en utilisant les propriétés analytiques de la grande fonction de partition ¹²⁾ ainsi qu'un résultat de Penrose ¹⁵⁾ applicable au potentiel intervenant ici.

3.3. ÉQUIVALENCE DES MODÈLES CIRCULAIRE ET LINÉAIRE

Nous introduisons les grandes fonctions de partition des deux modèles, développées en puissance de la fugacité ζ . Pour le gaz circulaire cette grande fonction de partition est identique à la série $Q(\zeta)$ donnée par les expressions (2.7) et (2.8), d'après l'ana-

logie développée au paragraphe 3.1:

$$Q(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} q_n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \zeta z^n). \quad (3.14)$$

Pour le gaz linéaire, nous définissons de même $\tilde{Q}(\zeta)$ à l'aide des fonctions de partition \tilde{q}_n données par les expressions (3.9):

$$\tilde{Q}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \tilde{q}_n. \quad (3.15)$$

La pression et la densité du gaz circulaire, à la température inverse $\beta = 2$, sont données par les limites suivantes:

$$\beta p(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log Q(\zeta), \quad (3.16)$$

$$\rho(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} L^{-1} \log Q(\zeta), \quad (3.17)$$

pour les valeurs réelles et positives de la fugacité ζ .

On a les formules analogues pour $\tilde{p}(\zeta)$ et $\tilde{\rho}(\zeta)$ dans le cas linéaire. Nous montrons dans cette section

(i) que les limites (3.16) et (3.17) existent et définissent des fonctions holomorphes de ζ dans le plan complexe privé de la demi-droite réelle $[-\infty, -1]$,

(ii) que l'on a la relation $\rho(\zeta) = \zeta(\partial/\partial\zeta)\beta p(\zeta)$,

(iii) que les deux modèles sont équivalents à la limite thermodynamique, en ce qui concerne l'équation d'état $\beta = 2$:

$$p(\zeta) \equiv \tilde{p}(\zeta), \quad \rho(\zeta) \equiv \tilde{\rho}(\zeta).$$

3.3.1. *Propriétés analytiques des fonctions $Q(\zeta)$ et $\tilde{Q}(\zeta)$.* Dans le cas circulaire, les propriétés analytiques de $Q(\zeta)$ et la limite thermodynamique sont évidentes grâce à la représentation (3.14). La fonction $Q(\zeta)$ est une fonction entière de genre 0, dont tous les zéros sont réels, négatifs, inférieurs à -1 , et situés aux points $-\exp(2\pi an/L)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. La fonction $L^{-1} \log Q$ est analytique sur tout compact C extérieur à la demi-droite réelle $[-\infty, -1]$. L'expression

$$L^{-1} \log Q = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \log [1 - \zeta \exp(-2\pi an/L)]$$

peut être considérée comme une somme de Riemann qui converge pour chaque ζ sur C vers l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \log [1 - \zeta \exp(-2\pi ax)] dx.$$

Cette intégrale, fonction analytique dans le plan ζ privé de $\{\text{Im}\zeta = 0, \text{Re}\zeta < -1\}$, est

donc aussi limite uniforme de $L^{-1} \log Q(\zeta)$ sur le compact C . On a donc

$$\beta\rho(\zeta) = \int_0^\infty \log [1 - \zeta \exp(-2\pi ax)] dx, \quad (3.18)$$

et l'interversion des opérations dérivation et $\lim_{L \rightarrow \infty}$ est possible:

$$\rho(\zeta) = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \beta\rho(\zeta). \quad (3.19)$$

Passons maintenant à la fonction $\tilde{Q}(\zeta)$ du gaz linéaire. D'après les définitions (3.9) et (3.15) nous avons le développement suivant:

$$\tilde{Q}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^n \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \dots \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} ds_1 \dots ds_n \prod_{i < j \leq n} \frac{(s_i - s_j)^2}{a^2 + (s_i - s_j)^2}. \quad (3.20)$$

On voit aisément que $\tilde{Q}(\zeta)$ est le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral $1 + \zeta K_1$, avec le noyau K_1 ainsi défini:

$$K_1(s, s') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a + i(s - s')}, \quad -\frac{1}{2}L < s < \frac{1}{2}L, \quad -\frac{1}{2}L < s' < \frac{1}{2}L.$$

Il suffit de remarquer, d'après le lemme de Cauchy, que l'on a l'identité

$$\prod_{i < j \leq n} \frac{(s_i - s_j)^2}{a^2 + (s_i - s_j)^2} = \det \left| \frac{a}{a + i(s_k - s_l)} \right|_n. \quad (3.21)$$

Or le noyau K_1 , défini sur l'intervalle L , est un noyau de Hilbert-Schmidt positif puisque tous les déterminants qui définissent \tilde{q}_n sont positifs. On en déduit que $\tilde{Q}(\zeta)$ est une fonction entière de genre 0, dont tous les zéros ζ_n sont réels et négatifs. On a donc

$$\tilde{Q}(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n} \right). \quad (3.22)$$

Il faut maintenant connaître comment varie la distribution des zéros avec le volume L et obtenir un domaine de convergence uniforme de $L^{-1} \log \tilde{Q}(\zeta)$ à l'origine, c'est-à-dire une borne inférieure du module $-\zeta_1$ du premier zéro. Nous utiliserons pour cela un résultat dû à Penrose sur la convergence des séries de Mayer à volume fini ou infini.

3.3.2. *Convergence des séries de Mayer.* Pour les deux modèles de gaz, on peut appliquer la méthode de Mayer pour obtenir un développement de $L^{-1} \log Q$.

Définissons comme d'habitude les fonctions

$$f_L(s_1 - s_2) = e^{-\beta V_L(s_1 - s_2)} - 1 = - \frac{\text{sh}^2(a\pi/L)}{\text{sh}^2(a\pi/L) + \sin^2(\pi(s_1 - s_2)/L)}, \quad (3.23)$$

$$\tilde{f}(s_1 - s_2) = e^{-\beta V(s_1 - s_2)} - 1 = - \frac{a^2}{a^2 + (s_1 - s_2)^2}, \quad (3.24)$$

avec lesquelles sont sonstruites les intégrales associées aux graphes connexes de la série de Mayer. Soient $b_l(L)$ et $\tilde{b}_l(L)$ les coefficients d'ordre l pour les gaz circulaire et linéaire respectivement.

Nous savons déjà d'après les résultats du paragraphe 3.3.1 que la série

$$L^{-1} \log Q(\zeta) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l(L) \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^l \tag{3.25}$$

converge normalement, et même uniformément par rapport à L , dans un disque de rayon r inférieur à 1. D'après (3.14) et (3.25), on obtient aussi directement les coefficients $b_l(L)$:

$$b_l(L) = (2\pi a)^l \frac{(-)^{l-1}}{l} \frac{1}{L(1-z^l)}.$$

Or nous avons

$$[L(1-z^l)]^{-1} < [L(1-z)]^{-1} = [L(1-e^{-2\pi a/L})]^{-1},$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$|b_l(L)| < \frac{(2\pi a)^{l-1}}{l} (1+\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \tag{3.26}$$

valable pour tout l , en prenant L assez grand, par exemple supérieur à $2\pi a/\varepsilon$, d'où la convergence uniforme de 3.25 pour $|\zeta| < r < 1$. Or les deux points suivants établissent le contact entre les deux modèles: d'une part lorsque le volume augmente indéfiniment les coefficients $\tilde{b}_l(L)$ du gaz linéaire ont une limite $\tilde{b}_l(\infty)$: en effet la fonction \tilde{f} est sommable sur $[-\infty, +\infty]$, et les intégrales de Mayer associées aux divers graphes connexes sont absolument convergentes. D'autre part l'égalité des coefficients des séries de Mayer à volume infini est démontrée en appendice:

$$b_l(\infty) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} b_l(L) = \tilde{b}_l(\infty). \tag{3.27}$$

On déduit alors de l'égalité (3.27) et de la convergence uniforme de (3.25) pour $|\zeta| < r < 1$, la pression du gaz circulaire

$$\beta p(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log Q(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{b}_l(\infty) \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^l,$$

et la densité

$$\rho(\zeta) = \sum_{l=1}^{\infty} l \tilde{b}_l(\infty) \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^l, \quad |\zeta| < 1, \tag{3.28}$$

à l'aide des coefficients $\tilde{b}_l(\infty)$ du gaz linéaire.

Afin de pouvoir identifier les séries (3.28) à la pression ou à la densité du gaz linéaire, nous utiliserons un résultat de Penrose¹⁵), sur l'existence d'une borne inférieure du rayon de convergence $R(L)$ de la série de Mayer. Dans notre cas, les

hypothèses de Penrose se réduisent à ceci:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & V(s) \geq 0 \text{ pour tout } s, \\ \text{(b)} \quad & B(L) = \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} |e^{-\beta V(s)} - 1| ds \text{ existe.} \end{aligned} \quad (3.29)$$

La proposition (a) est vérifiée d'après la définition (3.8) du potentiel $V(s)$ du gaz linéaire. La proposition (b) nous donne ici pour $\beta = 2$

$$B(L) < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{a^2 + s^2} ds = \pi a.$$

La conclusion sur le rayon de convergence $R(L)$ est l'inégalité

$$R(L) \geq \frac{1}{eB(L)} > \frac{1}{e\pi a}; \quad (3.30)$$

on en déduit la convergence uniforme par rapport à L de la série

$$L^{-1} \log \tilde{Q}(\zeta) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{b}_l(L) \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^l$$

dans un disque de rayon inférieur à $R = 2/e$.

D'où, à la limite $L \rightarrow \infty$, la pression et la densité du gaz linéaire

$$\begin{aligned} \beta \tilde{p}(\zeta) &= \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{b}_l(\infty) \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^l, \\ \tilde{\rho}(\zeta) &= \sum_{l=1}^{\infty} l \tilde{b}_l(\infty) \left(\frac{\zeta}{2\pi a} \right)^l, \end{aligned} \quad (3.31)$$

fonctions analytiques de ζ dans le cercle de rayon $R = 2/e$. La comparaison des séries (3.28) et (3.31) nous donne donc les égalités

$$p(\zeta) = \tilde{p}(\zeta), \quad \rho(\zeta) = \tilde{\rho}(\zeta) \quad \text{pour } |\zeta| < R. \quad (3.32)$$

D'où l'identité de l'équation d'état des deux modèles pour les valeurs de la fugacité inférieures à $2/e$.

3.3.3. Fugacité quelconque. Pour démontrer l'équivalence des deux gaz pour toute valeur réelle positive de ζ , il suffit maintenant de montrer la convergence uniforme de $L^{-1} \log \tilde{Q}(\zeta)$ sur les compacts C déjà considérés pour $L^{-1} \log Q$.

Considérons la densité à volume L du gaz linéaire

$$\tilde{\rho}_L(\zeta) = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} L^{-1} \log \tilde{Q}(\zeta), \quad (3.33)$$

qui d'après (3.22) est une fonction méromorphe

$$\tilde{\rho}_L(\zeta) = L^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta}{\zeta - \zeta_n}. \quad (3.34)$$

Majorons $\tilde{\rho}_L(\zeta)$ sur le compact C :

$$\zeta^{-1} \tilde{\rho}_L(\zeta) = -L^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n} + \zeta L^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n(\zeta - \zeta_n)}. \quad (3.35)$$

Soit η_0 la distance positive de C à l'axe réel. On a

$$|\zeta^{-1} \tilde{\rho}_L(\zeta)| < \left| L^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n} \right| + \frac{|\zeta|}{\eta_0} \left| L^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n} \right|.$$

Or,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n} = \text{trace } K_1 = \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \frac{ds}{2\pi a} = \frac{L}{2\pi a}. \quad (3.36)$$

Donc,

$$|\zeta^{-1} \tilde{\rho}_L(\zeta)| < \left(1 + \frac{|\zeta|}{\eta_0}\right) \frac{1}{2\pi a}. \quad (3.37)$$

En tout point ζ du compact C nous avons donc

$$\tilde{\rho}_L(\zeta) < |\zeta| \left(1 + \frac{|\zeta|}{\eta_0}\right) \frac{1}{2\pi a}.$$

La famille de fonctions holomorphes $\tilde{\rho}_L(\zeta)$ est donc bornée dans son ensemble sur C . Or la suite $\tilde{\rho}_L(\zeta)$ converge dans le disque $|\zeta| < r < 1$ vers la fonction analytique $\tilde{\rho}(\zeta) = \rho(\zeta)$ définie par la série (3.28). Un théorème de Vitali permet de conclure que la suite $\tilde{\rho}_L(\zeta)$ converge uniformément sur C vers une fonction analytique $\tilde{\rho}(\zeta)$ qui prolonge donc la série (3.28) dans tout le plan complexe privé de la demi-droite réelle $[-\infty, -1]$, à laquelle tout compact C est extérieur. Dans le domaine d'analyticité de $\rho(\zeta)$ ainsi défini on a

$$\tilde{\rho}(\zeta) = \rho(\zeta),$$

et par intégration de la suite $\tilde{\rho}_L(\zeta)$

$$\tilde{p}(\zeta) = p(\zeta); \quad (3.38)$$

ce qui montre que les gaz circulaire et linéaire ont même équation d'état, à la température inverse $\beta = 2$.

3.4. L'ISOTHERME $\beta = 2$

A l'aide des expressions (3.18) et (3.19), nous obtenons pour la pression et la densité

$$\beta p = \int_0^{\infty} \log(1 + \zeta e^{-2\pi ax}) dx, \quad (3.39)$$

$$\rho = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (\beta p) = \int_0^{\infty} \frac{\zeta e^{-2\pi ax}}{1 + \zeta e^{-2\pi ax}} dx. \quad (3.40)$$

Nous obtenons donc

$$\rho = \frac{1}{2\pi a} \log(1 + \zeta), \quad (3.41)$$

et la fugacité en fonction de la densité

$$\zeta = \exp(2\pi a \rho) - 1. \quad (3.42)$$

L'élimination de ζ entre les relations (3.42) et (3.39) donne l'équation de la seule isotherme $\beta = 2$ sous la forme

$$\beta p = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi a \rho} \frac{x dx}{1 - e^{-x}}, \quad (3.43)$$

valable pour toute densité.

Aus faibles densités, nous avons le gaz idéal

$$\beta p = \rho + O(\rho^2),$$

et aux fortes densités un coefficient de compressibilité qui tend vers $\frac{1}{2}$:

$$\beta p = \pi a \rho^2 + \frac{\pi}{12a} + O(e^{-2\pi a \rho}). \quad (3.44)$$

On déduit de (3.43) le développement du viriel

$$\beta p / \rho = 1 + \frac{1}{4}(2\pi a \rho) + \sum_{l=1}^{\infty} (-)^{l-1} \frac{B_l}{(2l+1)!} (2\pi a \rho)^{2l}, \quad (3.45)$$

où les B_l sont les nombres de Bernoulli: $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, ... Cette série converge pour $a\rho < 1$, ce qui correspond évidemment à une singularité non physique. La borne inférieure du rayon de convergence donnée par Lebowitz et Penrose¹⁶⁾ est égale à $0.289/2\pi a = 0.046/a$, à comparer avec $1/a$.

On a vérifié que les trois premiers coefficients du viriel calculés avec les graphes de Mayer sans point d'articulation coïncidaient avec ceux du développement (3.45).

4. L'Ensemble Généralisé $E_2(z)$

4.1. DÉFINITION

Wigner, puis Dyson, ont exploité l'analogie entre la distribution des charges d'un gaz de Coulomb circulaire classique à la température β et la distribution des valeurs propres des matrices de différents ensembles¹⁸⁾. Pour $\beta = 2$, on a l'ensemble unitaire E_2 , qui est uniquement défini par la propriété d'être invariant dans les translations à gauche ou à droite par une matrice unitaire quelconque. Si s est un élément de l'ensemble, de valeurs propres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, la seule mesure $\mu(s)$ invariante à gauche est l'élément de volume du groupe unitaire; la probabilité élémentaire de l'élément s

dont la classe est définie par les ε , est alors

$$P_U(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n = \frac{1}{n!} \prod_{i < j} |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_n. \quad (4.1)$$

L'analogie thermodynamique vient de l'écriture suivante:

$$\prod_{i < j} |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2 = \exp\left(-\beta \sum_{i < j} W(\varphi_i - \varphi_j)\right), \quad \beta = 2,$$

avec

$$W(\varphi_i - \varphi_j) = -\log |\varepsilon_i - \varepsilon_j|,$$

qui représente le potentiel coulombien à deux dimensions entre deux charges-unités d'affixes ε_i et ε_j sur le cercle de rayon 1; la fonction $P_U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ peut être interprétée soit comme une distribution de valeurs propres sur le cercle unité, soit comme la densité en phase de l'état microscopique du gaz de Coulomb décrit sect. 3.

Nous définissons maintenant, par analogie précise avec le gaz circulaire étudié dans la section 3, un ensemble unitaire „généralisé” $E_2(z)$ dépendant d'un paramètre réel z compris entre 0 et 1. Contrairement à celle de l'ensemble unitaire de Dyson $E_2(0)$, notre définition est arbitraire. On peut noter cependant que l'ensemble proposé réalise une interpolation continue entre l'ensemble unitaire obtenu pour $z = 0$ et l'ensemble “sans corrélation” obtenu pour $z = 1$.

Par hypothèse, la probabilité d'une matrice unitaire s de l'ensemble $E_2(z)$ est proportionnelle à $\det|1 - zA(s)|^{-1} d\omega_U$ où $d\omega_U$ est l'élément de volume du groupe unitaire et où la fonction de poids $\det|1 - zA(s)|^{-1}$ est définie au paragraphe 2.5 par la formule (2.25).

La distribution des valeurs propres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ dans l'ensemble $E_2(z)$ est donc donnée par la loi normalisée

$$P(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = C_n \frac{\Delta \Delta^*}{\psi(z)\psi^*(z)} = C_n \prod_{i < j} \left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i - z\varepsilon_j} \right|^2, \quad (4.2)$$

où le coefficient de normalisation est donné d'après (2.14) et (2.22) par les expressions

$$C_n = z^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{(1-z)^n} \frac{1}{q_n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{1-z^k}{1-z}. \quad (4.3)$$

Une troisième forme, commode pour les calculs, de la fonction $P(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ est la suivante, d'après (2.12):

$$P(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = \frac{1}{q_n} \det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right|_n. \quad (4.4)$$

4.2. DÉFINITION DES FONCTIONS DE CORRÉLATIONS

Soit $A(\varphi)$ une fonction test définie sur l'intervalle 0, 1. Proposons nous de calculer

la valeur moyenne de la quantité suivante dépendant du paramètre ξ :

$$G = \prod_{i=1}^n (1 + \xi A(\varphi_i)) \quad (4.5)$$

relativement à la loi de probabilité $P(\varphi_1 \dots \varphi_n)$.

On obtient aisément le développement en puissances de ξ

$$\langle G \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \xi^k \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_n A(\varphi_1) \dots A(\varphi_k) \times P(\varphi_1 \dots \varphi_k, \varphi_{k+1} \dots \varphi_n). \quad (4.6)$$

Si la fonction de corrélation d'ordre k est ainsi définie:

$$R_k(\varphi_1 \dots \varphi_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_{k+1} \dots d\varphi_n P(\varphi_1 \dots \varphi_n), \quad (4.7)$$

la fonctionnelle $\langle G \rangle$ de A admet le développement

$$G = \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_k R_k(\varphi_1 \dots \varphi_k) A(\varphi_1) \dots A(\varphi_k); \quad (4.8)$$

l'expression $R_k(\varphi_1 \dots \varphi_k) d\varphi_1 \dots d\varphi_k$ est la probabilité d'observer k niveaux quelconques situés chacun entre les angles φ_1 et $\varphi_1 + d\varphi_1$, φ_2 et $\varphi_2 + d\varphi_2$, etc. . . .

On définit aussi les fonctions réduites $Y_k(\varphi_1 \dots \varphi_k)$ comme les coefficients de la fonctionnelle $\log \langle G \rangle$:

$$\log \langle G \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_1 \dots d\varphi_k Y_k(\varphi_1 \dots \varphi_k) A(\varphi_1) \dots A(\varphi_k). \quad (4.9)$$

Supposons d'autre part que nous voulions connaître la probabilité de n'observer aucun niveau dans l'intervalle angulaire $-\theta, +\theta$. Prenons $\xi = 1$ et

$$A(\varphi) = 0 \text{ si } \varphi \text{ est extérieur à l'intervalle,}$$

$$A(\varphi) = 1 \text{ si } \varphi \text{ est intérieur à l'intervalle;}$$

la quantité

$$R = \langle G \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^n (1 - A(\varphi_i)) \right\rangle$$

est évidemment la probabilité cherchée, et l'on obtient

$$R = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\theta}^{+\theta} \dots \int_{-\theta}^{+\theta} d\varphi_1 \dots d\varphi_k R_k(\varphi_1 \dots \varphi_k). \quad (4.10)$$

4.3. LA FONCTION DE CORRÉLATION D'ORDRE 2

D'après la définition (4.7) et l'expression (4.4), nous obtenons pour la fonction de

corrélation à deux niveaux

$$R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{n(n-1)}{q_n} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_3 d\varphi_4 \dots d\varphi_n \det \left| \frac{1}{1 - z\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1}} \right|_n. \quad (4.11)$$

La méthode de calcul utilisée sect. 2.4 pour la normalisation (formules 2.18 et 2.19) donne ici

$$\begin{aligned} R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= n(n-1) \frac{1}{q_n} \sum_{\alpha_i \geq 0} \sum_P I(P) z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \\ &\quad \times \int_0^1 \dots \int_0^1 d\varphi_3 \dots d\varphi_n \varepsilon_1^{\alpha_1 - \alpha_{P1}} \varepsilon_2^{\alpha_2 - \alpha_{P2}} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n - \alpha_{Pn}} \\ &= \frac{n(n-1)}{q_n} \sum_{\alpha_i \geq 0} z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{\alpha_1 - \alpha_2} & \varepsilon_1^{\alpha_1 - \alpha_3} & \dots & \varepsilon_1^{\alpha_1 - \alpha_n} \\ \varepsilon_2^{\alpha_2 - \alpha_1} & 1 & \varepsilon_2^{\alpha_2 - \alpha_3} & \dots & \varepsilon_2^{\alpha_2 - \alpha_n} \\ \delta(\alpha_3 - \alpha_1) & \delta(\alpha_3 - \alpha_2) & 1 & \dots & \delta(\alpha_3 - \alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta(\alpha_n - \alpha_1) & \delta(\alpha_n - \alpha_2) & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

On voit aisément que le déterminant est nul dès que deux entiers α sont égaux. Si on les suppose tous distincts, le déterminant se réduit à

$$1 - (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

On a donc

$$R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{n(n-1)}{q_n} \sum_{\alpha_i \geq 0 \text{ distincts}} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \right] z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \quad (4.13)$$

ou encore

$$R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = n(n-1) - \frac{n!}{q_n} \sum_{\substack{\alpha_3 < \alpha_4 < \dots < \alpha_n \\ \alpha_1 < \alpha_2 \text{ distincts}}} 2\mathcal{R} \left(\frac{z\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{z\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{\alpha_2} z^{\alpha_3 + \dots + \alpha_n}.$$

On est alors amené à effectuer les sommes successives suivantes:

$$\sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} \sum_{0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n} z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{\lambda-1}} \left(\frac{z\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\alpha_\lambda} z^{\alpha_{\lambda+1} + \dots + \alpha_{\mu-1}} \left(\frac{z\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{\alpha_\mu} z^{\alpha_{\mu+1} + \dots + \alpha_n}$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} \frac{z}{1-z} \frac{z^2}{1-z^2} \dots \frac{z^{n-\mu}}{1-z^{n-\mu}} \frac{z^{n-\mu+1} \varepsilon_2 / \varepsilon_1}{1-z^{n-\mu+1} \varepsilon_2 / \varepsilon_1} \dots \frac{z^{n-\lambda} \varepsilon_2 / \varepsilon_1}{1-z^{n-\lambda} \varepsilon_2 / \varepsilon_1} \\ \times \frac{z^{n-\lambda+1}}{1-z^{n-\lambda+1}} \dots \frac{z^{n-1}}{1-z^{n-1}} \frac{1}{1-z^n}. \end{aligned}$$

Après division par q_n , on obtient pour $R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = n(n-1) - 2 \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} \prod_{k=\lambda}^{\mu-1} \frac{1-z^k}{(\varepsilon_1/\varepsilon_2) - z^k}.$$

On vérifie sur cette expression que R_2 ne dépend que de la différence $\varphi_1 - \varphi_2$, et que R_2 s'annule avec cette différence.

4.4. LA FONCTION DE CORRÉLATION DU GAZ LINÉAIRE INFINI

Nous supposons que le nombre n de particules ou de niveaux augmente indéfiniment, tandis que leur distance moyenne D tend vers une limite finie.

A la limite $n \rightarrow \infty$, nous posons comme sect. 3.2

$$\frac{n}{L} = \rho = \frac{1}{D}, \quad z = \exp(-2\pi a/L), \quad \varepsilon_k = \exp(2\pi i s_k/L).$$

Les fonctions de corrélation $r_k(s_1, s_2 \dots s_k)$ du modèle linéaire infini sont définies par l'équivalence pour $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{D^k} r_k(s_1 s_2 \dots s_k) ds_1 ds_2 \dots ds_k = R_k(\varphi_1 \dots \varphi_k) d\varphi_1 \dots d\varphi_k,$$

d'où l'expression de $r_2(s_1 - s_2)$ que nous écrivons sous la forme

$$r_2(s) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\lambda < \mu} \prod_{k=\lambda}^{\mu-1} \left[1 + \frac{e^{(2\pi i s/L)} - 1}{L(1 - e^{-(2\pi a k/L)})} \right]^{-1}. \quad (4.14)$$

La quantité s restant finie, de l'ordre de la distance D , on obtient

$$r_2(s) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} \exp \left\{ -\frac{2\pi i s}{L} \sum_{k=\lambda}^{\mu-1} (1 - e^{-2\pi a k/L})^{-1} \right\},$$

c'est-à-dire en posant $\lambda/n = x$, $\mu/n = y$

$$r_2(s) = 1 - 2\mathcal{R} \int_{0 < x < y < 1} dx dy \exp \left\{ -2\pi i \rho s \int_x^y d\xi (1 - e^{-2\pi a \rho \xi})^{-1} \right\}.$$

Après intégration de la phase de l'exponentielle, et symétrisation en x et y , on trouve

$$r_2(s) = 1 - \left| \int_0^1 dx \exp \left[i \frac{s}{a} \log (e^{2\pi a \rho x} - 1) \right] \right|^2. \quad (4.15)$$

On peut modifier l'expression (4.15) en introduisant la quantité v ainsi définie:

$$v = \log \frac{1}{\zeta} = -\log (e^{2\pi a \rho} - 1). \quad (4.16)$$

D'où la forme de la fonction de corrélation à deux niveaux

$$r_2(s) = 1 - Y_2(s),$$

$$Y_2(s) = \left(\frac{D}{2\pi a} \right)^2 \left| \int_v^\infty \frac{d\omega}{e^\omega + 1} e^{-i\omega s/a} \right|^2. \quad (4.17)$$

Le facteur de forme à deux niveaux ou transformée de Fourier de Y_2 a l'avantage de s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. En effet, pour

$$b(k) = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_2(s) e^{iks} ds \tag{4.18}$$

on obtient

$$b(k) = \frac{D}{2\pi a} \int_v^\infty dx \int_v^\infty dx' (e^x + 1)^{-1} (e^{x'} + 1)^{-1} \delta(x - x' - ka),$$

et enfin

$$b(k) = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{sh}(\frac{1}{2}|k|a)} \left\{ \frac{D}{2\pi a} e^{\frac{1}{2}|k|a} \log [1 + e^{-|k|a} (e^{2\pi a/D} - 1)] - e^{-\frac{1}{2}|k|a} \right\}. \tag{4.19}$$

Ce facteur de forme a l'interprétation suivante: Définissons les sommes

$$\rho_k = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^k = \exp(2\pi i k \varphi_j), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

On a d'après (4.7)

$$\langle \rho_k \rho_{-l} \rangle = \delta_{kl} \left[n + \mathcal{R} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varepsilon^k R_2(\varepsilon) d\varphi \right].$$

A la limite $n \rightarrow \infty$ et pour $k \neq 0$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \langle \rho_k \rho_{-l} \rangle = \delta_{kl} \left[1 - \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i ks/Dn} Y_2(s) ds \right],$$

c'est-à-dire pour $k \neq 0$, n très grand,

$$1 - b\left(\frac{2\pi k}{D}\right) = \frac{1}{n} \langle |\rho_k|^2 \rangle. \tag{4.20}$$

Les sommes ρ_k , ou plutôt les sommes partielles, sont faciles à construire quand on connaît une série de niveaux expérimentaux E_j :

$$\rho_k = \sum_j \exp i\omega E_j, \quad k = n \frac{D\omega}{2\pi},$$

et permettent d'atteindre le facteur de forme $b(\omega)$, moyennant certaines corrections.

La connaissance de la corrélation à deux niveaux permet de préciser le rôle du paramètre a . Nous savons déjà que a est la distance au-dessous de laquelle l'interaction entre deux particules du gaz linéaire devient coulombienne. Au-delà de a le potentiel coulombien est en quelque sorte compensé. Etudions d'abord les deux limites a/D très petit qui correspond à un potentiel très faible c'est-à-dire à des particules presque indépendantes, et a/D très grand qui correspond à la limite $z = 0$ où le potentiel est coulombien sur une longue portée a .

(i) $a/D \rightarrow 0$. La quantité v définie en (4.16) est très grande, on peut écrire pour $Y_2(s)$

$$Y_2(s) \approx \left(\frac{D}{2\pi a} \right)^2 \left| \int_v^\infty \exp \left\{ -\omega \left(1 + i \frac{s}{a} \right) \right\} d\omega \right|^2, \\ \approx \frac{a^2}{a^2 + s^2} = e^{-\beta V(s)} - 1.$$

Ce résultat était attendu pour un gaz dilué. A la limite $a = 0$, on a $Y_2(s) = 0$.

(ii) $a/D \rightarrow \infty$, $v \propto -(2\pi a/D) \rightarrow -\infty$. Dans ces conditions, le facteur $(e^\omega + 1)^{-1}$ coupe l'intégrale à $\omega \approx 0$ et l'on a

$$Y_2(s) \approx \left(\frac{D}{2\pi a} \right)^2 \left| \int_{-2\pi a/D}^0 e^{i(\omega s/a)} d\omega \right|^2 = \frac{\sin^2(\pi s/D)}{(\pi s/D)^2}.$$

Donc, pour a/D très grand, $Y_2(s)$ tend vers la fonction de corrélation correspondante dans l'ensemble unitaire, telle qu'elle est donnée par Dyson (réf. ²¹), section III).

Une différence importante entre la distribution des valeurs propres dans l'ensemble $E_2(z)$ et dans l'ensemble unitaire limite E_2 tient à l'absence d'un ordre de type cristallin dans le premier cas. Le facteur de forme $b(k)$ a pour seule singularité une discontinuité de la dérivée première en $k = 0$, qui donne une corrélation à longue portée en s^{-2} , mais il n'y a pas le facteur périodique de période D qui existe dans le cas limite $a \rightarrow \infty$. Ce fait important vient de ce que le potentiel répulsif entre les niveaux n'a pas la portée infinie du potentiel purement coulombien. Ce phénomène d'ordre à longue distance indiqué par l'oscillation persistante de la corrélation à deux niveaux est distinct du phénomène de régularité de l'ensemble des niveaux, remarqué par Dyson, bien qu'ils aient leur origine commune dans le potentiel purement coulombien. Pour le voir, on pourrait étudier la régularité des valeurs propres ε dans le modèle circulaire en répétant le calcul de Dyson sur l'écart moyen entre les distributions des ε sur le cercle et les sommets d'un polygone régulier de n côtés; une quantité pouvant servir de mesure à cet écart est la suivante:

$$\delta^2 = 1 - \left\langle \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp 2\pi i \left(\varphi_k - \frac{k}{n} \right) \right|^2 \right\rangle,$$

qui dans l'ensemble unitaire est de l'ordre

$$\delta^2 \approx \frac{\log n}{n^2}.$$

Dans l'ensemble $E_2(z)$, on trouverait

$$\delta^2 \approx \frac{1}{n} (b(0) - 1),$$

où $b(0) - 1$ est un coefficient fini, lorsque a/D est fini. Pour $z = 0$ ou $a = \infty$, $b(0) = 1$ et le terme dominant de δ^2 n'est plus en $1/n$, mais celui calculé dans l'ensemble uni-

taire. On verra au paragraphe 4.6 que l'égalité $b(0) - 1 = 0$ exprime que le gaz est „incompressible”, ce qui est une propriété du gaz de Coulomb.

4.5. EXPRESSION DE L'ÉNERGIE

La fonction de corrélation à deux particules permet de calculer l'énergie du gaz linéaire à la température $\beta = 2$, et par conséquent la dérivée pour $\beta = 2$ de la fonction de partition (3.9)

$$\tilde{q}_n(\beta) = \frac{1}{(2\pi a)^n} \int_0^L \dots \int_0^L ds_1 \dots ds_n \exp \left\{ -\beta \sum_{i < j} V(s_i - s_j) \right\}.$$

D'où l'énergie totale

$$E(\beta) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \log \tilde{q}_n = \frac{1}{\tilde{q}_n} \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \cdot \frac{1}{(2\pi a)^n} \int_0^L ds_1 \dots ds_n V(s_1 - s_2) \exp \left\{ -\beta \sum_{i < j} V \right\},$$

et pour $\beta = 2$, l'énergie par particule

$$\frac{E}{n} = \frac{1}{2D} \int_{-\infty}^{+\infty} V(s) R_2(s) ds,$$

avec

$$V(s) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right).$$

On en déduit, à l'aide de la fonction $Y_2(s)$,

$$\frac{E}{n} = \frac{\pi a}{2D} - \frac{1}{4D} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) Y_2(s) ds. \tag{4.21}$$

Utilisant la transformée de Fourier de $V(s)$ et de $Y_2(s)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) Y(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{|\omega|} (1 - e^{-a|\omega|}) b(\omega),$$

et substituant pour $b(\omega)$ l'expression (4.19) dans la formule (4.21), on obtient finalement l'énergie par particule

$$\frac{E}{n} = \frac{\pi a}{2D} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \frac{D}{2\pi a} \log [1 + e^{-\omega} (e^{2\pi a/D} - 1)] - e^{-\omega} \right\}. \tag{4.22}$$

4.6. LES FONCTIONS DE CORRÉLATION D'ORDRE FINI

La définition (4.7) de la fonction de corrélation d'ordre p et la méthode du paragraphe (4.3) fournissent la série multiple

$$R_p(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p) = \frac{1}{q_n} \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{\alpha_i \geq 0} \sum_{\text{distincts}} z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{\alpha_1 - \alpha_2} & \dots & \varepsilon_1^{\alpha_1 - \alpha_p} \\ \varepsilon_2^{\alpha_2 - \alpha_1} & 1 & \dots & \varepsilon_2^{\alpha_2 - \alpha_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_p^{\alpha_p - \alpha_1} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{4.23}$$

ou encore

$$R_p(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p) = \frac{1}{q_n} \sum^{(\varepsilon)} \sum^{(\alpha)} z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_p} \det |\varepsilon_i^{\alpha_i - \alpha_j}|_p; \quad (4.24)$$

la sommation $\sum^{(\varepsilon)}$ porte sur les permutations des ε , la sommation $\sum^{(\alpha)}$ s'effectue de proche en proche sur $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pour chaque imbrication des deux suites de valeurs distinctes de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_n$. On obtient, après division par Q_n ,

$$\begin{aligned} R_p(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p) &= \sum_{0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p < n}^{(\varepsilon)} \sum_P I(P) \\ &\prod_{\lambda_1 \leq k_1 < \lambda_2} \frac{1 - z^{k_1}}{(\varepsilon_1 / \varepsilon_{P_1}) - z^{k_1}} \prod_{\lambda_2 \leq k_2 < \lambda_3} \frac{1 - z^{k_2}}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_{P_1} \varepsilon_{P_2}) - z^{k_2}} \dots \\ &\prod_{\lambda_{p-1} \leq k_{p-1} < \lambda_p} \frac{1 - z^{k_{p-1}}}{(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p-1} / \varepsilon_{P_1} \dots \varepsilon_{P_{p-1}}) - z^{k_{p-1}}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Afin de poursuivre le calcul, nous passons à la limite infinie. On obtient à l'aide de (4.14), en désignant par $\sum^{(s)}$ une sommation sur les permutations des s ,

$$\begin{aligned} r_p(s_1 \dots s_p) &\propto \frac{1}{n^p} \sum^{(s)} \sum_{0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq n} I(P) \\ &\times \exp \frac{2\pi i}{L} \left\{ (s_{P_1} - s_1) \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2 - 1} (1 - e^{-2\pi a k / L})^{-1} + (s_{P_1} + s_{P_2} - s_1 - s_2) \sum_{\lambda_2}^{\lambda_3 - 1} (1 - e^{-2\pi a k / L})^{-1} \right. \\ &\left. + \dots + (s_{P_1} + \dots + s_{P_p} - s_1 - \dots - s_p) \sum_{\lambda_p}^n (1 - e^{-2\pi a k / L})^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A la limite thermodynamique on obtient, s_1, \dots, s_p restant finis,

$$\begin{aligned} r_p(s_1 s_2 \dots s_p) &= \sum^{(s)} \int_{0 < x_1 < \dots < x_p < 1} dx_1 \dots dx_p \sum_P I(P) \\ &\times \exp(2\pi i / D) \left\{ (s_{P_1} - s_1) \int_{x_1}^{x_2} dx (1 - e^{-2\pi a p x})^{-1} + (s_{P_1} + s_{P_2} - s_1 - s_2) \int_{x_2}^{x_3} \dots + \dots \right\} \\ &= \int_{0 < x_1 < x_2 < \dots < 1} dx_1 \dots dx_p \sum_P \sum^{(s)} I(P) \\ &\times \exp \left\{ i \frac{s_{P_1} - s_1}{D} \log \frac{\exp(2\pi a x_p / D) - 1}{\exp(2\pi a x_1 / D) - 1} + i \frac{s_{P_2} - s_2}{D} \log \frac{\exp(2\pi a x_p / D) - 1}{\exp(2\pi a x_2 / D) - 1} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Prenons comme nouvelles variables les ω_i , $i = 1, 2, \dots, p$, définies par $\exp(2\pi a p x_i) - 1 = \exp(-\omega_i)$, $v < \omega_1 < \infty$, où v est donné par (4.16):

$$r_p(s_1 \dots s_p) = \left(\frac{D}{2\pi a} \right) \sum^{(s)} \int_{v < \omega_p < \dots < \omega_1 < \infty} \frac{d\omega_1}{e^{\omega_1} + 1} \dots \frac{d\omega_p}{e^{\omega_p} + 1}$$

$$\times \det \left| \exp i \frac{(s_k - s_l)}{a} (\omega_k - \omega_l) \right|_p,$$

$$r_p = \frac{1}{p!} \left(\frac{D}{2\pi a} \right)^p \int_v^\infty \dots \int_v^\infty \frac{d\omega_1 \dots d\omega_p}{(e^{\omega_1} + 1) \dots (e^{\omega_p} + 1)} |\det |e^{i(\omega_k s_l/a)}||^2. \quad (4.27)$$

Le théorème de Gram nous donne la forme finale de la fonction de corrélation à p niveaux

$$r_p(s_1 \dots s_p) = \det |g(s_i - s_j)|_p \quad (4.28)$$

où la fonction $g(s)$ déjà obtenue, formule (4.17), pour la corrélation à 2 niveaux, est donnée par l'intégrale

$$g(s) = \frac{D}{2\pi a} \int_v^\infty \frac{d\omega}{e^\omega + 1} e^{-(i\omega s/a)}. \quad (4.29)$$

La formule (4.28) pour la fonction de corrélation à p niveaux est d'une grande simplicité et elle est complètement analogue aux formules obtenues par Dyson ¹⁹⁾ et par Wigner ⁶⁾ pour les ensembles circulaires et gaussiens dans les cas unitaires et hermitiques. On a de même pour les fonctions réduites à p niveaux définies par (4.9)

$$Y_p(s_1 \dots s_p) = \frac{(-)^{p-1}}{p} \sum^{(s)} g(s_1 - s_2)g(s_2 - s_3) \dots g(s_p - s_1).$$

Remarquons ici que la conjuncture de Mehta et Dyson sur les gaz incompressibles au sens défini par ces auteurs [†] n'a aucune raison d'être vérifiée dans ce modèle-ci, sauf à la limite $a \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_p(s_1 s_2 \dots s_p) ds_p \neq (p-1) Y_{p-1}(s_1 s_2 \dots s_{p-1}).$$

On sait que la compressibilité est reliée à la fonction de corrélation à deux corps. A une dimension, la relation prend la forme suivante:

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} Y_2(s) ds = 1 - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\beta.$$

A l'aide de l'isotherme (3.43) et de la définition (4.18) du facteur de forme, on obtient

$$b(0) - 1 = - \frac{D}{2\pi a} (1 - e^{-2\pi a/D}),$$

ce qui peut être vérifié directement par l'expression (4.19). Si a augmente indéfiniment, $\partial \rho / \partial p$ tend vers zéro.

[†] Réf. ¹⁹⁾, sect.V § C.

4.7. L'ESPACEMENT DES NIVEAUX

Puisque nous connaissons les fonctions de corrélation à tous les ordres, l'application de la formule (4.9) nous donne la probabilité pour que l'on n'observe aucun niveau dans l'intervalle angulaire $2\pi\varphi$:

$$R(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} \int_{-\frac{1}{2}\varphi}^{+\frac{1}{2}\varphi} \dots \int_{-\frac{1}{2}\varphi}^{+\frac{1}{2}\varphi} d\varphi_1 \dots d\varphi_k R_k(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k). \quad (4.30)$$

A la limite $n \rightarrow \infty$, la probabilité de n'observer aucun niveau dans un intervalle de longueur s est donc

$$R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} \frac{1}{D^k} \int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} \dots \int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} ds_1 \dots ds_k \det |g(s_i - s_j)|_k. \quad (4.31)$$

On en conclut que $R(s)$ est le déterminant de Fredholm de l'équation intégrale

$$\lambda f(x) - \frac{1}{D} \int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} g(x-y)f(y)dy = 0, \quad (4.32)$$

c'est-à-dire

$$R(s) = \det |\delta(x-y) - D^{-1}g(x-y)|, \quad |x| < \frac{1}{2}s, \quad |y| < \frac{1}{2}s.$$

L'analogie avec les cas correspondants des ensembles circulaires ou gaussiens serait complète s'il était possible d'obtenir le spectre du noyau g par des méthodes aussi simples.

A la limite $a/D \rightarrow \infty$, on retombe sur le cas de l'ensemble unitaire

$$\begin{aligned} g(x-y) &\rightarrow \frac{1}{2\pi a} \int_{-2\pi a/D}^0 e^{-i\omega(x-y/a)} d\omega \\ &\approx e^{-\pi i(x-y/a)} \frac{\sin \pi(x-y)/D}{\pi(x-y)}. \end{aligned}$$

Le déterminant de Fredholm $R_1(s)$ est le même que celui de l'équation homogène

$$f_1(x) = \lambda \int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} \frac{\sin [\pi(x-y)/D]}{\pi(x-y)} f_1(y) dy, \quad (4.33)$$

déjà étudiée dans un précédent travail ²⁰).

Signalons la transformation suivante de l'équation aux valeurs propres

$$\frac{\lambda}{D} \int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} g(x-y)f(y) = f(x). \quad (4.34)$$

En prenant pour fonction inconnue $\varphi(\omega)$ ainsi définie:

$$\int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} dy e^{-i\omega y/a} f(y) = \varphi(\omega)(e^\omega + 1),$$

on obtient l'équation au noyau symétrisable

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_v^\infty \frac{\sin [(\omega - \omega')s/2a]}{\omega - \omega'} \varphi(\omega') d\omega' = (e^\omega + 1)\varphi(\omega), \tag{4.35}$$

où ne figurent que des fonctions élémentaires. Le noyau g est hermitique, positif et de carré sommable. Le spectre est donc discret et le déterminant de Fredholm $R(s)$ admet de développement convergent

$$R(s) = \prod_{k=1}^\infty (1 - \lambda_k),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, est la suite des valeurs propres de (4.34).

Appendice

Nous voulons démontrer l'égalité $b_l(\infty) = \tilde{b}_l(\infty)$. Le coefficient $b_l(L)$ est une somme de contributions $(-)^p W_G(L)$ associées aux graphes connexes G d'ordre l comprenant p lignes.

La contribution typique de l'un d'eux, G , s'écrit

$$W_G(L) = L^{-1} \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \dots \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} ds_0 ds_1 \dots ds_{l-1} \prod_{\text{lignes de } G} f_L, \tag{A.1}$$

où le produit, dans l'intégrant, porte sur les fonctions f_L associées à chaque ligne de G de la façon usuelle. Dans cet appendice, nous appelons encore f_L et \tilde{f} les fonctions définies sect. 3, formules (3.23) et (3.24), mais changées de signe, afin de n'avoir à manipuler que des quantités positives. Comme f_L , définie par l'égalité (3.23), est périodique de période L , $W_G(L)$ se ramène à une intégrale d'ordre $l-1$

$$W_G(L) = \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \dots \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} ds_1 \dots ds_{l-1} \prod_{\text{lignes de } G} f_L, \tag{A.2}$$

où nous fixons s_0 à l'origine: $s_0 = 0$.

Nous notons le domaine d'intégration de (A.2) par $[L]^{l-1}$ et nous divisons celui-ci en deux parties:

$$[L]^{l-1} = [L']^{l-1} + [\delta]. \tag{A.3}$$

Le point (s_1, \dots, s_{l-1}) est dans $[L']^{l-1}$ si chaque s_i est compris entre $-\frac{1}{2}L'$, et $+\frac{1}{2}L'$. Nous écrirons $L' = L - \lambda$ où λ est une longueur dépendant de L : pour L assez grand nous prendrons $\lambda = L^{\frac{1}{2}+\alpha}$, où α est un nombre fixé, strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$; $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, de sorte que $1 \ll \lambda \ll L$. Le domaine $[\delta]$ est donc un voisinage de l'ordre de $L^{\frac{1}{2}+\alpha}$ de la frontière du domaine d'intégration.

L'intégrale (A.2) est la somme de deux intégrales portant sur les domaines $[L']^{l-1}$ et $[\delta]$:

$$W_G(L) = W_G[L'] + W_G[\delta]; \tag{A.4}$$

$W_G[\delta]$ a le même intégrant que (A.2), mais l'intégrale porte sur toutes les configurations $(s_1, s_2, \dots, s_{l-1})$ où au moins l'un des s est extérieur au segment $-\frac{1}{2}L', +\frac{1}{2}L'$.

Appelons $W_{G_j}(L)$ l'intégrale sur les configurations de points où s_j est sur $[L-L']$, les autres s variant librement dans L , domaine que nous notons $[\delta_j]$. Comme $[\delta]$ est compris dans la réunion des $[\delta_j]$ $j = 1, 2, \dots, l-1$, on en déduit

$$W_G[\delta] \leq \sum_{j=1}^{l-1} W_{G_j}(L). \quad (\text{A.5})$$

Nous montrerons d'abord que $W_G(L)$ et $W_G[L']$ ont même limite pour $L \rightarrow \infty$; il suffira de montrer d'après (A.4) et (A.5) que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_{G_1}(L) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Le domaine $[\delta_1]$ se décompose en deux domaines symétriques. A cause de la parité de l'intégrant, il suffit de considérer l'un d'eux défini par les inégalités

$$-\frac{1}{2}L < s_1 < -\frac{1}{2}(L-\lambda) \text{ et } -\frac{1}{2}L < s_j < \frac{1}{2}L, \quad j = 2, 3, \dots, l-1:$$

$$W_{G_1}(L) = 2 \int_{-\frac{1}{2}L}^{-\frac{1}{2}(L-\lambda)} ds_1 \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} ds_2 \dots ds_{l-1} \prod_{\text{lignes de } G} f_L. \quad (\text{A.7})$$

Le graphe G étant connexe, il existe sur G un arbre \mathcal{A} de l points et $l-1$ lignes tels que s_0 et s_1 soient deux points extrêmes de l'arbre. Soient $s_0, s', s'', \dots, s''', s_1$ la chaîne formée des lignes de \mathcal{A} sur G qui connecte s_0 à s_1 . Cette chaîne comprend q points avec $q \geq 2$. Appelons $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$, les autres points de G qui ne sont pas sur cette chaîne. L'ensemble de points $s_0, s', s'', \dots, s''', s_1, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ coïncide donc avec l'ensemble des l points $s_0 = 0, s_1, \dots, s_{l-1}$ mais leurs noms sont différents. L'intégrant de $W_{G_1}(L)$ est un produit de trois facteurs:

$$(i) \quad f_L(s')f_L(s''-s') \dots f_L(s_1-s'''),$$

défini avec les f_L de la chaîne, allant de $s_0 = 0$ à s_1 ,

$$(ii) \quad f_L(\sigma^{(1)}-s'')f_L(\sigma^{(2)}-s''')f_L(\sigma^{(3)}-\sigma^{(2)}) \dots$$

formé avec les f_L qui sont sur l'arbre \mathcal{A} mais extérieurs à la chaîne,

$$(iii) \quad \text{facteur formé des } f_L \text{ qui appartiennent au complémentaire de l'arbre } \mathcal{A} \text{ sur } G.$$

Comme les f_L sont inférieurs à 1, on en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} W_{G_1}(L) &< 2 \\ &\times \int_{-\frac{1}{2}L}^{-\frac{1}{2}(L-\lambda)} ds_1 \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \dots \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} d\sigma^{(1)} f_L(\sigma^{(1)}-s) d\sigma^{(2)} f_L(\sigma^{(2)}-s) \dots f_L(\sigma^3-\sigma^2) \dots \\ &\quad \times ds' ds'' \dots ds''' f_L(s') f_L(s''-s') \dots f_L(s_1-s'''). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A cause de la structure d'arbre on peut intégrer de proche en proche sur les σ qui sont

au nombre de $l-q$. De

$$\int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} f_L(\sigma-s)d\sigma = L \operatorname{th} \frac{a\pi}{L} < a\pi,$$

on déduit

$$W_{G_1}(L) < 2 \int_{-\frac{1}{2}L}^{-\frac{1}{2}(L-\lambda)} ds_1 \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \dots ds' ds'' \dots f_L(s_1-s''') \dots f_L(s') (a\pi)^{l-q}. \quad (\text{A.9})$$

Pour évaluer ce produit de convolution, nous utilisons le lemme suivant facile à démontrer:

Posant

$$f_L = \operatorname{th} \gamma g_{L,\gamma}, \quad g_{L,\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\gamma}{\operatorname{sh}^2 \gamma + \sin^2 \frac{\pi s}{L}},$$

on a

$$g_{L,\gamma} * g_{L,\gamma'} = L g_{L,\gamma+\gamma'}.$$

On en déduit aisément

$$\underbrace{f_L * f_L * \dots * f_L}_{q-1 \text{ fois}} = L^{q-1} \frac{\operatorname{th} \gamma^{q-1}}{\operatorname{th} (q-1)\gamma} f_L,$$

$$f_L * \dots * f_L(S) < 2(a\pi)^{q-2} \frac{L}{(q-1)} f_L(S). \quad (\text{A.10})$$

Reportant l'inégalité (A.10) dans (A.9) on obtient

$$W_{G_1}(L) < 2(a\pi)^{q-2} \frac{L}{q-1} 2(a\pi)^{l-q} \int_{-\frac{1}{2}L}^{-\frac{1}{2}(L-\lambda)} f_L(s_1) ds_1$$

$$< 4 \frac{(a\pi)^{l-2}}{q-1} L \lambda f_L(-\frac{1}{2}(L-\lambda)). \quad (\text{A.11})$$

Or

$$f_L(-\frac{1}{2}(L-\lambda)) = \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma}{\operatorname{sh}^2 \gamma + \cos^2 \frac{\pi \lambda}{2L}} < 2 \left(\frac{a\pi}{L} \right)^2, \quad (\text{A.12})$$

puisque, d'après le choix de $\lambda = L^{\frac{1}{2}+\alpha}$ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, nous avons

$$\cos^2 \frac{\pi \lambda}{2L} = \cos^2 \frac{\pi}{2L^{\frac{1}{2}-\alpha}} > \frac{1}{2},$$

pour L assez grand. On déduit de (A.11) et (A.12)

$$W_{G_1}(L) < \frac{8}{q-1} (a\pi)^l L^{-\frac{1}{2}+\alpha}.$$

Comme q est supérieur à 1 et α inférieur à $\frac{1}{2}$ on déduit de l'inégalité précédente

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_{G_1}(L) = 0,$$

d'où

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_G(L) - W_G[L'] = 0. \quad (\text{A.13})$$

Nous montrons maintenant que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_G[L'] = \tilde{W}_G(\infty),$$

où $\tilde{W}_G(\infty)$ est la contribution du graphe G à $\tilde{b}_i(\infty)$. Sur $[L']$ nous pouvons majorer la différence entre $f_L(s)$ et $\tilde{f}(s)$. Nous définissons sur $[L'] = \varphi(s) = f_L(s) - \tilde{f}(s)$

$$\varphi(s) = \frac{\text{sh}^2 \gamma}{\text{sh}^2 \gamma + \sin^2 \frac{\pi s}{L}} - \frac{a^2}{a^2 + s^2}, \quad -L' < s < L', \quad (\text{A.14})$$

Cette fonction positive est évidemment de l'ordre de $1/L^2$ tant que s est fini. On peut montrer facilement qu'elle atteint son maximum aux extrémités de l'intervalle $[L']$, donc pour $|s| = L - \lambda$:

$$0 < \varphi(s) < \frac{\frac{2}{a^2}(L-\lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{(L-\lambda)^2}{a^2}\right)} < \frac{2a^2}{\lambda^2} < 2 \frac{a^2}{L^{1+2\alpha}}. \quad (\text{A.15})$$

Revenons alors à la définition de $W_G[L']$:

$$W_G[L'] = \int_{-\frac{1}{2}L'}^{+\frac{1}{2}L'} \dots ds_1 \dots ds_{l-1} \prod_{\text{lignes de } G} (\tilde{f}(s-s') + \varphi(s-s')). \quad (\text{A.16})$$

Développons le produit. Nous obtenons d'abord un premier terme

$$\int_{-\frac{1}{2}L'}^{+\frac{1}{2}L'} \dots ds_1 \dots ds_{l-1} \prod_{\text{lignes de } G} \tilde{f} = \tilde{W}_G(L'), \quad (\text{A.17})$$

puis une somme de termes contenant au moins un facteur φ ; nous décrivons l'un d'entre eux comme suit: Soit U un choix de u lignes parmi les p lignes de G et V l'ensemble complémentaire de $p-u$ lignes. Nous affectons un φ aux lignes de U et un \tilde{g} aux lignes de V . Une contribution W_U s'écrit

$$W_U = \int_{-\frac{1}{2}L'}^{+\frac{1}{2}L'} \dots ds_1 \dots ds_{l-1} \tilde{f} \tilde{f} \dots \tilde{f} \underbrace{\varphi \varphi \dots \varphi}_{u \text{ facteurs}}, \quad (\text{A.18})$$

et nous avons

$$W_G[L'] = \tilde{W}_G(L') + \sum_U W_U. \quad (\text{A.19})$$

Considérons le graphe V c'est-à-dire l'ensemble des lignes de V et des points s_j qui y sont connectés. Il ne peut pas être composé de plus de $\max(u, l)$ parties connexes, puisqu'en ôtant une ligne à un graphe connexe, on ne peut créer plus de deux parties connexes. Soient V_1, V_2, \dots, V_r les parties connexes de V ; d'après la borne (A.15) sur les φ , nous obtenons pour (A.18) la majoration

$$W_U < \left(\frac{2a^2}{L^{1+2\alpha}} \right)^u \times [L\tilde{W}_{V_1}(L)][L\tilde{W}_{V_2}(L)] \dots [L\tilde{W}_{V_r}(L)] \quad (\text{A.20})$$

avec $r \leq u$. Or, il est simple de montrer que les $\tilde{W}_G(\infty)$ existent. Il suffit d'utiliser encore la connexité de G et la convergence absolue de l'intégrale de \tilde{f} . On a aussi $\tilde{W}_G(L') < \tilde{W}_G(\infty)$. On déduit alors de (A.20) l'inégalité

$$W_U < (2a^2)^u \left(\frac{L'}{L} \right)^u \frac{1}{L^{2\alpha u}} \tilde{W}_{V_1}(\infty) \dots \tilde{W}_{V_r}(\infty).$$

D'après le choix de α positif, on en déduit

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_U = 0$$

et par conséquent d'après (A.19) et (A.13),

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_G(L) = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{W}_G(L) = \tilde{W}_G(\infty).$$

D'où l'égalité $W_G(\infty) = \tilde{W}_G(\infty)$ et l'égalité des coefficients de Mayer des gaz linéaire et circulaire.

Références

- 1) N. Rosenzweig, in Statistical physics, Brandeis lectures, Vol. 3 (1962)
- 2) F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 140, 157, 166
- 3) N. Rosenzweig and C. E. Porter, Phys. Rev. **120** (1960) 1692
- 4) F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 1199
- 5) E. P. Wigner, Conf. on neutron physics by time of flight, Gatlinburg, (Nov. 1956) Oak Ridge Natl. Lab. Dept. ORNL-2309 (1957) p. 67
- 6) E. P. Wigner, in Statistical theories of Spectra; Fluctuations (ed. C. E. Porter)
- 7) M. L. Mehta, Nuclear Physics **18** (1960) 395
- 8) M. L. Mehta, Indian Institute of Technology, Kanpur, Technical report No. 2/65
- 9) D. Fox and P. B. Kahn, Phys. Rev. **134** (1964) B1151
- 10) H. S. Leff, J. Math. Phys. **6** (1964) 763
- 11) J. Ginibre, J. Math. Phys. **6** (1965) 440
- 12) C. N. Yang and T. D. Lee, Phys. Rev. **87** (1952) 404
- 13) E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Tome III (Gauthier-Villars, Paris, 1956) § 592, p.457
- 14) H. Weyl, The classical groups (Princeton University Press, 1946)
- 15) O. Penrose, J. Math. Phys. **4** (1963) 1312
- 16) J. L. Lebowitz and O. Penrose, J. Math. Phys. **5** (1964) 841
- 17) T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **113** (1959) 1165, appendices D et E
- 18) E. P. Wigner, Proc. 4th Can. Cong. Toronto (1959) p. 174;
F. J. Dyson, ref. 2) first paper, Section VI
- 19) M. L. Mehta and F. J. Dyson, J. Math. Phys. **4** (1963) 713
- 20) M. Gaudin, Nuclear Physics **25** (1960) 447

Calculation of a partition function defined in the statistical theory of nuclear reactions

M Gaudin† and P A Mello‡

† Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Service de Physique Théorique, BP no 2, Gif-sur-Yvette 91190, France

‡ Instituto de Física, UNAM, Apartado 20-364, México 20, DF

Received 17 June 1980, in final form 17 March 1981

Abstract. An exact calculation is described for the 'partition function' associated with a unitary ensemble of random scattering matrices in the statistical theory of nuclear reactions.

1. Introduction

In a recent development of the statistical theory of nuclear reactions (Mello 1979a, b, Mello and Seligman 1979, 1980) an ensemble (E) of scattering matrices S was introduced, with a probability law that maximises the information-theory entropy, taking into account the constraints of unitarity and symmetry. If the expectation value $\langle S \rangle$ of the matrix S can be considered as given (the so called optical scattering matrix), the distribution law necessarily takes the Gibbs form

$$p(S) d\mu(S) = Z^{-1} \exp(-\text{Re Tr } \beta S) d\mu(S) \quad (1)$$

where β , the matrix of Lagrange multipliers associated with the constraints $\langle S \rangle$, is a complex matrix whose dimensionality is the number of channels. We have

$$SS^\dagger = 1 \quad (\beta \text{ and } S \text{ of dimensionality } N). \quad (2)$$

The measure $d\mu(S)$ is the invariant measure under the automorphisms of (E) defined by the symmetries of S . For the physical systems whose Hamiltonian is invariant under time reversal, the ensemble to be considered is that of unitary and symmetric matrices

$$(E_s): \quad S = \tilde{S} \quad SS^* = 1 \quad (3)$$

that can always be written in the form (Dyson 1962, Hua 1963)

$$S = \tilde{V}V \quad VV^\dagger = 1. \quad (4)$$

One can then show (Dyson 1962) that the unique invariant measure is

$$d\mu(S) = dV, \quad (5)$$

the volume element of $U(N)$, the unitary group in N dimensions.

On the other hand, if the Hamiltonian that governs the scattering does not possess any *a priori* invariance (for example, if the system is subject to a strong and disordered

magnetic field), one has to consider simply the ensemble (E_U) of unitary matrices

$$(E_U): \quad S = U \in U(N) \quad d\mu(S) = dU. \quad (6)$$

A knowledge of the norm $Z(\beta)$ of equation (1) as a function of an arbitrary matrix β is sufficient to evaluate all the expectation values by differentiation. $Z(\beta)$ is the analogue of a partition function in statistical mechanics:

$$Z(\beta) = \int_{(E)} \exp(-\text{Re Tr } \beta S) d\mu(S). \quad (7)$$

If we write

$$Z(\beta, \beta^*) = \int_{(E)} \exp(-\frac{1}{2} \text{Tr } \beta S - \frac{1}{2} \text{Tr } \beta^* S^*) d\mu(S), \quad (7')$$

Z can be considered as a function of β and β^* . Then the relations

$$\langle S_{jk} \rangle = -2 \partial \ln Z / \partial \beta_{kj} \quad (8)$$

determine β as a function of the given optical matrix $\langle S \rangle$.

In the symmetric ensemble (E_s), β can be chosen as complex symmetric, whereas for the unitary ensemble (E_U), β is arbitrary. We have

$$Z_s(\beta) = \int \exp(-\text{Re Tr } \beta \tilde{V} V) dV \quad (9)$$

$$Z_U(\beta) = \int \exp(-\text{Re Tr } \beta U) dU = \int \exp[-\frac{1}{2}(\text{Tr } \beta U + \text{Tr } \beta^* U^*)] dU. \quad (10)$$

It is clear from (10) that we have the invariance property

$$Z_U(\beta) = Z_U(U^0 \beta). \quad (11a)$$

The effect of U^0 here is to rotate the N column vectors that make up β . If Z remains invariant under such an operation, it can only depend on the norms of the N vectors and the angles between each pair of vectors. This is represented by the matrix elements of $\beta^\dagger \beta$, which indeed is transformed to $(U^0 \beta)^\dagger (U^0 \beta) = \beta^\dagger \beta$. Z is then a function of the matrix $\beta^\dagger \beta$. But we also have

$$Z_U(\beta) = Z_U(\beta U^1), \quad (11b)$$

and now $\beta^\dagger \beta \rightarrow U^{1\dagger} (\beta^\dagger \beta) U^1$, so that $Z_U(\beta)$ can only depend upon the eigenvalues of the Hermitian matrix $\beta^\dagger \beta$.

We shall now turn to the calculation of the above function $Z_U(\beta)$.

2. Expansion of $\exp(-\text{Tr } \beta U)$

Since the integral (10) defining $Z_U(\beta)$ appears as the norm of the function $\exp(-\frac{1}{2} \text{Tr } \beta U)$ on the manifold $U(N)$, it is natural to expand that function in terms of the basis provided by the irreducible representations of $U(N)$, i.e. the functions denoted by $D_{ab}^{l\lambda}(U)$, consisting of the matrix elements of the representation associated with the Young diagram

$$[f] = [f_1 f_2 \dots f_N] \\ f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N \geq 0.$$

$D^{[f]}(U)$ is a polynomial in the elements of the matrix U of total degree $f = \sum_j f_j$.

Even if the expansion of $\exp(-\text{Tr } \beta U)$ is well known (Itzykson and Zuber 1980), we give the derivation here anyway, in order to present a method that is useful within the present context and to become familiar with the notation.

The functions $D_{ab}^{[f]}(U)$ form a complete set, orthogonal and unitary, on (E_U) . We choose the normalisation

$$\int D_{ab}^{[f]}(U) * D_{a'b'}^{[f]}(U) dU = d_{[f]}^{-1} \delta_{[f], [f']} \delta_{aa'} \delta_{bb'} \tag{12}$$

where $d_{[f]}$ is the dimensionality of the representation $D^{[f]}$, so that the orthogonality relation between characters

$$\chi_{[f]}(U) = \text{Tr } D^{[f]}(U) \tag{13}$$

is

$$\int \chi_{[f]}^*(U) \chi_{[f']}(U) dU = \delta_{[f], [f']}. \tag{14}$$

We then have $d_{[f]} = \chi_{[f]}(1)$. Weyl (1946) gives the expression

$$\begin{aligned} \chi_{[f]}(U) &= |\varepsilon^{l_1} \varepsilon^{l_2} \dots \varepsilon^{l_N}| / |\varepsilon^{N-1} \varepsilon^{N-2} \dots 1| \\ U &= \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N\} \end{aligned} \tag{15}$$

where ε are the eigenvalues of U and

$$l_1 = f_1 + N - 1 \quad l_2 = f_2 + N - 2 \dots \quad l_N = f_N. \tag{16}$$

One obtains

$$d_{[f]} = \frac{D(l_1 l_2 \dots l_N)}{D(N-1, N-2, \dots, 0)} = \frac{\text{product of the differences of the } l_j}{1! 2! \dots (N-1)!}. \tag{17}$$

To obtain the expansion of $\exp(-\text{Tr } \beta U)$, the idea is to impose initially a unitary restriction on the matrix β and then use a lemma by Weyl (1946, p 177), stating that the unitary restriction on the representations of the linear group $GL(N)$ has no effect from the algebraic point of view. It then suffices to expand $\exp(-\text{Tr } U)$, which is a class function, on the complete basis provided by the characters

$$\exp(-\text{Tr } U) = \exp(-\chi_1(U)) = \sum_{[f]} c_{[f]} \chi_{[f]}(U) \tag{18}$$

where $\chi_1(U)$ is the trace of the fundamental representation U . Expanding the exponential, it is thus sufficient to calculate the coefficients $\int \chi_1^p(U) \chi_{[f]}^*(U) dU, \forall p$. Now χ_1^p is a composite character; the coefficient, a positive integer or zero, of $\chi_{[f]}$ in the expansion of χ_1^p is precisely equal to the multiplicity of the representation $[f]$ in the decomposition of the product $U \otimes U \otimes \dots \otimes U$ (p times). This implies $p = f$. On the other hand this multiplicity is equal to the degree of the irreducible representation of the symmetric group π_N , associated with the diagram $[f]$, whose value is (Weyl 1946, p 213)

$$g_{[f]} = f! \frac{D(l_1 l_2 \dots l_N)}{l_1! l_2! \dots l_N!} = f! \left| \frac{1}{(l_1 - N + 1)!} \frac{1}{(l_2 - N + 2)!} \dots \frac{1}{l_N!} \right| \tag{19}$$

$$\frac{g_{[f]}}{d_{[f]}} = \frac{f!}{l_1! l_2! \dots l_N!} D(N-1, \dots, 0). \tag{20}$$

Without any calculation, we thus have

$$c_{[f]} = \frac{(-1)^f}{f!} g_{[f]},$$

and writing the characters explicitly in (18)

$$\exp(-\text{Tr } UV) = \sum_{[f]} \frac{(-1)^f}{f!} g_{[f]} \text{Tr}[D^{[f]}(U)D^{[f]}(V)]. \quad (21)$$

The series (21) is an entire function of the elements of V expanded over the polynomials $D(V)$. These polynomials can be continued to the elements of $GL(N)$ due to Weyl's lemma, thus obtaining the desired expansion

$$\exp(-\text{Tr } \beta U) = \sum_{[f]} \frac{(-1)^f}{f!} g_{[f]} \text{Tr}[D^{[f]}(\beta)D^{[f]}(U)]. \quad (22)$$

One could obtain (18) directly, by multiplying the series of the exponential $\exp(-\chi_1)$ by the determinant $\Delta(\varepsilon) = |\varepsilon^{N-1}, \dots, 1|$:

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \exp[-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N)] \Delta \\ &= \sum_{P \in \pi_N} \sum_{[k]} I(P) \frac{(-1)^k}{k_1! k_2! \dots k_N!} \varepsilon_{p_1}^{k_1 + N - 1} \varepsilon_{p_2}^{k_2 + N - 2} \dots \varepsilon_{p_N}^{k_N}. \end{aligned} \quad (23)$$

Changing the summation indices $k_j + N - j = l_j$, we have

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_P \sum_l I(P) \varepsilon_{p_1}^{l_1} \varepsilon_{p_2}^{l_2} \dots \varepsilon_{p_N}^{l_N} \frac{(-1)^k}{(l_1 - N + 1)! (l_2 - N + 2)! \dots l_N!} \\ &= \sum_{l_1 > l_2 > \dots > l_N} (-1)^f \frac{g_{[f]}}{f!} |\varepsilon^{l_1} \varepsilon^{l_2} \dots \varepsilon^{l_N}| \end{aligned} \quad (24)$$

with $f_j = l_j + j - N$ and definition (19) of $g_{[f]}$. One then obtains equation (18) with expression (15) for the characters.

3. Calculation of $Z_U(\beta)$

It is straightforward to evaluate the integral (10) with the aid of the series (22):

$$\begin{aligned} Z_U(\beta) &= \int |\exp(-\frac{1}{2} \text{Tr } \beta U)|^2 dU \\ &= \sum_{[f]} \frac{1}{(f!)^2} \frac{g_{[f]}^2}{d_{[f]}} \text{Tr}[D^{[f]}(\frac{1}{2}\beta^+) D^{[f]}(\frac{1}{2}\beta)], \end{aligned} \quad (25)$$

where the factor $d_{[f]}^{-1}$ comes from the normalisation (12). Using the group property of the representation D of $GL(N)$, one gets

$$Z_U(\beta) = \sum_{[f]} \frac{1}{(f!)^2} \frac{g_{[f]}^2}{d_{[f]}} \chi_{[f]}(\frac{1}{4}\beta^+ \beta) \quad (26)$$

where $\chi_{l,j}(\frac{1}{2}\beta^+ \beta)$ is perfectly defined by equation (15):

$$\chi_{l,j}(\frac{1}{2}\beta^+ \beta) = 2^{-2l} |\lambda^1 \lambda^2 \dots \lambda^{lN}| / |\lambda^{N-1} \lambda^{N-2} \dots 1|, \quad (27)$$

the λ_j being the positive eigenvalues of $\beta^+ \beta$.

By virtue of equations (16), (17) and (19), the coefficient in front of $\chi_{l,j}$ in equation (26) is

$$\frac{g_{l,j}^2}{(f!)^2 d_{l,j}} = \frac{D(N-1, N-2, \dots, 0)}{l_1! l_2! \dots l_N!} \left| \frac{1}{(l-N+1)!} \frac{1}{(l-N+2)!} \dots \frac{1}{l!} \right|. \quad (28)$$

This permits us to perform the summation of the series (25). In fact (after the change of variable $\beta \rightarrow 2\beta$)

$$\begin{aligned} Z_U(2\beta) &= \frac{D(N-1, \dots, 0)}{|\lambda^{N-1}, \dots, 1|} \sum_{l_1 > l_2 > \dots > l_N} \left| \frac{1}{l!(l-N+1)!} \frac{1}{l!(l-N+2)!} \dots \frac{1}{(l!)^2} \right| |\lambda^{l_1} \lambda^{l_2} \dots \lambda^{l_N}| \\ &= \frac{D(N-1, \dots, 0)}{|\lambda^{N-1}, \dots, 1|} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_N} \left| \frac{\lambda^{l_1}}{l!(l-N+1)!} \dots \frac{\lambda^{l_N}}{(l!)^2} \right|. \end{aligned} \quad (29)$$

Let us introduce the entire functions of λ defined by the series

$$f_r(\lambda) = \sum_{l=r}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!(l-r)!} = \lambda^{r/2} I_r(2\sqrt{\lambda}), \quad (30)$$

I_r being the Bessel function of imaginary argument.

One obtains then, with $\lambda_j = b_j^2$,

$$Z_U(2\beta) = \frac{D(N-1, N-2, \dots, 0)}{|\lambda^{N-1}, \lambda^{N-2}, \dots, 1|} |b_m^n I_n(2b_m)|_N \quad (31)$$

where the determinant of order N is the one associated with the matrix

$$b_m^n I_n(2b_m) \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1, m=1, 2, \dots, N.$$

Going back to the original variable

$$Z_U(\beta) = 2^{N(N-1)/2} 1!2! \dots (N-1)! \frac{|b_m^n I_n(b_m)|}{|b^{2(N-1)}, b^{2(N-2)}, \dots, 1|},$$

so our final expression is

$$Z_U(\beta) = 2^{N(N-1)/2} 1!2! \dots (N-1)! \frac{|b_m^n I_n(b_m)|}{\prod_{m < p} (b_m^2 - b_p^2)}. \quad (32)$$

Z appears as the ratio of two determinants, which are functions only of the eigenvalues of the matrix $b^2 = \beta^+ \beta$. Such a ratio bears some analogy with Schur's S function, which is a useful object in the theory of characters of the symmetric or linear group.

For $N=1$, equation (32) gives

$$Z_U^{N=1}(\beta) = I_0(b). \quad (33)$$

For $N=2$

$$Z_U^{N=2}(\beta) = 2 \frac{b_1 I_1(b_1) I_0(b_2) - b_2 I_1(b_2) I_0(b_1)}{b_1^2 - b_2^2}, \quad (34)$$

which does not seem easy to calculate directly!

We now have to determine our Lagrange multipliers by imposing the restriction that $\langle U \rangle$, as given by an equation similar to (8), is fixed. In order to do this we proceed as follows. Given the complex matrix $\langle U \rangle$, one can always find two unitary matrices $U^{(1)}$ and $U^{(2)}$ (Hua 1963, § 3.4), such that $U^{(1)} \langle U \rangle U^{(2)}$ is diagonal and real. If we define, for these fixed $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, the new matrix U' by the relation

$$U' \equiv U^{(1)} U U^{(2)}, \quad (35a)$$

then its average

$$\langle U' \rangle = U^{(1)} \langle U \rangle U^{(2)} \quad (35b)$$

is diagonal and real. The partition function of equation (10) can then be written as

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \exp(-\operatorname{Re} \operatorname{Tr} \beta U) dU = \int \exp(-\operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\beta U^{(1)\dagger} U' U^{(2)\dagger})) dU \\ &= \int \exp(-\operatorname{Re} \operatorname{Tr}(U^{(2)\dagger} \beta U^{(1)\dagger} U')) dU = \int \exp(-\operatorname{Re} \operatorname{Tr} \beta' U') dU', \end{aligned} \quad (36a)$$

where use was made of the property $dU = dU'$ of Haar's measure. In the above equation, $\beta' = U^{(2)\dagger} \beta U^{(1)\dagger}$. We shall choose β' to be diagonal and real, to ensure that $\langle U' \rangle$ is also diagonal and real. Then $(\beta')^2 = U^{(1)}(\beta^\dagger \beta)U^{(1)\dagger}$, so that $U^{(1)}$ diagonalises the matrix $\beta^\dagger \beta$, and therefore $(\beta'_{ii})^2 = \lambda_i = b_i^2$. The partition function (36a) can then be written, in terms of the b_i , as

$$Z(b) = \int \exp\left(-\operatorname{Re} \sum_i b_i U'_{ii}\right) dU'. \quad (36b)$$

We can now calculate the expectation value of U'_{ii} . For $i=1$, for example, we have

$$\begin{aligned} \langle U'_{11} \rangle &= -\frac{\partial \ln Z(b)}{\partial b_1} = 2b_1 \sum_{m \neq 1} \frac{1}{b_1^2 - b_m^2} \\ &\quad - \begin{vmatrix} I_1(b_1) & b_1 I_0(b_1) & b_1^2 I_1(b_1) & \dots \\ I_0(b_2) & b_2 I_1(b_2) & b_2^2 I_2(b_2) & \dots \\ I_0(b_3) & b_3 I_1(b_3) & b_3^2 I_2(b_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_0(b_1) & b_1 I_1(b_1) & \dots \\ I_0(b_2) & b_2 I_1(b_2) & \dots \\ I_0(b_3) & b_3 I_1(b_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

This, together with similar equations for $\langle U'_{22} \rangle, \dots, \langle U'_{NN} \rangle$, provide N relations for the N unknowns b_1, b_2, \dots, b_N . If one now makes the replacement $b_i = \sum_{ab} U_{ai}^{(2)*} \beta_{ab} U_{ib}^{(1)*}$ in equation (32), one obtains the partition function in terms of β , which can be used to calculate averages of higher powers of U by successive differentiations.

4. Calculation of the cross sections and correlation coefficients in the 'high-temperature' limit

If the mean values $\langle U_{ab} \rangle$ are small, the multipliers β will also be small, and the expansion of (26) in powers of $\beta^{\dagger}\beta = b^2$ is the convenient one. To obtain the first terms, it is simpler to construct the table of values of $d_{[f]}$ and $g_{[f]}$ for the first partitions $[f]$ than to use the general formulae (17) and (20).

	$[f]$	$g_{[f]}$	$d_{[f]}$
\square	$[1]$	1	N
$\square\square$	$[2]$	1	$\frac{1}{2}N(N+1)$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$[1, 1]$	1	$\frac{1}{2}N(N-1)$
$\square\square\square$	$[3]$	1	$\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$[2, 1]$	2	$\frac{1}{3}N(N^2-1)$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$[1^3]$	1	$\frac{1}{6}N(N-1)(N-2)$

One then obtains, from (26),

$$Z_U(\beta) = 1 + \frac{1}{4N} \chi_1(b^2) + \frac{1}{2 \times 4^2} \left(\frac{\chi_{[2]}}{N(N+1)} + \frac{\chi_{[1,1]}}{N(N-1)} \right) + O(b^6). \tag{38}$$

Now we have

$$\chi_{[1]} = \sum_j b_j^2 = \text{Tr } b^2 \tag{39}$$

$$\chi_{[2]} = \sum_{j < k} b_j^2 b_k^2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr } b^2)^2 + \text{Tr } b^4] \tag{40}$$

$$\chi_{[1,1]} = \sum_{j < k} b_j^2 b_k^2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr } b^2)^2 - \text{Tr } b^4].$$

One obtains

$$\ln Z_U = \frac{1}{4N} \text{Tr } b^2 + \frac{1}{2 \times 4^2} \frac{N^{-1}(\text{Tr } b^2)^2 - \text{Tr } b^4}{N(N^2-1)} + O(b^6). \tag{41}$$

We know that the characters can be expressed in terms of the coefficients of the characteristic polynomial

$$\det|1 + zb^2| = \sum_{r=0}^N h_r z^r \tag{42}$$

$$\chi_{[1]} = h_1 \quad \chi_{[1,1]} = h_2 \quad \chi_{[2]} = h_1^2 - h_2 \quad \text{etc.}$$

One can write

$$\ln Z_U = \frac{1}{4N} h_1 + \frac{1}{4^2} \left(\frac{h_2}{N(N^2-1)} - \frac{h_1^2}{2N^2(N+1)} \right) + \dots \tag{43}$$

and consequently (see equation (37)) one obtains the relations, which are easy to invert,

$$\langle U'_{11} \rangle = -b_{11} \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{8} \frac{h_1 N^{-1} - b_1^2}{N(N^2 - 1)} + \dots \right). \quad (44)$$

Using $b^2 = \beta^\dagger \beta$ in equation (41) one can write $\ln Z$ as a function of β_{ab} and β_{cd}^* :

$$\ln Z = \frac{1}{4N} \sum_{ab} \beta_{ab}^* \beta_{ab} + \frac{1}{2 \times 4^2 N(N^2 - 1)} \sum_{abcd} \left(\frac{1}{N} \beta_{ab}^* \beta_{ab} \beta_{cd}^* \beta_{cd} - \beta_{ab}^* \beta_{dc}^* \beta_{ac} \beta_{db} \right) + \dots \quad (45)$$

From (11), the average of U_{ab} is then

$$\langle U_{ab} \rangle = -2 \frac{\partial \ln Z(\beta, \beta^*)}{\partial \beta_{ba}}. \quad (46)$$

Using (45)

$$\langle U_{ab} \rangle = -\frac{\beta_{ba}^*}{2N} - \frac{1}{16N(N^2 - 1)} \left(\frac{2}{N} \beta_{ba}^* \sum_{cd} \beta_{cd}^* \beta_{cd} - 2 \sum_{cd} \beta_{bc}^* \beta_{da}^* \beta_{dc} \right) + \dots \quad (47)$$

If we write

$$U = \langle U \rangle + U^{\text{fl}}, \quad (48)$$

the average cross section can be split as (Feshbach *et al* 1954)

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ab} \rangle &= \langle |\delta_{ab} - U_{ab}|^2 \rangle = |\delta_{ab} - \langle U_{ab} \rangle|^2 + \langle |U_{ab}^{\text{fl}}|^2 \rangle \\ &= \sigma_{ab}^{\text{dir}} + \sigma_{ab}^{\text{fl}}, \end{aligned} \quad (49)$$

which are the usual direct cross section and compound nucleus or fluctuation cross section. This last contribution is just a particular case of the correlation coefficient $\langle U_{ab}^{\text{fl}} U_{cd}^{\text{fl}*} \rangle$, which can be expressed in terms of $\ln Z$ as

$$\langle U_{ab}^{\text{fl}} U_{cd}^{\text{fl}*} \rangle = 4 \frac{\partial^2 \ln Z(\beta, \beta^*)}{\partial \beta_{ba} \partial \beta_{dc}^*}. \quad (50)$$

For the fluctuation cross section one has

$$\sigma_{ab}^{\text{fl}} = \frac{1}{N} \left[1 + \frac{1}{4(N^2 - 1)} \left(\frac{1}{N} \sum_{cc'} |\beta_{cc'}|^2 + \frac{1}{N} |\beta_{ba}|^2 - \sum_c |\beta_{ca}|^2 - \sum_c |\beta_{bc}|^2 \right) + \dots \right]. \quad (51)$$

Using equation (47) to express β in terms of $\langle U \rangle$ one has, up to second order in $\langle U \rangle$,

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{\text{fl}} &= \frac{1}{N} \left[1 + \frac{N^2}{N^2 - 1} \left(-(\langle U \rangle \langle U \rangle^\dagger)_{aa} - (\langle U \rangle^\dagger \langle U \rangle)_{bb} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{N} \text{Tr}(\langle U \rangle \langle U \rangle^\dagger) + \frac{1}{N} |\langle U_{ab} \rangle|^2 \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Suppose now that $\langle U \rangle = \langle U^{\text{T}} \rangle$ and use the limit of a large number of open channels ($N \gg 1$):

$$\sigma_{ab}^{\text{fl}} \approx \frac{1}{N} \left(1 - (\langle U \rangle^\dagger \langle U \rangle)_{aa} - (\langle U \rangle^\dagger \langle U \rangle)_{bb} + \frac{1}{N} \text{Tr}(\langle U \rangle^\dagger \langle U \rangle) + \dots \right), \quad (53)$$

which is seen to consist of the first few terms in the series expansion, in powers of $\langle U \rangle$, of

$$\sigma_{ab}^{\text{fl}} \approx P_{aa} P_{bb} / \text{Tr } P \quad (54)$$

where

$$P \equiv I - \langle U \rangle^\dagger \langle U \rangle \quad (55)$$

is the so called Satchler penetration matrix (Satchler 1963), which measures the subunitarity of $\langle U \rangle$ produced by the averaging.

Equation (54) is recognised as the Hauser–Feshbach expression (Feshbach and Hauser 1952, Satchler 1963), with an elastic enhancement factor (Hofmann *et al* 1975) of unity. We thus see that for $N \gg 1$ and $P \approx I$ (strong absorption), the unitary model predicts a fluctuation cross section which is strictly separable, i.e. with no enhancement in the elastic process. We do not know whether or not this property is maintained for arbitrary absorption.

Going back to equation (50), we can calculate the correlation coefficient between U_{11} and U_{22}^* , say, as

$$\langle U_{11}^{\text{fl}} U_{22}^{\text{fl}*} \rangle = \frac{1}{N^2 - 1} \langle U_{11} \rangle \langle U_{22} \rangle^* + \dots \quad (56)$$

Consider now, as a special case, that the matrix $\langle U \rangle$ is diagonal; physically, this means that there are no direct reactions. We can write the fluctuation inelastic cross section from (51) and the correlation coefficient from (56) as

$$\sigma_{12}^{\text{fl}} = A - B(|\langle U_{11} \rangle|^2 + |\langle U_{22} \rangle|^2) + C \sum_a \langle |U_{aa}|^2 \rangle + \dots \quad (57a)$$

$$\langle U_{11}^{\text{fl}} U_{22}^{\text{fl}*} \rangle = D \langle U_{11} \rangle \langle U_{22} \rangle^* + \dots \quad (57b)$$

In this particular case Monte-Carlo calculations have been performed by the Heidelberg group (Hofmann *et al* 1975) for unitary and symmetric matrices, and there is also the entropy approach to nuclear reactions for unitary and symmetric matrices (Mello 1979a, b, Mello and Seligman 1980), with which we may compare, to see the influence of keeping the symmetry property only on the average. The four coefficients of equations (57) are given in table 1 for the present approach and for the two other approaches just mentioned. It is apparent that keeping symmetry only on the average has an influence that decreases when N increases for A , B , C , while D differs by a factor of two from the result of Mello and Seligman (1980) for $N \gg 1$. The elastic cross section is not compared, since we already know that in the unitary model the elastic enhancement factor of two is missing.

5. The 'low-temperature' limit

This is the region where the S matrix remains statistically very close to unity, i.e., where the b are large. Expression (32) can be easily evaluated asymptotically:

$$I_n(b) \approx \frac{\exp b}{\sqrt{2\pi b}} \quad \forall n \quad b \gg N \quad (58)$$

Table 1. The coefficients A , B , C and D of equations (57) from the entropy approach for unitary and symmetric matrices (Mello and Seligman 1980) (first row), from Monte-Carlo calculations (Hofmann *et al* 1975) for unitary and symmetric matrices (second row) and from the entropy approach for unitary matrices (present paper) (third row).

$A = 1/(N+1)$	$B = (N+1)/[N(N+3)]$	$C = 1/[N(N+3)]$	$D = 2/[N(N+3)]$
$A = 1/(N+1)$	$B = \frac{N+1.15+0.75/N}{(N+1)(N+2)}$	$C = \frac{N+1.15+0.75/N}{(N+1)^2(N+2)}$	$D = \frac{1}{(1+0.15N)^2(N+1)}$
$A = 1/N$	$B = N/(N^2-1)$	$C = 1/(N^2-1)$	$D = 1/(N^2-1)$
$N=2$	0.33 0.300	0.100	0.200
	0.33 0.394	0.098	0.197
	0.50 0.667	0.333	0.333
$N=5$	0.17 0.150	0.025	0.050
	0.17 0.150	0.025	0.054
	0.20 0.208	0.042	0.042
$N=10$	0.09 0.085	0.0077	0.0153
	0.09 0.085	0.0077	0.0145
	0.10 0.101	0.0101	0.0101

and

$$Z_U \approx \exp\left(\sum b_j\right) \frac{|b_m^{n-1}|}{|b_m^{2n}|}, \quad (59)$$

so that

$$\ln Z_U \approx \sum_{j=1}^N (b_j - \frac{1}{2} \ln b_j) - \sum_{j < k} \ln(b_j + b_k), \quad (60)$$

from which one obtains, for the $\langle U'_{jj} \rangle$ of equation (37),

$$1 + \langle U'_{jj} \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{1}{b_j + b_k} \quad \forall j. \quad (61)$$

This system is very easy to invert by iteration for small values of N .

6. The case of complete absorption

There is a simple way to deal with averages of powers of U evaluated with the unitary measure $d\mu(U)$, which are useful to deal with the case $\beta=0$, or $\langle U \rangle = 0$, which corresponds to complete absorption. The method is similar to one devised by Mello and Seligman (1980) to deal with unitary symmetric matrices.

Let U^0 be a fixed unitary matrix. Define the transformation

$$U = U^0 \tilde{U}. \quad (62)$$

By construction

$$dU = d\tilde{U}. \quad (63)$$

We shall denote with a suffix 0 those averages evaluated with dU . We then have

$$\langle U_{ab} \rangle_0 \equiv \int U_{ab} dU = \sum_{\alpha} U_{\alpha\alpha}^0 \int \tilde{U}_{ab} d\tilde{U} = \sum_{\alpha} U_{\alpha\alpha}^0 \int U_{ab} dU. \quad (64)$$

Therefore

$$\langle U_{ab} \rangle_0 = \sum_{\alpha} U_{\alpha\alpha}^0 \langle U_{ab} \rangle_0 \quad (65)$$

and similarly

$$\langle U_{ab} \rangle_0 = \sum_{\beta} \langle U_{a\beta} \rangle_0 U_{\beta b}^0. \quad (66)$$

One has similar results for higher powers:

$$\langle U_{ab} U_{cd}^* \rangle_0 = \sum_{\alpha\gamma} U_{\alpha\alpha}^0 U_{\gamma\gamma}^{0*} \langle U_{ab} U_{\gamma d}^* \rangle_0. \quad (67)$$

As an example of the usefulness of these relations, choose $U_{\alpha\alpha}^0 = \delta_{\alpha\alpha} \exp(i\theta_{\alpha})$. Then (67) gives

$$\langle U_{ab} U_{cd}^* \rangle_0 = \exp[i(\theta_a - \theta_c)] \langle U_{ab} U_{cd}^* \rangle_0. \quad (68)$$

Since θ_a and θ_c are arbitrary, a necessary condition in order that (68) be different from zero is $a = c$, and similarly $b = d$.

By the same argument, in order to have

$$\langle (U_{a_1 b_1} \dots U_{a_k b_k}) (U_{\alpha_1 \beta_1} \dots U_{\alpha_l \beta_l})^* \rangle_0 \neq 0, \quad (69)$$

it is necessary that $k = l$ and that the set $(a_1 \dots a_k)$ coincides with $(\alpha_1 \dots \alpha_l)$, except for the order, and that $(b_1 \dots b_k) = (\beta_1 \dots \beta_l)$, except for the order. A simple consequence is

$$\langle U_{ab} \rangle_0 = \dots = \langle U_{ab}^n U_{cd}^m \rangle_0 = 0. \quad (70)$$

Another simple application of (67):

$$\langle |U_{11}|^2 \rangle_0 = \sum_{\alpha\beta} U_{1\alpha}^0 U_{1\beta}^{0*} \langle U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} \rangle_0; \quad (71)$$

if we choose U^0 as

$$\|U^0\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

then

$$\langle |U_{11}|^2 \rangle_0 = \langle |U_{21}|^2 \rangle_0. \quad (72)$$

This means that in the extreme case, $\langle U \rangle = 0$, the average elastic and inelastic cross sections are equal, i.e. there is no elastic enhancement; in the case where symmetry of

S is enforced, there is an elastic enhancement factor of two, which can be proved in a similar way (Mello and Seligman 1980).

Averaging with dU the unitarity relation

$$\sum_b |U_{ab}|^2 = 1, \quad (73)$$

one then gets, using (72),

$$\langle |U_{ab}|^2 \rangle_0 = 1/N \quad (74)$$

$$\langle \sigma_{ab} \rangle_0 = \langle |\delta_{ab} - U_{ab}|^2 \rangle_0 = \delta_{ab} + 1/N. \quad (74a)$$

The equivalent of equation (67) for two U 's and two U^{*} 's, like $|U_{11}|^4$, would be

$$\langle |U_{11}|^4 \rangle = 2 \sum_{\alpha \neq \beta} |U_{1\alpha}^0|^2 |U_{1\beta}^0|^2 \langle |U_{\alpha 1}|^2 |U_{\beta 1}|^2 \rangle_0 + \sum_{\alpha} |U_{1\alpha}^0|^4 \langle |U_{\alpha 1}|^4 \rangle_0. \quad (75)$$

But now one can see, in a manner similar to that used to prove (72), that

$$\langle |U_{11}|^4 \rangle_0 = \langle |U_{21}|^4 \rangle_0 = \dots \quad (76)$$

$$\langle |U_{11}|^2 |U_{21}|^2 \rangle_0 = \langle |U_{31}|^2 |U_{41}|^2 \rangle_0 = \dots, \quad (77)$$

so that (75) gives

$$\langle |U_{11}|^4 \rangle_0 = 2 \langle |U_{21}|^2 |U_{11}|^2 \rangle_0 \sum_{\alpha \neq \beta} |U_{1\alpha}^0|^2 |U_{1\beta}^0|^2 + \langle |U_{11}|^4 \rangle_0 \sum_{\alpha} |U_{1\alpha}^0|^4 \quad (78)$$

or

$$\left(1 - \sum_{\alpha} |U_{1\alpha}^0|^4\right) \langle |U_{11}|^4 \rangle_0 = \left(2 \sum_{\alpha \neq \beta} |U_{1\alpha}^0|^2 |U_{1\beta}^0|^2\right) \langle |U_{21}|^2 |U_{11}|^2 \rangle_0 \quad (79)$$

and remembering that U^0 is unitary:

$$\langle |U_{11}|^4 \rangle_0 = 2 \langle |U_{11}|^2 |U_{21}|^2 \rangle_0. \quad (80)$$

On the other hand, squaring the unitarity relation (73) and averaging with dU , one has

$$N \langle |U_{11}|^4 \rangle_0 + N(N-1) \langle |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \rangle_0 = 1. \quad (81)$$

Solving (80) and (81)

$$\langle |U_{11}|^4 \rangle_0 = \langle |U_{12}|^4 \rangle_0 = 2/N(N+1) \quad (82)$$

$$\langle |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \rangle_0 = 1/N(N+1). \quad (83)$$

From (82) and (74a) one can calculate the variance of σ_{12} :

$$\text{var } \sigma_{12} = (N-1)/[N^2(N+1)]. \quad (84)$$

One sees that

$$\text{var } \sigma_{12} / \langle \sigma_{12} \rangle_0^2 = (N-1)/(N+1), \quad (85)$$

which tends to one as $N \rightarrow \infty$, suggesting that U_{12} becomes distributed according to a Gaussian in this limit. It is interesting to compare the equivalent of equation (85) for a unitary and symmetric scattering matrix which gives $(N^2 + N + 2)/[N(N + 3)]$. As usual, the effect of symmetry decreases as N grows.

References

- Dyson F J 1962 *J. Math. Phys.* **3** 140
- Feshbach H and Hauser W 1952 *Phys. Rev.* **87** 366
- Feshbach H, Porter C E and Weisskopf V F 1954 *Phys. Rev.* **96** 448
- Hofmann H M, Richert J, Tepel J W and Weidenmüller H A 1975 *Ann. Phys., NY* **90** 403
- Hua L K 1963 *Harmonic Analysis in the Classical Domains* (Providence, RI: Am. Math. Soc.)
- Itzykson C and Zuber J B 1980 *J. Math. Phys.* **21** 411
- Mello P A 1979a *Phys. Lett.* **81B** 103
- 1979b *A New Approach to the Statistical Theory of Nuclear Reactions* (Adriatic Eur. Conf. on Nuclear Physics, Yugoslavia)
- Mello P A and Seligman T H 1979 *Notas de Fisica* **2** no 1 p 182 (*Proc. 2nd Oaxtepec Symp. on Nuclear Physics*)
- 1980 *Nucl. Phys. A* **344** 489
- Satchler G R 1963 *Phys. Lett.* **7** 55
- Weyl H 1946 *Classical Groups* (Princeton, NJ: University Press)

Mécanique statistique

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA GRANDE FONCTION DE PARTITION POUR DES SYSTÈMES DE PARTICULES IDENTIQUES

M. GAUDIN

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette (S. et O.)

Reçu le 23 juin 1960

Abstract: We start from the perturbation expansion of the grand partition function. The general n^{th} order term is described by a pair of two permutations and its contribution is presented in a compact form of a sum of n^{th} order permanents. The procedure is applied to a system of fermions interacting via a two-body separable potential. The form of the series suggests a partial summation which gives the known result for the thermodynamic potential in the superconducting state.

1. Introduction

Nous considérons la fonction de partition Z d'un système de particules identiques, développée en puissances de l'interaction. Le formalisme de la seconde quantification et l'utilisation du théorème de Wick ¹⁾ pour le calcul des valeurs moyennes de produits d'opérateurs permettent de représenter par un diagramme chaque système de contractions. L'examen de leurs propriétés de symétrie ²⁾ dans les opérations d'échange conduit à décrire les systèmes de contractions à l'aide d'un couple de permutations. Le développement de Z ainsi obtenu, groupe les éléments de matrice de l'interaction sous forme de permanents qui rassemblent les contributions de diagrammes en général non connexes. Ce résultat pourrait sans doute être atteint par la méthode de Caianiello ³⁾, l'opérateur densité jouant ici le rôle de la matrice S .

Nous appliquons ensuite ce développement au calcul du potentiel de Gibbs d'un système de fermions. Les termes de la fonction de partition se trouvent classés de façon à suggérer l'approximation simple qui consiste à ne conserver l'interaction qu'entre paires de fermions dans l'état singulet, d'impulsion totale nulle, et aussi d',„énergie" totale nulle. Nous appelons „énergie" la variable entière attachée à chaque ligne de particules, qui fut introduite dans le formalisme par Montroll et Ward ⁴⁾. Dans le cas d'un potentiel séparable, il est simple de sommer la série partielle ainsi extraite de la série initiale qui définit Z et d'étudier la limite du volume infini. On retrouve ainsi le potentiel thermodynamique obtenu par Bardeen, Cooper et Schrieffer ⁵⁾ et ensuite par divers auteurs avec la méthode des transformations canoniques ⁶⁾ et celle des fonctions de

Green ⁷). Il paraît au contraire difficile de traiter le cas d'une interaction de paires quelconque, non séparable, alors que la méthode de Bogoliubov le permet.

Dans le cas répulsif et au-dessus de la température critique dans le cas attractif, cette série partielle redonne la contribution qui vient des „échelles généralisées” ⁸), calculée avec la restriction des paires „d'énergie” nulle. La sommation des termes importants pour l'énergie libre de l'état superconducteur n'apporte donc pas de trouble dans les cas où la série de perturbation en diagrammes connexes est convergente.

2. Formalisme Général

2.1. LA SÉRIE DE PERTURBATION.

L'hamiltonien H d'un système de particules identiques en interaction instantanée peut s'écrire sous la forme

$$H = H_0 + V = \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{4} \sum_{rsmn} \langle rs|v|mn \rangle a_r^\dagger a_s^\dagger a_n a_m, \quad (1)$$

où $\varepsilon_k = E_k - \lambda$ (la quantité E_k est l'énergie d'une particule libre dans l'état k , enclose dans un volume Ω , et λ est le potentiel chimique). Les éléments de matrice de l'interaction sont symétrisés ou antisymétrisés.

La grande fonction de partition $Z = \text{tr} e^{-\beta H}$ admet le développement suivant:

$$Z = Z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \langle TV(u_1)V(u_2) \dots V(u_n) \rangle, \quad (2)$$

où la notation $\langle \rangle$ désigne la valeur moyenne au sens de la mécanique statistique, c'est-à-dire

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z_0} \text{tr} \{ A e^{-\beta H_0} \},$$

avec $Z_0 = \text{tr} e^{-\beta H_0}$. Enfin, $V(u)$ est exprimé dans la représentation de l'interaction en fonction des opérateurs $a_k(u)$ et $a_k^\dagger(u)$ tels que

$$a_k(u) = a_k e^{-\varepsilon_k u}, \quad a_k^\dagger(u) = a_k^\dagger e^{\varepsilon_k u}.$$

En substituant l'expression de $V(u)$ dans (2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r_i s_i m_i n_i} \frac{1}{4} \langle r_1 s_1 | v | m_1 n_1 \rangle \langle r_2 s_2 | v | m_2 n_2 \rangle \dots \\ &\times \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \langle T a_{r_1}^\dagger(u_1) a_{s_1}^\dagger(u_1) a_{n_1}(u_1) a_{m_1}(u_1) a_{r_2}^\dagger(u_2) a_{s_2}^\dagger(u_2) a_{n_2}(u_2) a_{m_2}(u_2) \dots \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

2.2. LA REPRÉSENTATION EN DIAGRAMMES DES TERMES DE Z

Nous portons maintenant notre attention sur la valeur moyenne d'un produit chronologique de $4n$ opérateurs a ou a^\dagger , intervenant dans le terme d'ordre n de la formule (3), soit

$$T_n = \langle T a_{r_1}^\dagger a_{s_1}^\dagger a_{n_1} a_{m_1} a_{r_2}^\dagger a_{s_2}^\dagger a_{n_2} a_{m_2} \dots a_{r_n}^\dagger a_{s_n}^\dagger a_{n_n} a_{m_n} \rangle. \tag{4}$$

Les sous-indices $1, 2, \dots, n$, suffisent à repérer les temps $u_1, u_2, \dots, \dots, u_n$. Le théorème de Wick décompose T_n en $2n!$ systèmes de contractions distincts. En effet, les contractions sont du type $\langle T a^\dagger a \rangle$ et l'on obtient tous les systèmes en associant de toutes les façons possibles les $2n$ opérateurs a à chacun des $2n$ opérateurs a^\dagger .

La représentation d'un système de contractions par un diagramme est connue ¹⁾: on dessine les unes au-dessous des autres n lignes horizontales numérotées $1, 2, \dots, n$, qui correspondent aux interactions $V(u_1), V(u_2), \dots, V(u_n)$. On affecte à la partie gauche des lignes d'interaction les opérateurs a_r^\dagger et a_m et à la partie droite les opérateurs a_s^\dagger et a_n , que l'on représente par des extrémités de lignes orientées (fig. 1).

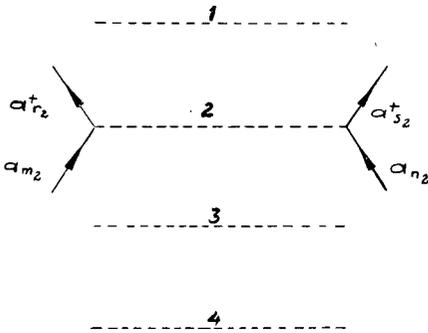


Fig. 1. Représentation des interactions.

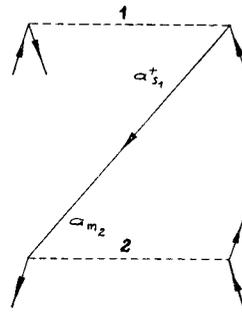


Fig. 2. Ligne représentant la contraction $\langle T a_{s_1}^\dagger a_{m_2} \rangle$

On obtient tous les diagrammes en joignant entre elles de toutes les façons possibles les extrémités gauches ou droites des interactions (fig. 2).

Les éléments de matrice $\langle rs|v|mn \rangle$ ont un caractère de symétrie défini, pour l'échange des états m et n , ou l'échange des états r et s .

Les systèmes de contractions différant seulement par l'échange des opérateurs a_n et a_m ou a_r^\dagger et a_s^\dagger , à l'intérieur des contractions, donnent donc la même contribution après sommation sur les indices. Par exemple, la fig. 3 montre l'échange de m_1 et n_1 , où le produit

$$\langle T a_{r_2}^\dagger a_{m_1} \rangle \langle T a_{s_3}^\dagger a_{n_1} \rangle$$

est remplacé par

$$\varepsilon \langle T a_{r_2}^\dagger a_{n_1} \rangle \langle T a_{s_3}^\dagger a_{m_1} \rangle.$$

L'arrivée des deux lignes à l'interaction 1 est inversée. La valeur de ε est $+1$ ou -1 suivant qu'il s'agit de bosons ou de fermions.

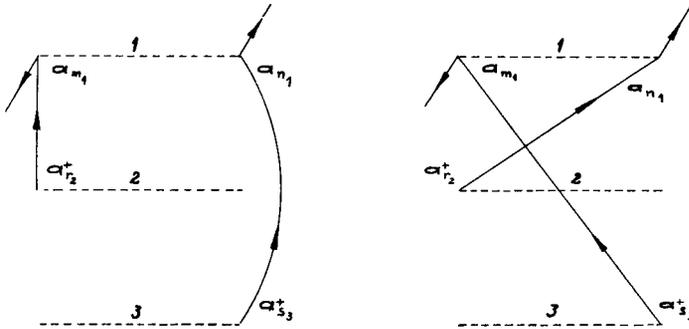


Fig. 3. Echange de a_{m_1} et de a_{n_1} .

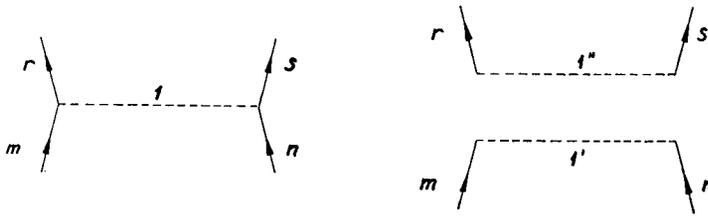


Fig. 4. Dédoubllement de la ligne d'interaction 1.

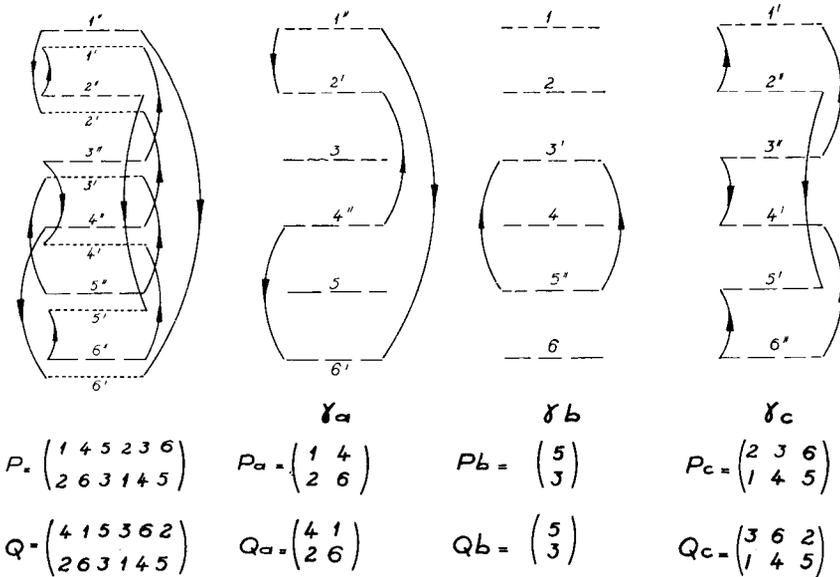


Fig. 5. Les cycles $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ correspondant aux cycles (26), (3), (145) de $R' = QP^{-1}$.

De même pour un échange de r_1 et s_1 , il suffit d'inverser les points de départ des deux lignes issues de l'interaction 1. Afin de rendre ces opérations d'échange

plus claires, nous allons „dédoubler” chaque interaction en deux lignes voisines que noterons $1'$ et $1''$ pour l'interaction 1 . La ligne pointillée $1'$ joint les opérateurs d'absorption et la ligne pointillée $1''$ joint les opérateurs de création, comme si l'émission et l'absorption se faisaient à des temps différents (fig. 4).

L'échange de m_1 et n_1 se traduit alors par une symétrie gauche-droite sur l'interaction $1'$ et l'échange de r_1 et s_1 par une symétrie analogue sur l'interaction $1''$.

Le premier effet de ce dédoublement est de disconnecter le diagramme en un certain nombre de cycles (γ), indépendants les uns des autres quant aux opérations d'échange. Ces cycles, non orientés, sont déterminés de façon unique par le diagramme. Ils sont composés de lignes alternativement orientées dans un sens et dans l'autre, séparées par des lignes d'interaction V' et V'' (fig. 5).

2.3. NOUVELLE DESCRIPTION DES DIAGRAMMES

Définissons maintenant une classe (C) de diagrammes, à partir de laquelle tous les autres seront obtenus par échange de m et n ou de r et s . Décidons de n'effectuer les contractions qu'entre opérateurs a_r^\dagger et a_m d'une part, et entre a_s^\dagger et a_n d'autre part. Sur le diagramme, les extrémités gauches des interactions sont réunies par des lignes, de même que les extrémités droites, mais il n'y a pas de liaison gauche-droite. Pour décrire un tel diagramme, il suffit de deux permutations de n objets P et Q .

La permutation $i \rightarrow Pi$ fait correspondre l'opérateur $a_{m_{Pi}}$ à $a_{r_i}^\dagger$ dans la contraction $\langle Ta_{r_i}^\dagger a_{m_{Pi}} \rangle$, et la permutation $i \rightarrow Qi$, $a_{n_{Qi}}$ à $a_{s_i}^\dagger$.

Sur les diagrammes de (C), on reconnaît à gauche les cycles de P et à droite ceux de Q . Il y a donc correspondance biunivoque entre les systèmes de (C) et les couples (P, Q) : leur nombre est $(n!)^2$. Pour cette classe (C), les „cycles” (γ) sont liés de façon très simple aux cycles de la permutation $R' = QP^{-1}$ ou à ceux de $R'' = P^{-1}Q$: les sommets consécutifs de (γ) notés V' décrivent les cycles de R' .

Si l'on isole un cycle de R' soit $(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$, on pourra écrire les “parties conti-gües” de R' à P et Q sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} i & j & k & \dots & l \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \delta \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} j & k & \dots & l & i \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \delta \end{pmatrix}.$$

Il faut noter que nous n'avons pas écrit P et Q tout entier, mais seulement les parties relatives à R' ou à (γ).

La fig. 5 montre un exemple de diagramme construit avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

et, sous forme cyclique,

$$QP^{-1} = R' = (26) (3) (145),$$

où la seconde notation met en évidence les trois cycles (26), (3), (145) de R' et les „parties contigües” de P et Q correspondantes, que nous avons notées $P_a, Q_a; P_b, Q_b; P_c, Q_c$ sur la fig. 5.

Avant d'effectuer les opérations de symétrisation sur les cycles (γ) à partir des diagrammes du type (C), nous remarquons que les seuls (γ) symétriques sont relatifs à des cycles de longueur 1 de R . En effet, si le cycle est symétrique, les parties contigües de P et Q au cycle correspondant de R sont identiques; le troisième diagramme de la fig. 5 illustre ce seul cas.

Soit donc un cycle (γ) non symétrique relatif à un cycle ($\alpha\beta\gamma \dots \delta$) de R' , de longueur $p \neq 1$. On peut effectuer sur (γ), $2^{2p} = 4^p$ groupes d'échanges distincts, qui donnent donc lieu à autant de diagrammes distincts.

Inversement un cycle (γ) quelconque, du type (C) ou non, donne lieu à deux cycles (γ') et (γ'') du type (C): (γ') et (γ'') sont symétriques l'un de l'autre et ils engendrent le même ensemble de diagrammes après symétrisation (fig. 6).

Si les parties contigües de P et Q relatives au cycle ($\alpha\beta\gamma \dots \delta$) de R' décrivent (γ') et s'écrivent respectivement

$$(\gamma'): P' = \begin{pmatrix} i & j & k & \dots & l \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \delta \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} j & k & \dots & l & i \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \delta \end{pmatrix},$$

nous aurons pour (γ'') à échanger le rôle des parties contigües P' et Q' (les autres parties de P et Q restent évidemment les mêmes)

$$(\gamma''): P'' = Q' = \begin{pmatrix} j & k & \dots & l & i \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \delta \end{pmatrix}, \quad Q'' = P' = \begin{pmatrix} i & j & k & \dots & l \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \delta \end{pmatrix}.$$

On voit aisément sur la fig. 6 qu'il n'y a pas d'autres couples de permutation pour représenter un diagramme que les deux décrits ci-dessus. Si nous adoptons la convention de Hugenholtz¹⁾ de ramener la ligne d'interaction en un point, un diagramme détermine les cycles de R' (ou de R'') à l'orientation près, sauf pour les cycles de longueur 1, qui correspondent aux „doubles lignes”. Aux deux choix d'orientation correspondent deux parties contigües possibles de P et Q relatives au cycle correspondant de R' (ou de R'').

En résumé, pour considérer l'ensemble des contributions auxquelles donnent lieu les $2n!$ systèmes de contractions, il suffit de choisir seulement les systèmes (C) définis par les couples (P, Q) à condition d'attribuer à la contribution de ce couple le poids $4^n (\frac{1}{2})^v$, où v est le nombre de cycles de la permutation $R = QP^{-1}$.

En effet dans une sommation faite indépendamment sur P et Q , pour un cycle (γ) de R' , le couple (P, Q) $_\gamma$ et le couple (Q, P) $_\gamma$ donneront la même contribution. Si R a pour longueur 1, le couple (P, Q) n'interviendra qu'une

seule fois dans la somme, mais au lieu d'avoir 4 diagrammes distincts par symétrisation, nous en aurons seulement 2.

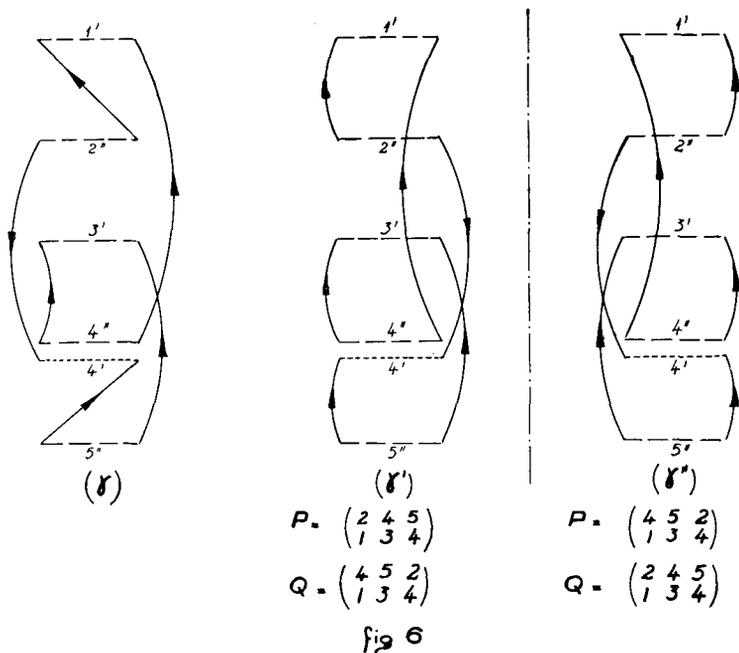


Fig. 6. Les symétries gauche-droite effectuées sur les interactions 2'', 4' de (γ') ou sur les interactions 1', 3', 4', 5'' de (γ'') donnent le même diagramme (γ).

En règle générale, nous aurons le seul facteur de poids $(\frac{1}{2})^{\nu}$, le facteur $\frac{1}{4}$ devant chaque élément de matrice de (3) disparaissant.

2.4. DÉNOMBREMENT

Afin de montrer que nous avons obtenu tous les systèmes de contractions possibles, nous effectuons maintenant leur dénombrement.

Nous définirons par A_n le nombre de systèmes de contractions comptés avec la règle du paragraphe précédent:

$$A_n = \sum_{P,Q} \left(\frac{4}{2}\right)^{\nu_1} \left(\frac{4^2}{2}\right)^{\nu_2} \left(\frac{4^3}{2}\right)^{\nu_3} \dots,$$

où l'ensemble $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ définit la classe de la permutation $R = QP^{-1}$ et la notation $\sum_{(\nu)}$ signifie la somme sur toutes les valeurs de ν_1, ν_2, \dots telles que

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots = n.$$

Sommons sur les permutations P , à R fixé,

$$A_n = \sum_{P,R} \prod_p \left(\frac{4^p}{2}\right)^{\nu_p} = n! \sum_R \prod_p \left(\frac{4^p}{2}\right)^{\nu_p},$$

puis sur les permutations R de la même classe:

$$A_n = n! \sum_{(\nu)} \prod_p \left(\frac{4^p}{2} \right)^{\nu_p} \frac{1}{\nu_p! p^{\nu_p}} n!. \quad (5)$$

Introduisons la fonction génératrice $f(z)$ définie par la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(n!)^2} z^n. \quad (6)$$

En substituant la valeur de A_n donnée par l'expression (5), nous obtenons

$$f(z) = \sum_{\nu_1 \nu_2 \dots} \prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{(4z)^p}{2p} \right\}^{\nu_p} \frac{1}{\nu_p!} = \prod_{p=1}^{\infty} \exp \frac{(4z)^p}{2p} = \exp -\frac{1}{2} \log (1-4z),$$

soit

$$f(z) = (1-4z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette fonction, développée par la formule du binôme, s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2} z^n. \quad (7)$$

L'identification des séries (6) et (7) permet de conclure

$$A_n = 2n!,$$

qui est en effet le nombre de tous les systèmes de contraction auxquels donne lieu le produit T_n du paragraphe 2.2.

2.5. EXPRESSION GÉNÉRALE D'UN SYSTÈME DE CONTRACTIONS

Pour les fermions, il nous reste à déterminer le signe à placer en tête de chaque système du type (C).

Écrivons la contribution, au signe près, d'un couple (P, Q) , nous obtenons

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \prod_{i=1}^n \langle T a_{r_i}^{\dagger} a_{m_{P_i}} \rangle \langle T a_{s_i}^{\dagger} a_{n_{Q_i}} \rangle. \quad (8)$$

L'écriture de (8) fait apparaître les opérateurs dans l'ordre

$$a_{r_1}^{\dagger} a_{m_{P_1}} a_{s_1}^{\dagger} a_{n_{Q_1}} a_{r_2}^{\dagger} a_{m_{P_2}} a_{s_2}^{\dagger} a_{n_{Q_2}} \dots, \quad (9)$$

que nous comparons à l'ordre suivant:

$$a_{r_1}^{\dagger} a_{m_1} a_{s_1}^{\dagger} a_{n_1} a_{r_2}^{\dagger} a_{m_2} a_{s_2}^{\dagger} a_{n_2} \dots \quad (10)$$

On remonte de (10) à (9) en effectuant d'abord les transpositions sur les a_m et ensuite sur les a_n . Or toute transposition sur les a_m , considérée comme permu-

tation de $4n$ objets est impaire, puisqu'il y a toujours un nombre impair d'objets entre deux a_m .

La permutation de $4n$ objets qui fait passer de (10) à (9) a donc la même parité que la permutation de n objets qui fait passer de l'ordre m_1, m_2, m_3, \dots à l'ordre m_{P_1}, m_{P_2}, \dots , ce qui nous donne un facteur $I(P)$; le même raisonnement s'applique aux opérateurs a_n et donne un facteur $I(Q)$. Le signe cherché est donc $I(P)I(Q) = I(R) = (-1)^{n+\nu}$.

L'expression (4) s'écrit donc

$$T_n = \sum_{P, Q} f(R) \prod_{i=1}^n \langle Ta_{r_i}^\dagger a_{m_{P_i}} \rangle \langle Ta_{s_i}^\dagger a_{n_{Q_i}} \rangle,$$

avec

$$f(R) = \begin{cases} (-1)^n (-\frac{1}{2})^\nu & \text{(fermions),} \\ (\frac{1}{2})^\nu & \text{(bosons),} \end{cases}$$

où ν est le nombre de cycles de la permutation $R = QP^{-1}$.

3. Forme du Développement dans la Représentation Indépendante du Temps

Le résultat précédent permet d'écrire l'expression (3) de Z sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r_i s_i m_i n_i} \sum_{P, Q} f(R) \\ &\quad \times \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod_{i=1}^n \langle r_i s_i | v | m_i n_i \rangle \langle Ta_{r_i}^\dagger a_{m_{P_i}} \rangle \langle Ta_{s_i}^\dagger a_{n_{Q_i}} \rangle. \end{aligned}$$

Connaissant les propagateurs libres

$$\langle Ta_k^\dagger(u) a_{k'}(u') \rangle = \delta_{kk'} G_k(u-u'),$$

nous sommons sur les indices r et s :

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{m_i n_i} \sum_{P, Q} f(R) \\ &\quad \times \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod_{i=1}^n G_{m_{P_i}}(u_i - u_{P_i}) G_{n_{Q_i}}(u_i - u_{Q_i}) \langle m_{P_i} n_{Q_i} | v | m_i n_i \rangle. \end{aligned}$$

Afin d'effectuer l'intégration sur les variables u_i , nous utiliserons le développement connu ⁴⁾ de $G_k(u-u')$ en série de Fourier de période 2β . Nous avons

$$G_k(u) = \begin{cases} f_k^+ e^{-\epsilon_k u} & \text{dans l'intervalle } 0 < u \leq \beta, \\ \epsilon f_k^- e^{-\epsilon_k u} & \text{dans l'intervalle } -\beta < u \leq 0, \end{cases}$$

avec $f_k^- = (e^{\beta \epsilon_k} - \epsilon)^{-1}$.

La fonction admet un développement de Fourier, convergeant vers $G_k(u)$ pour $u \neq 0$ et $|u| \neq \beta$.

Posons

$$g_k(u) = \sum'_l c_k(l) e^{\frac{\pi i l}{\beta} u},$$

avec

$$c_k(l) = (\beta \varepsilon_k + \pi i l)^{-1},$$

où la somme est étendue aux valeurs paires ou impaires de l'entier l suivant qu'il s'agit de bosons ou de fermions. Les propriétés des séries de Fourier permettent de montrer que

$$\begin{aligned} g_k(u) &= G_k(u) \quad \text{pour } u \neq 0 \text{ et } |u| \neq \beta, \\ g_k(+0) &= f_k^+, \quad g_k(-0) = \varepsilon f_k^-, \quad g_k(0) = \frac{1}{2}(f_k^+ - \varepsilon f_k^-). \end{aligned}$$

On pourra cependant utiliser dans tout l'intervalle la fonction $g_k(u)$ en écrivant

$$G_k(u) = \lim_{\tau \rightarrow 0} g_k(u - \tau), \quad \tau > 0.$$

Après avoir introduit deux suites d'entiers p_i et q_i , l'intégration sur les variables u_i est immédiate:

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod_{i=1}^n G_{m_{P_i}}(u_i - u_{P_i}) G_{n_{Q_i}}(u_i - u_{Q_i}) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum'_{p_i} \sum'_{q_i} \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod_{i=1}^n c_{m_{P_i}}(p_{P_i}) c_{n_{Q_i}}(q_{Q_i}) \\ & \times \exp \left\{ \frac{\pi i}{\beta} (p_{P_i} + q_{Q_i} - p_i - q_i) - \frac{\pi i}{\beta} \tau (p_i + q_i) \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \beta^n \sum'_{p_i, q_i} \prod_{i=1}^n c_{m_i}(p_i) c_{n_i}(q_i) \delta_{kr}(p_{P_i} + q_{Q_i} - p_i - q_i) \exp - \frac{\pi i \tau}{\beta} (\sum_i p_i + q_i). \end{aligned}$$

On pourra omettre le dernier facteur exponentiel qui dépend de τ et écrire $c_m(p)$ au lieu de $c_m(p) e^{\pi i \tau p / \beta}$.

Par commodité, nous définissons un élément de matrice

$$\langle p' q' | V | p q \rangle = \langle m' n' | v | m n \rangle \delta(p' + q' - p - q),$$

où la lettre p désigne à la fois l'état m et la variable entière p . Dans le cas d'un système infini, $\langle |V| \rangle$ contient donc à la fois la conservation de l'impulsion et de „l'énergie”.

La fonction de partition prend alors la forme

$$\frac{Z}{Z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum_{PQ} f(R) \sum_{p_i, q_i} \prod_{i=1}^n c(p_i) c(q_i) \langle p_{P_i} q_{Q_i} | V | p_i q_i \rangle. \quad (12)$$

Cette dernière forme de Z montre que les sommations sur P et Q portent seulement sur les produits d'éléments de matrice

$$\sum_{P,Q} f(R) \prod_{i=1}^n \langle p_{P_i} q_{Q_i} | V | p_i q_i \rangle,$$

que nous pouvons écrire

$$\sum_R f(R) \sum_P \prod_{i=1}^n \langle p_i q_{R_i} | V | p_{P_i} q_{P_i} \rangle.$$

Nous remarquons maintenant que les permutations R qui appartiennent à une même classe donnent la même contribution, après sommation sur les variables P et Q .

Effectuons le changement de variables

$$p'_{C_i} = p_i, \quad q'_{C_i} = q_i,$$

où C désigne une permutation quelconque. Nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \langle p_i q_{R_i} | V | p_{P_i} q_{P_i} \rangle &= \prod_{i=1}^n \langle p'_{C_i} q'_{C_{R_i}} | V | p'_{C_{P_i}} q'_{C_{P_i}} \rangle \\ &= \prod_{i=1}^n \langle p'_i q'_{C_{R C^{-1}i}} | V | p'_{C_{P C^{-1}i}} q'_{C_{P C^{-1}i}} \rangle, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé

$$\sum_{pq} \sum_P \prod_i \langle p_i q_{R_i} | V | p_{P_i} q_{P_i} \rangle c(p_i) c(q_i) = \sum_{pq} \sum_P \prod_i \langle p'_i q'_{C_{R C^{-1}i}} | V | p'_{C_{P C^{-1}i}} q'_{C_{P C^{-1}i}} \rangle c(p'_i) c(q'_i).$$

On pourra donc restreindre la sommation aux différentes classes de R , que nous noterons $\{R\}$, à condition de multiplier par $\mathcal{N}(R)$, égal au nombre de permutations de la classe $\{R\}$ considérée. Si $\{R\}$ contient ν_p cycles de longueur p ,

$$\mathcal{N}(R) = n! \prod_p \frac{1}{\nu_p! p^{\nu_p}}, \quad \sum_p p \nu_p = n.$$

Le résultat final s'écrit donc

$$\frac{Z}{Z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum_{\{R\}} f(R) \mathcal{N}(R) \times \sum_{pq} \sum_P \prod_{i=1}^n \langle p_i q_{R_i} | V | p_{P_i} q_{P_i} \rangle c(p_i) c(q_i). \quad (13)$$

À l'ordre n , les différents produits d'éléments de matrice se groupent donc, pour chaque classe $\{R\}$, en une combinaison symétrique qui est un permanent $n \times n$ et que nous appellerons Δ_R

Soient $C_1, C_2, \dots, C_\alpha, \dots$, les cycles de R , de longueurs $l_1, l_2, \dots, l_\alpha, \dots$,

restreignant les sommations sur les permutations P qui forment une configuration connexe avec R. Les facteurs de poids ne dépendent toujours que de R.

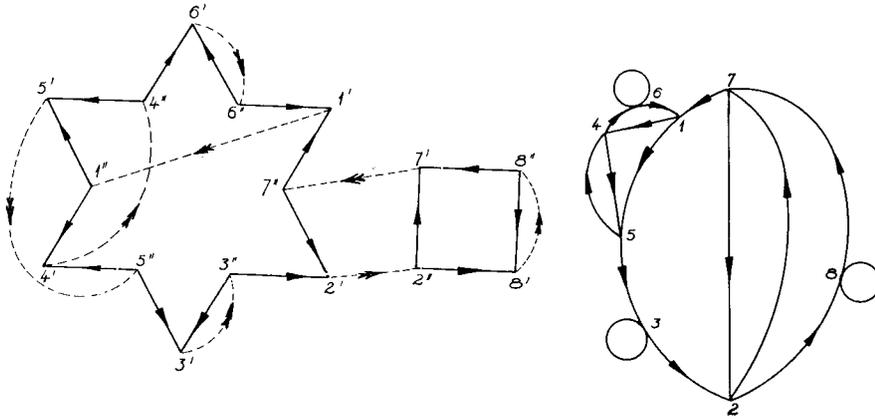


Fig. 7. Représentation d'un diagramme contenant deux cycles (γ)

avec $R = (123456)$ (78), et $P = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 47253618 \end{pmatrix}$;

à droite, le même diagramme dans la description de Hugenholtz.

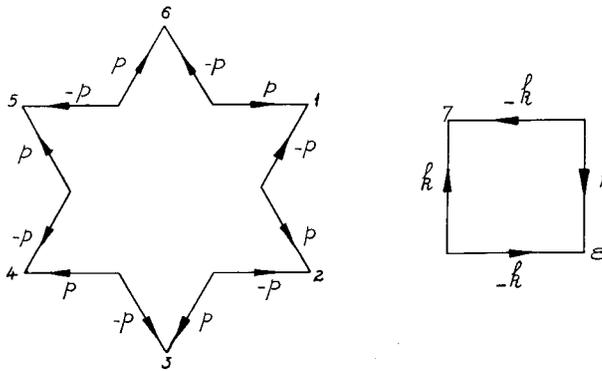


Fig. 8. Les deux seuls cycles d'impulsion et d' „énergie" non nulle du diagramme précédent.

4. Application à un Système de Fermions de Spin $\frac{1}{2}$

4.1. HYPOTHÈSES

Nous considérons un système de fermions enclos dans un grand volume Ω ; les états individuels sont repérés par l'impulsion \mathbf{p} et une composante de spin notée \uparrow ou \downarrow . A la limite Ω infini, l'impulsion est conservée à chaque interaction dont nous écrivons les éléments de matrice sous la forme

$$\frac{1}{\Omega} \langle \mathbf{rs} | v | \mathbf{nm} \rangle \delta(\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{n} - \mathbf{m}).$$

D'autre part, nous omettons toujours de noter la sommation sur les spins, qui sera comprise dans la notation

$$\sum_{\mathbf{p}} \sim \frac{2\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}.$$

Partons de l'expression (13) de $\zeta \equiv Z/Z_0$. Nous allons extraire de ζ une série partielle $\zeta_1 = Z_1/Z_0$, dont nous évaluerons exactement la contribution dans le cas d'une interaction séparable. Cette série partielle est définie de façon à ne contenir que des éléments de matrice du type

$$\begin{aligned} \langle p \uparrow, -p \downarrow | V | p' \uparrow, -p' \downarrow \rangle &= -\langle p \downarrow, -p \uparrow | V | p' \uparrow, -p' \downarrow \rangle \\ &= \frac{1}{\Omega} \langle \mathbf{p}, -\mathbf{p} | v | \mathbf{p}', -\mathbf{p}' \rangle. \end{aligned}$$

Comme plus haut, p désigne l'ensemble de la variable d'impulsion \mathbf{p} et de la variable d'„énergie” notée encore p . Nous retenons donc seulement les termes de l'hamiltonien modèle de Bardeen ⁵⁾ où l'interaction n'a lieu qu'entre paires d'impulsion totale nulle dans l'état singulet, mais nous imposons de plus la condition d'„énergie” totale nulle. Ce traitement symétrique est naturel dans une représentation indépendante du temps. En termes de diagrammes, au lieu de sommer sur les variables attachées à un système de cycles indépendants pour chaque partie connexe, nous nous limitons aux seuls cycles (γ) (fig. 8).

Afin d'effectuer la sommation de la série $\zeta_1 = Z_1/Z_0$ sans autre approximation, nous prendrons

$$\langle \mathbf{p}, -\mathbf{p} | v | \mathbf{p}', -\mathbf{p}' \rangle = g v_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}'},$$

où $v_{\mathbf{p}}$ est une fonction de $|\mathbf{p}|$, et g est positif ou négatif suivant que le potentiel est répulsif ou attractif. On voit alors comment l'introduction du potentiel séparable permet de factoriser les contributions des différents cycles (γ) quelque soit la façon dont les interactions les connectent.

4.2. SOMMATION DE Z_1/Z_0

Selon (13), les éléments de matrice de V interviennent dans le produit

$$\prod_{i=1}^n \langle p_i q_{R_i} | V | p_{P_i} q_{P_i} \rangle.$$

D'après les hypothèses de la paragraphe 4.1, nous aurons, quel que soit l'indice i ,

$$p_i = -q_{R_i}, \quad p_i = -q_i,$$

ce qui entraîne

$$p_i = p_{R_i}.$$

La sommation sur les variables q_i peut être effectuée:

$$\sum_{q_i} \prod_{i=1}^n c(p_i)c(q_i)\langle p_i q_{Ri} | V | p_{Pi} q_{Pi} \rangle = \left(\frac{g}{\Omega}\right)^n \prod_{i=1}^n c(p_i)c(-p_i)v_{p_i}^2 \delta(p_i - p_{Ri}).$$

Cette expression est indépendante de la permutation P . Si nous la substituons dans la série (13), avec

$$c(p) = (\beta \varepsilon_{\mathbf{p}} + \pi i l)^{-1}, \quad p \rightarrow (\mathbf{p}, l),$$

le facteur $1/n!$ disparaît après sommation sur les diverses P et nous obtenons

$$\zeta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-g\beta}{\Omega}\right)^n \sum_{\{R\}} f(R) \mathcal{N}(R) \sum'_{\mathbf{p}; l_i} \prod_{i=1}^n \frac{v_{p_i}^2}{\beta^2 \varepsilon_{p_i}^2 + \pi^2 l_i^2} \delta(p_i - p_{Ri}).$$

Écrivons maintenant une permutation de la classe $\{R\}$ sous forme cyclique: soit $(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$ l'un des cycles. Le produit des fonctions $\delta(p_i - p_{Ri})$ fournit un facteur $\delta(p_\alpha - p_\beta)\delta(p_\beta - p_\gamma) \dots \delta(p_\delta - p_\alpha)$; c'est-à-dire après sommation sur toutes les variables sauf une par cycle, nous devons attribuer un ensemble \mathbf{p}, l de variables indépendantes à chaque cycle de R . Si nous repérons la classe de R par $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p, \dots$ où les ν_p sont liés par la relation

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots = n,$$

la série $\zeta_1 = Z_1/Z_0$ devient

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-g\beta}{\Omega}\right)^n \sum_{(\nu)} (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu_1 + \nu_2 + \dots} n! \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu_k} \nu_k!} \left\{ \sum'_{\mathbf{p}, l} \left(\frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2}\right)^k \right\}^{\nu_k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{(\nu)} \prod_k \frac{1}{\nu_k!} \left\{ -\frac{1}{2k} \sum_{\mathbf{p}, l} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{g\beta v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2}\right)^k \right\}^{\nu_k}. \end{aligned}$$

Si l'on définit les fonctions $h_k(\rho)$ d'une variable ρ ,

$$h_k(\rho) = -\frac{1}{2k} \sum'_{\mathbf{p}, l} \left(\frac{g\beta\rho}{\Omega} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2}\right)^k,$$

et les nombres $h_k = h_k(\rho = 1)$, ζ_1 s'écrit

$$\zeta_1 = \sum_n n! \sum_{(\nu)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k!} h_k^{\nu_k}.$$

Nous pouvons sommer cette série en définissant $n!$ par l'égalité

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^n d\rho,$$

d'où, formellement:

$$\zeta_1 = \int_0^{\infty} d\rho e^{-\rho} \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu_k} \frac{1}{\nu_k!} h_k^{\nu_k}(\rho) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\rho + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\rho)\right) d\rho, \quad (14)$$

avec

$$\sum_k h_k(\rho) = - \sum_k \frac{1}{2k} \sum'_{\mathbf{p}, l} \left(\frac{g\beta\rho}{\Omega} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} \right)^k = \sum_{\mathbf{p}, l > 0} \log \left(1 - \frac{g\beta\rho}{\Omega} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} \right). \quad (15)$$

Nous remarquons que la série précédente envisagée comme fonction analytique de ρ (ou de g) n'est pas uniforme. Cette difficulté est levée en considérant la fonction $\exp \sum_k h_k(\rho)$ qui intervient seulement et qui s'écrit dans tous les cas

$$\prod_{\mathbf{p}, l > 0} \left(1 - \frac{g\beta\rho}{\Omega} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} \right).$$

Le produit infini sur l impair positif a pour valeur

$$\text{ch } \frac{1}{2}\beta\omega_p / \text{ch } \frac{1}{2}\beta\varepsilon_p,$$

où l'on a posé

$$\omega_p^2 = \varepsilon_p^2 - \frac{g\rho}{\beta\Omega} v_p^2.$$

Si g est positif (cas répulsif), ω_p^2 peut prendre des valeurs négatives lorsque ρ varie de 0 à $+\infty$, et $\text{ch } \frac{1}{2}\beta\omega_p$ doit être écrit

$$\cos \frac{1}{2}\beta \left(\frac{g\rho}{\beta\Omega} v_p^2 - \varepsilon_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit infini sur \mathbf{p} a la forme suivante:

$$\left\{ \prod_k \cos \frac{1}{2}\beta \left(\frac{g\rho}{\beta\Omega} v_k^2 - \varepsilon_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} / \text{ch } \frac{1}{2}\beta\varepsilon_k \right\} \times \left\{ \prod_{\mathbf{q}} \text{ch } \frac{1}{2}\beta\omega_q / \text{ch } \frac{1}{2}\beta\varepsilon_q \right\}. \quad (16)$$

La première parenthèse enferme un produit fini, puisqu'il est restreint aux valeurs de \mathbf{k} telles que $|\varepsilon_k| < v_k(g\rho/\beta\Omega)^{\frac{1}{2}}$. Le second produit est étendu aux valeurs de \mathbf{q} telles que $|\varepsilon_q| > v_q(g\rho/\beta\Omega)^{\frac{1}{2}}$ et converge avec l'intégrale $\int v_q^2 dq$. Nous supposons donc que v_q décroît convenablement à l'infini. Dans la région d'intégration $\rho \geq 0$, le prolongement analytique des fonctions à intégrer est donc défini sans ambiguïté, essentiellement à volume fini.

4.3. LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE Z_1/Z_0

L'étude du comportement asymptotique de $\zeta_1 = Z_1/Z_0$ lorsque Ω augmente indéfiniment, nous amène à traiter séparément les cas attractif et répulsif. Dans le premier cas, $g < 0$, il existe une valeur critique β_c , au-dessus de laquelle la quantité

$$\mathcal{P} = - \lim_{\Omega \rightarrow \infty} (\beta\Omega)^{-1} \log (Z_1/Z_0)$$

n'est pas nulle et détermine l'énergie libre de la phase superconductrice. Au-dessous de la valeur β_c , pour $g < 0$ et quel que soit β pour $g > 0$, $\mathcal{P} = 0$ et ζ_1

est indépendant du volume: on obtient alors la seule contribution dite des „échelles généralisées” calculées dans l’hypothèse des paires d’énergie nulle. On sait que dans la série des diagrammes connexes qui définissent le potentiel thermodynamique ce sont les échelles qui donnent la contribution maximum, indépendante du volume. Elles ont été sommées en toute généralité ⁸⁾ et convergent si g est positif, pour $\beta < \beta_c$, si g est négatif. C’est cependant le terme dû aux paires „d’énergie” nulle qui présente la première singularité, en β_c , lorsque β augmente. On peut donc penser que cette hypothèse des paires est valable dans le voisinage de la température critique.

4.3.1. Cas attractif, $g < 0$.

D’après (14) et (15), nous écrivons Z_1/Z_0 sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_0} &= \int_0^\infty \exp \left\{ -\rho + \sum_{\mathbf{p}, l > 0} \log \left(1 - \frac{g\beta\rho}{\Omega} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} \right) \right\} d\rho \\ &= \int_0^\infty \exp \left\{ -\rho + \sum_{\mathbf{p}} \log \left(\text{ch } \frac{1}{2} \beta \omega_p / \text{ch } \frac{1}{2} \beta \varepsilon_p \right) \right\} d\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

La somme sur \mathbf{p} converge quel que soit ρ avec l’intégrale $\int v_p^2 d\mathbf{p}$. Changeons de variable pour l’intégration en ρ en posant

$$x = \frac{|g|\rho}{\Omega\beta}.$$

D’autre part, à la limite du volume infini,

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}.$$

Définissons $f(x)$ par l’égalité suivante:

$$f(x) = -\frac{1}{|g|} \beta x + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \sum_{l > 0} \log \left(1 + \frac{x\beta^2 v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} \right).$$

Nous avons, pour le logarithme des deux membres de (17),

$$\frac{1}{\Omega} \log (Z_1/Z_0) = \frac{1}{\Omega} \log \frac{\Omega}{|g|\beta} + \frac{1}{\Omega} \log \int_0^\infty dx e^{\Omega f(x)}.$$

La méthode de Laplace conduit à rechercher le maximum absolu de $f(x)$ pour $x \geq 0$, et à calculer sa dérivée:

$$f'(x) = -\frac{\beta}{|g|} + \beta^2 \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \sum_{l > 0} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2}.$$

Sous cette forme, on voit que la dérivée seconde est toujours négative. Si

l'équation $f'(x) = 0$, possède une solution ξ , celle-ci est unique. L'équation pour ξ s'écrit donc

$$1 = \frac{|g|}{2(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \ v_p^2 \frac{1}{\omega_p} \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta \omega_p, \quad (18)$$

avec

$$\omega_p^2 = \varepsilon_p^2 + \xi v_p^2.$$

On reconnaît en (18) l'équation connue qui détermine le „gap” $\Delta_p^2 = \xi v_p^2$, en fonction de β . Il existe une valeur β_c telle que la solution $\xi(\beta)$ existe pour $\beta \geq \beta_c$. Plaçons-nous d'abord dans ce cas. Nous obtenons

$$\mathcal{P} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta \Omega} \log (Z_1/Z_0) = -\frac{1}{\beta} f(\xi).$$

C'est-à-dire, pour le potentiel thermodynamique $\Omega \psi$,

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta \Omega} \log Z_1 = -\frac{1}{\beta \Omega} \log Z_0 - \frac{1}{\beta} f(\xi), \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \log(1 + e^{-\beta \varepsilon_p}) + \frac{\xi}{|g|} - \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \int d^3 \mathbf{p} \log(\operatorname{ch} \frac{1}{2} \beta \omega_p / \operatorname{ch} \frac{1}{2} \beta \varepsilon_p), \end{aligned}$$

ou

$$\psi = \frac{\xi}{|g|} - \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \int d^3 \mathbf{p} \log(1 + e^{-\beta \omega_p}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} (\omega_p - \varepsilon_p).$$

Cette formule est la spécialisation au cas du potentiel séparable du résultat plus général donné par Bogoliubov, Zubarev et Tserkovnikov⁶⁾.

Considérons maintenant le domaine $\beta < \beta_c$, où l'équation (18) n'a pas de solution. Le maximum de $f(x)$ est atteint pour $x = 0$ et l'on trouve $\mathcal{P} = 0$. Si l'on veut obtenir la limite de Z_1/Z_0 , il faut revenir à l'expression (17) qui est uniformément convergente par rapport à Ω et l'on obtient

$$\lim Z_1/Z_0 = \int_0^\infty \exp \left\{ -\rho - \frac{g\beta\rho}{\Omega} \sum_{\mathbf{p}, l} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} \right\} d\rho = \frac{1}{1 + gF(\beta)},$$

avec la définition suivante de $F(\beta)$:

$$F(\beta) = \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{p}, l > 0} \frac{v_p^2}{\beta^2 \varepsilon_p^2 + \pi^2 l^2} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \ v_p^2 \frac{1}{\varepsilon_p} \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta \varepsilon_p.$$

Si l'on effectue la sommation des échelles on obtient effectivement $\log Z = \log Z_0 - \log(1 + gF(\beta)) + \dots$. La singularité en β_c est déterminée par l'équation $1 = -gF(\beta_c)$, qui coïncide avec (18) pour $\xi = 0$.

4.3.2. Cas répulsif, $g > 0$

Nous montrons ici la convergence uniforme par rapport au volume de l'expression (14) que nous devons écrire

$$\zeta_1 = \frac{Z_1}{Z_0} = \int_0^\infty e^{-\rho} \prod_{\mathbf{p}} (\text{ch } \frac{1}{2} \beta \omega_{\mathbf{p}} / \text{ch } \frac{1}{2} \beta \varepsilon_{\mathbf{p}}) d\rho,$$

où le produit $\prod_{\mathbf{p}}(\dots)$ est défini par (16). Chaque facteur de ce produit est en valeur absolue inférieure à 1, nous avons donc $|\prod_{\mathbf{p}}(\dots)| \leq 1$.

Divisons l'intégrale sur ρ qui définit ζ_1 en deux parts

$$\zeta_1 = \int_0^R e^{-\rho} \prod_{\mathbf{p}}(\dots) d\rho = \int_0^R + \int_R^\infty. \tag{19}$$

La seconde intégrale est inférieure en module à e^{-R} . Nous pouvons étudier la première pour $\Omega \rightarrow \infty$. Elle s'écrit, d'après (16),

$$\int_0^R d\rho e^{-\rho} \prod_{\mathbf{p}}(\dots) = \int_0^R d\rho e^{-\rho} \prod_{\mathbf{k}}(\dots) \times \prod_{\mathbf{q}}(\dots).$$

Le premier produit $\prod_{\mathbf{k}}$ est restreint au domaine $|\varepsilon_{\mathbf{k}}| < v_{\mathbf{k}}(g\rho/\beta\Omega)^{\frac{1}{2}}$.

Le domaine du produit sur \mathbf{k} et l'argument du cos (...) tendent vers zéro uniformément par rapport à ρ ,

$$\frac{|\varepsilon_{\mathbf{k}}|}{v_{\mathbf{k}}} \leq \left(\frac{g\rho}{\beta\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{gR}{\beta\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut donc remplacer $\prod_{\mathbf{k}}(\dots)$ par l'unité sous l'intégrale \int_0^R , qui peut s'écrire maintenant

$$\int_0^R d\rho \exp \left\{ -\rho + \sum_{\mathbf{q}} \log \left(\text{ch } \frac{1}{2} \beta \omega_{\mathbf{q}} / \text{ch } \frac{1}{2} \beta \varepsilon_{\mathbf{q}} \right) \right\}, \tag{20}$$

avec

$$|\varepsilon_{\mathbf{q}}| > v_{\mathbf{q}}(g\rho/\beta\Omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme dans le cas attractif, si Ω tend vers l'infini, on obtient par un développement limité au terme en $1/\Omega$,

$$\sum_{\mathbf{q}}(\dots) \sim \frac{2\Omega}{(2\pi)^3} \int \text{th } \frac{1}{2} \beta \varepsilon_{\mathbf{q}} \left(-\frac{g\rho}{4\Omega} \frac{v_{\mathbf{q}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{q}}} \right) d^3\mathbf{q} = -g\rho F(\beta).$$

C'est-à-dire, après substitution dans (20),

$$\left| \zeta_1 - \int_0^R d\rho e^{-\rho(1+gF(\beta))} \right| < e^{-R}.$$

D'après (19), R est arbitraire, la limite de ζ_1 est donc $(1+gF(\beta))^{-1}$.

Dans les deux cas, ce résultat s'obtient en ne conservant que le premier

terme $h_1(\rho)$ de la série $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(\rho)$ dans (14). Ce terme correspond en effet aux cycles de $\{R\}$ de longueur 1, les seuls à retenir pour la définition des diagrammes en échelles.

5. Conclusion

Sans qu'une justification plus précise en soit donnée, nous avons vu dans ce papier comment une écriture nouvelle de la série de perturbation de Z/Z_0 et la représentation correspondante des diagrammes, permet de reconnaître le rôle particulier joué par les termes de l'hamiltonien modèle de Bardeen et d'extraire la série partielle qui donne le résultat connu. La sommation exacte est possible grâce au potentiel séparable, sans lequel il faudrait évaluer de façon approchée les permanents qui rassemblent les éléments de matrice, afin de retrouver la solution plus générale de Bogoliubov ⁶).

Je remercie le Professeur C. Bloch et Monsieur R. Balian pour les nombreux conseils et remarques qui m'ont aidé dans ce travail.

Bibliographie

- 1) N. M. Hugenholtz, *Physica* **23** (1957) 481;
J. Goldstone, *Proc. Roy. Soc. A* **239** (1957) 267;
C. Bloch et C. De Dominicis, *Nuclear Physics* **7** (1958) 459
- 2) R. Balian, Rapport S.P.M. no 468, Saclay
- 3) E. R. Caianiello, *Nuovo Cim.* **9** (1958) 569
- 4) E. W. Montroll et J. C. Ward, *Physics of Fluids* **1** (1958) 55
- 5) J. Bardeen, L. N. Cooper et J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175
- 6) N. N. Bogoliubov, *Soviet Physics JETP* **7** (1958) 51;
Bogoliubov, Zubarev et Tserkovnikov, *Soviet Physics (Doklady)* **2** (1958) 535
- 7) L. P. Gorkhov, *Soviet Physics JETP* **7** (1958) 505
- 8) D. J. Thouless, UCRL 8884;
M. L. Mehta, *Nuclear Physics* **20** (1960) 533

GAZ COULOMBIEN DISCRET A UNE DIMENSION

M. GAUDIN

Service de Physique Théorique,
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, BP n° 2, 91190 Gif-sur-Yvette, France

(Reçu le 14 février 1973)

Résumé. — Les isothermes d'un gaz discret (lattice gas) coulombien sont calculés exactement pour trois valeurs de la température inverse $\beta = 1, 2, 4$. Les zéros de la grande fonction de partition se condensent avec une densité uniforme sur un cercle ou un arc de cercle.

Abstract. — The three isotherms $\beta = 1, 2, 4$ of a circular Coulomb lattice gas are calculated exactly. The roots of the grand partition function are uniformly distributed on a section or on the whole unit circle.

1. Introduction. — Dans sa théorie statistique des niveaux d'énergie des systèmes complexes [1], Dyson étudie la thermodynamique d'un système de charges identiques portées par un cercle conducteur et se repoussant mutuellement selon la loi de l'électrostatique à deux dimensions. Si l'on prend pour unité le rayon du cercle conducteur, l'énergie potentielle du système de n charges ponctuelles $+ 1$, de coordonnées angulaires $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, est égale à

$$W = - \sum_{i < j} \log | e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j} |, \quad (1)$$

et la fonction de partition de ce système classique à la température $T = \beta^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \psi_n(\beta) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots d\theta_n e^{-\beta W} \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots d\theta_n \prod_{j < k} | e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k} |^\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Il se trouve que pour les valeurs particulières $\beta = 1, 2, 4$, la quantité $\psi_n(\beta)$ peut être considérée comme la mesure du volume de certains espaces homogènes (ensembles de matrices orthogonales, unitaires, symplectiques), et de cette façon a été évaluée par Dyson qui obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_n(1) &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{3}{2}\right)} \\ \psi_n(2) &= n! \\ \psi_n(4) &= \frac{2n!}{2^n}. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Ces résultats lui ont permis de formuler la conjecture

$$\psi_n(\beta) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2} n\right)}{\Gamma^n\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)}, \quad \forall \beta \quad (4)$$

prouvée peu après grâce à un lemme de Wilson [2] et Gunson [3]. La thermodynamique du modèle coulombien circulaire s'en déduit simplement.

Nous nous proposons ici de considérer une version *discrète* du modèle continu précédent. Le système sera constitué de n charges mobiles $- 1$, dont les seules positions possibles sont les N sites d'un réseau périodique circulaire. Etant donnée la croissance logarithmique du potentiel coulombien avec la distance, il sera suffisant de placer ces charges mobiles négatives en présence d'une distribution uniforme mais discrète de charges positives, pour qu'une énergie libre par particule mobile puisse être définie. Comme on le verra de façon plus précise au paragraphe 5, ce modèle pourra être considéré comme une version à une dimension d'un modèle d'Ising en présence de champ ou si l'on veut d'un modèle de gaz coulombien discret à une dimension (Coulomb lattice gas).

Utilisant des méthodes développées pour les ensembles gaussiens [4], [5], nous procédons d'abord au calcul des trois isothermes $\beta = 1, 2, 4$ du *lattice gas* coulombien.

2. La fonction de partition. Le cas $\beta = 2$. — L'affixe de la charge négative $n^o j$ occupant le site p_j , $1 \leq p_j \leq N$, sur le cercle de rayon 1, est e^{p_j} , avec $\varepsilon = e^{(2\pi i)/N}$. Une configuration de charges mobiles est donc définie par une suite

$$\{ p \} = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$$

formée de n entiers distincts variant de 1 à N . L'énergie mutuelle du système de charges est donc

$$W = - \sum_{j < k} \log | \varepsilon^{p_j} - \varepsilon^{p_k} | . \quad (5)$$

Afin d'obtenir des propriétés extensives normales, Dyson soustrait de W , l'énergie du fondamental des n charges, qui dans le cas continu vaut $n/2 \log n$. Or, sur notre réseau périodique, nous ne connaissons pas en général la configuration d'équilibre. Bien que la quantité $n/2 \log n$ soit sûrement une borne inférieure de l'énergie du fondamental, cette soustraction a l'inconvénient de dépendre du nombre n de façon non linéaire et rend malaisée l'introduction de la grande fonction de partition, c'est-à-dire la comparaison avec un modèle d'Ising. Ayant ceci en vue, nous choisissons de placer les n charges négatives en présence de N charges $+ \frac{1}{2}$ fixées sur chaque site du réseau circulaire ; prenant pour zéro l'énergie mutuelle d'une charge $- 1$ coïncidant avec une charge fixe $+ \frac{1}{2}$. L'énergie d'une charge mobile dans le fond uniforme positif est évidemment indépendante de sa position et vaut

$$- \frac{1}{2} \sum_{\substack{p=1 \\ (p \neq q)}}^N \log | \varepsilon^q - \varepsilon^p | = - \frac{1}{2} \log N , \quad (6)$$

ce qui donne lieu à une énergie totale

$$W_0 = - \frac{n}{2} \log N . \quad (7)$$

La fonction de partition du système classique ainsi défini et obéissant à la statistique de Boltzman est donc

$$Q_n(\beta) = \frac{1}{n!} \sum_{\{p\}} e^{-\beta(W-W_0)} \quad (8)$$

$$\equiv \frac{1}{n!} \frac{1}{N^{n\beta/2}} \sum_{\{p\}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} | \varepsilon^{p_i} - \varepsilon^{p_j} |^\beta . \quad (9)$$

Pour faciliter la comparaison avec l'ensemble circulaire, on posera

$$\varphi_n(\beta) = \frac{1}{N^n} \sum_{\{p\}} \prod_{i < j} | \varepsilon^{p_i} - \varepsilon^{p_j} |^\beta , \quad (10)$$

puisque l'on a, pour β réel positif

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_n(\beta) = \psi_n(\beta) . \quad (11)$$

Evaluons tout de suite $\varphi_n(2)$. On a l'identité connue

$$\Delta(\varepsilon^{p_1}, \dots, \varepsilon^{p_n}) \equiv \prod_{j > i} (\varepsilon^{p_j} - \varepsilon^{p_i}) = \det. | \varepsilon^{k_i p_j} |_n \quad (12)$$

où figure au second membre de (12) le déterminant d'ordre n d'éléments $\varepsilon^{k_i p_j}$ avec $k_i = i - 1$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Dans la somme (10), pour $\text{Re } \beta > 0$ la restriction « p distincts » peut être levée et l'on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_n(2) &= \frac{1}{N^n} \sum_{\{p\}} \Delta \Delta^* = \frac{1}{N^n} \sum_{\{p\}} | \varepsilon^{k_i p_j} | | \varepsilon^{-k_i p_j} | \\ &= \sum_{P, Q} \chi(P) \chi(Q) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{N} \sum_{p_j=1}^N \varepsilon^{(k_{p_j} - k_{Q_j}) p_j} \right), \quad (13) \end{aligned}$$

$\chi(P)$ étant l'indicateur de parité de la permutation P , d'ordre n , etc...

Puisque l'on a $| k_{p_j} - k_{Q_j} | < N$, nous obtenons

$$\varphi_n(2) = \sum_{P, Q} \chi(P) \chi(Q) \prod_{j=1}^n \delta(k_{p_j} - k_{Q_j}) = \sum_P 1 = n! . \quad (14)$$

On notera l'égalité $\varphi_n(2) = \psi_n(2)$.

3. Calcul de $\varphi_n(4)$. — L'expression (10) pour $\beta = 4$, s'écrit

$$\varphi_n(4) = \sum_{\{p\}} \frac{1}{N^n} \prod_j \varepsilon^{-2(n-1)p_j} \prod_{j > i} (\varepsilon^{p_j} - \varepsilon^{p_i})^4 . \quad (15)$$

Il est facile de mettre le double produit sous forme d'un déterminant. En effet, si l'on considère le déterminant de Van der Mond

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} (x_j - x_i) , \quad (16)$$

on a la limite

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow x_4 \\ \dots}} \frac{A(x_1, \dots, x_{2n})}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) \dots} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_{2j} - x_{2i})^4 . \quad (17)$$

D'où l'on déduit l'identité

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_j - \varepsilon_i)^4 \equiv \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \varepsilon_j & 3 \varepsilon_j^2 & \dots & (2n-2) \varepsilon_j^{2n-3} & (2n-1) \varepsilon_j^{2n-2} \\ 1 & \varepsilon_j & \varepsilon_j^2 & \varepsilon_j^3 & \dots & \varepsilon_j^{2n-2} & \varepsilon_j^{2n-1} \end{vmatrix} \quad (18)$$

où l'on a posé $\varepsilon_j = \varepsilon^{p_j}$.

Substituant au second membre de (15) un développement de Lagrange du déterminant (18), nous obtenons

$$\varphi_n(4) = \frac{1}{N^n} \sum_{\{p\}} \sum_P \chi(P) \prod_{j=1}^n \varepsilon_j^{-2(n-1)} \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} \alpha_1 \varepsilon_1 & \alpha_1 - 1 & & & & & \\ & \alpha_2 \varepsilon_1 & \alpha_2 - 1 & & & & \\ & & \alpha_3 \varepsilon_2 & \alpha_3 - 1 & & & \\ & & & \alpha_4 \varepsilon_2 & \alpha_4 - 1 & & \\ & & & & & & \dots \end{vmatrix} . \quad (19)$$

où U , \bar{U} et V sont des matrices diagonales d'ordre $(2n - N)$ définies à vue d'après le tableau (28) de la matrice B :

$$\begin{cases} U_k = (2k - 2n - 1) & k = 1, 2, \dots, 2n - N \\ \bar{U}_k = 2(N - n) + 2k - 1 & k = 1, 2, \dots, 2n - N \\ V_k = N - 2n - 1 + 2k & k = 1, 2, \dots, 2n - N. \end{cases} \quad (30)$$

Le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} U & V \\ V & \bar{U} \end{vmatrix}$ est égal à

$$\begin{aligned} \delta &= \prod_{k=1}^{2n-N} (U_k \bar{U}_k - V_k^2) \\ &= \prod_{k=1}^{2n-N} [(2N + 2k - 2n - 1)(2k - 2n - 1) - (N + 2k - 2n - 1)^2] \\ &= (-)^N N^{2(2n-N)}. \end{aligned} \quad (31)$$

On obtient donc, d'après (29) et (31)

$$\text{Pf } A = 1.3.5. \dots (2N - 2n - 1). N^{2n-N}. \quad (32)$$

C'est-à-dire, pour $2n > N$

$$\varphi_n(4) = N^{2n-N} \frac{(2N - 2n)! n!}{(N - n)! 2^{N-n}}. \quad (33)$$

Notons que pour $2n = N$, cette formule donne le même résultat que (26). Pour $n = N$, on a le test du calcul direct $\varphi_N(4) = N^N N!$

4. Calcul de $\varphi_n(1)$. — D'après la définition (10), nous avons à calculer

$$\varphi_n(1) = \frac{1}{N^n} \sum_{\{p\}} \prod_{j>i} |\varepsilon^{p_j} - \varepsilon^{p_i}|, \quad (34)$$

or, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon^{p_1} \varepsilon^{p_2} \dots \varepsilon^{p_n}) &= \prod_{j>i} (\varepsilon^{p_j} - \varepsilon^{p_i}) \\ &= \prod_j \varepsilon^{p_j - (n-1)/2} \prod_{j>i} \sin\left(\frac{p_j - p_i}{N} \pi\right) (2i)^{[n(n-1)/2]} \end{aligned} \quad (35)$$

et par conséquent, dans la région D :

$$1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n \leq N \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \prod_{j>i} |\varepsilon^{p_j} - \varepsilon^{p_i}| &= \frac{1}{i^{[n(n-1)/2]}} \prod_{j=1}^n \varepsilon^{-[p_j(n-1)/2]} \Delta(\varepsilon^{p_1}, \dots, \varepsilon^{p_n}) \\ &\equiv \frac{1}{i^{[n(n-1)/2]}} |\varepsilon^{k_i p_j}|_n. \end{aligned} \quad (37)$$

avec

$$\{k\} \equiv \left\{ -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \dots, \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2} \right\}. \quad (38)$$

En vertu de la symétrie de l'intégrand dans les variables p_j au second membre de (34), la quantité $\varphi_n(1)$ peut être calculée comme une somme dans le domaine D défini en (36), et compte tenu de (37), on obtient

$$\varphi_n(1) = i^{-[n(n-1)/2]} \frac{n!}{N^n} \sum_P \chi(P) \varepsilon^{\alpha_1 p_1} \varepsilon^{\alpha_2 p_2} \dots \varepsilon^{\alpha_n p_n} \quad (39)$$

où P désigne la permutation courante d'ordre n

$$P \equiv \begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} k_i &= i - \frac{n+1}{2} \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (40)$$

La méthode consiste maintenant à effectuer les sommations d'abord sur les variables $p_1, p_3, \dots, p_{2v-1}$ où v désigne la partie entière de $n/2$. Nous limiterons la preuve au cas $n = 2v$. De façon précise, nous sommerons dans les domaines

$$\begin{aligned} 1 &\leq p_1 < p_2 \\ p_2 &\leq p_3 < p_4 \end{aligned}$$

$$p_{2v-2} \leq p_{2v-1} < p_{2v}. \tag{41}$$

Puisque l'intégrand s'annule lorsque $p_{2i} = p_{2i+1}$, nous sommes libres d'inclure les égalités. Nous avons

$$\sum_{p=p_{2i}}^{p_{2i+2}-1} e^{\alpha_{2i+1}p} = \frac{e^{\alpha_{2i+1}p_{2i}} - e^{\alpha_{2i+1}p_{2i+2}}}{1 - e^{\alpha_{2i+1}}}$$
(42)

et par conséquent la somme (34) s'écrit

$$\varphi_n(1) = i^{-[n(n-1)]/2} \frac{n!}{N^n} \sum_D \sum_P \chi(P) \frac{e^{\alpha_1} - e^{\alpha_1 p_2}}{1 - e^{\alpha_1}} \cdot e^{\alpha_2 p_2} \cdot \frac{e^{\alpha_3 p_2} - e^{\alpha_3 p_4}}{1 - e^{\alpha_3}} \cdot e^{\alpha_4 p_4} \dots \frac{e^{\alpha_{2v-1} p_{2v-2}} - e^{\alpha_{2v-1} p_{2v}}}{1 - e^{\alpha_{2v-1}}} \cdot e^{\alpha_{2v} p_{2v}}. \tag{43}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \varphi_n(1) &= i^{-[n(n-1)]/2} \frac{n!}{N^n} \sum_D \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - e^{k_i}} \sum_P \chi(P) (e^{\alpha_1} - e^{\alpha_1 p_2}) (e^{\alpha_2 p_2} - e^{\alpha_2(p_2+1)}) \times \\ &\quad \times (e^{\alpha_3 p_2} - e^{\alpha_3 p_4}) (e^{\alpha_4 p_4} - e^{\alpha_4(p_4+1)}) \dots (e^{\alpha_{2v} p_{2v}} - e^{\alpha_{2v}(p_{2v}+1)}). \end{aligned} \tag{44}$$

Dans le déterminant que représente la somme sur P , ajoutons les éléments de la première colonne à la seconde, puis de la nouvelle seconde à la troisième et ainsi de suite ; nous obtenons

$$\varphi_n(1) = i^{-[n(n-1)]/2} \frac{n!}{N^n} \sum_{1 \leq p_2 < p_4 < \dots < p_{2v} \leq N} \prod_{i=1}^n \frac{e^{k_i}}{1 - e^{k_i}} | 1 - e^{k(p_2-1)}, 1 - e^{k p_2}, 1 - e^{k(p_4-1)}, 1 - e^{k p_4}, \dots |_{2v}, \tag{45}$$

où la notation du déterminant d'ordre n qui figure dans (45) est suffisamment explicite ($k \rightarrow k_1, k_2, \dots, k_n$). L'intégrand est maintenant complètement symétrique en p_2, p_4, \dots, p_{2v} et nous pourrions écrire

$$\varphi_n(1) = i^{-[n(n-1)]/2} \frac{n!}{N^n} \frac{1}{v!} \sum_{1 \leq p_{2i} \leq N} \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - e^{k_i}} | \dots |_{2v}. \tag{46}$$

Développant le déterminant comme en (19), nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \varphi_n(1) &= i^{-[n(n-1)]/2} \frac{n!}{N^n} \frac{1}{v!} \frac{1}{(2i)^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sin \frac{k_i \pi}{N}} N^v v! \text{Pf } E(k, k'), \\ &\quad k \quad \text{et} \quad k' \in \{k_i\}, \end{aligned} \tag{47}$$

où l'élément de matrice antisymétrique $E(k, k')$ est défini par la somme

$$E(k, k') = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \begin{vmatrix} 1 - e^{k(p-1)}, & 1 - e^{k p} \\ 1 - e^{k'(p-1)}, & 1 - e^{k' p} \end{vmatrix}. \tag{48}$$

On trouve

$$E(k, k') = 2i \sin \frac{2\pi k'}{N} \delta(k + k') \tag{49}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \text{Pf } E &= \pm (2i)^v \left\{ \prod_{i=1}^n \sin \frac{2\pi k_i}{N} \right\}^{1/2}, \quad k_i = i - \frac{n+1}{2} \\ &= \pm (2i)^v \sin \frac{\pi}{N} \cdot \sin \frac{3\pi}{N} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2v-1)\pi}{N}. \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$\varphi_n(1) = \frac{n!}{N^v} \frac{1}{2^v} \prod_{j=1}^v \frac{\sin \frac{(2j-1)\pi}{N}}{\sin^2 \frac{(2j-1)\pi}{2N}}; \quad (50)$$

ou encore

$$\varphi_n(1) = \frac{2^v!}{N^v} \prod_{j=1}^v \operatorname{cotg} \frac{(2j-1)\pi}{2N} \quad (n = 2v). \quad (51)$$

Un calcul analogue effectué pour $n = 2v + 1$ donne le résultat spécifié en (55). Dans les deux cas de parité on vérifie le test

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_n(1) = \psi_n(1) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{2v}(1) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^v v! \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_{2v+1}(1) = \frac{(2v+1)!}{v! \pi^v}. \quad (52)$$

5. L'énergie libre. — Nous rassemblons les résultats des paragraphes précédents dans la proposition suivante.

5.1 PROPOSITION I. — La quantité

$$Q_n(\beta) = N^{-n\beta/2} \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n \leq N} |A|^\beta \quad (53)$$

avec

$$A = \prod_{i < j} (e^{p_i} - e^{p_j}) \quad \text{et} \quad \varepsilon = e^{(2\pi i/N)}, \quad (54)$$

prend pour $\beta = 0, 1, 2, 4$ les valeurs

$$\left. \begin{aligned} Q_n(0) &= C_n^N \\ Q_n(1) &= \prod_{j=1}^v \operatorname{cotg} \frac{(2j-1)\pi}{2N} && \text{pour } n = 2v \\ &= \sqrt{N} \prod_{j=1}^v \operatorname{cotg} \frac{2j\pi}{2N} && \text{pour } n = 2v + 1 \\ Q_n(2) &= 1 \\ Q_n(4) &= \begin{cases} \frac{2n!}{2^n n! N^n} & \text{si } 2n \leq N \\ \frac{(2N-2n)!}{2^{N-n}(N-n)!} \frac{1}{N^{N-n}} & \text{si } 2n \geq N. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Dans ces quatre cas, on vérifie, si N est pair

$$Q_{N-n}(\beta) = Q_n(\beta). \quad (56)$$

En présence des résultats (55), il est normal de se poser la question de leur extrapolation possible à toute valeur de β . Le changement de forme analytique de $Q_n(4)$ en fonction de la densité $\rho = n/N$, rend sceptique sur la possibilité de renouveler quelque chose d'analogue à la conjecture de Dyson [4].

Dans un domaine restreint de densité, le théorème suivant conjecturé par Dyson et prouvé très simplement par Good [13], permet sans nouveau calcul d'obtenir $Q_n(\beta)$ pour $\beta = 2k$ (k entier naturel).

Théorème : le coefficient du terme $(x_1, x_2, \dots, x_n)^{(n-1)k}$ dans le polynôme

$$(-)^{[kn(n-1)]/2} \Delta^{2k}(x_1, \dots, x_n)$$

est égal à

$$\frac{(nk)!}{(k!)^n}. \quad (57)$$

Appliquons-le au calcul de $\varphi_n(2k)$

$$\varphi_n(2k) = \frac{1}{N^n} \sum_{\{p\}} (-)^{[kn(n-1)]/2} \Delta^{2k}(\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_n}) \times \prod_{j=1}^n \varepsilon_j^{-(n-1)k} \quad (58)$$

avec $\varepsilon_j \equiv e^{p_j}$.

Du fait de la relation

$$\frac{1}{N} \sum_{p=1}^N e^{pq} = \begin{cases} 1 & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } 0 < |q| < N, \end{cases} \quad (59)$$

si les puissances de ε_j , $j = [1, n]$, qui figurent dans le développement de l'intégrant au second membre de (58), sont en valeur absolue inférieures à N , la sommation sur $\{p\}$ élimine la contribution de tous les monômes, sauf celle du terme constant. Or, les puissances de ε_j sont bornées en module par $k(n-1)$, on en déduit la proposition II.

5.2 PROPOSITION II. — Si $k < N/(n - 1)$, on a

$$\varphi_n(2k) = \frac{(nk)!}{(k!)^n}$$

et par conséquent

$$Q_n(2k) = \frac{(nk)!}{n! N^{n(k-1)} (k!)^n} \quad (60)$$

Les résultats (55) et (60) nous permettent de calculer ce que nous appellerons une *énergie libre* par particule à la limite thermodynamique $N = \infty$, en fonction de la densité $\rho = n/N$, pour les valeurs en question de la température.

$$-\beta F(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Q_n(\beta) \quad (61)$$

On obtient aisément

$$F(2) = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^{\pi\rho/2} dx \log(\lg x) \quad 0 < \rho < 1 \quad (62)$$

ceci dans les 2 cas de parité.

$$F(4) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(\log 2\rho - 1) & 0 < \rho < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)(\log 2(1 - \rho) - 1) & \frac{1}{2} > \rho > 1 \end{cases} \quad (63)$$

$$F(2k) = -\frac{k-1}{2k}(\log \rho - 1) + \frac{1}{2k} \log k! - \frac{1}{2} \log k \quad 0 < \rho < \frac{1}{k} \quad (64)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Il faut observer ici que la quantité $\rho^2(\partial F/\partial \rho)$ ne saurait être considérée *a priori* comme la pression du système de charges mobiles, puisque la période du réseau positif dépend de N , autrement dit l'interaction dépend du volume. Pour étudier les propriétés extensives du système, il faudrait par exemple restreindre le volume alloué aux charges mobiles à un arc de cercle défini. Le calcul de la fonction de partition serait alors analogue à celui de la loi d'espace-ment des niveaux dans les ensembles circulaires. Le calcul est simple pour $\beta = 2$. Si le volume alloué sur le réseau circulaire original est restreint à $N-M$ sites on trouve pour la fonction de partition \hat{Q}_n

$$\hat{Q}_n = Q_n \det \left| \begin{array}{c} \delta(p - q) - \frac{\sin \pi\rho(p - q)}{N \sin \frac{\pi}{N}(p - q)} \end{array} \right|_M$$

et il resterait à étudier le comportement asymptotique d'un déterminant de Toeplitz, ce que nous n'avons pas fait.

Il est cependant possible de définir une *pression* au moyen de l'ensemble grand canonique ; la pression grand canonique coïncidera avec la quantité $\rho^2(\partial F/\partial \rho)$ dans les régions de température où $\partial F/\partial \rho \geq 0$. Ce sera le cas pour $\beta = 1$, $\partial F(1)/\partial \rho > 0$. Par contre, pour $\beta = 4$, $\partial F(4)/\partial \rho < 0$, on aura $p = 0$ pour $0 \leq \rho < 1$.

6. Les zéros de la grande fonction de partition. — La grande fonction de partition de notre système

coulombien est, en vertu de la définition (8), le polynôme de degré N dans la fugacité Z

$$Q(\beta) = \sum_{n=0}^N Q_n(\beta) Z^n, \quad Q_0 = 1 \quad (65)$$

Montrons d'abord que $Q(\beta)$ peut être interprétée comme la fonction de partition canonique d'un modèle d'Ising pour un antiferromagnétique en présence de champ. Plus précisément, si l'on définit l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = - \sum_{1 \leq p < q \leq N} \sigma_p \sigma_q \log | \varepsilon^p - \varepsilon^q | + h \sum_{p=1}^N \sigma_p \quad (66)$$

d'un système de spins $\sigma_p = \pm \frac{1}{2}$, localisés sur les sites ε^p du réseau circulaire, en présence d'un champ magnétique externe h , la fonction de partition

$$Q_A(\beta) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}} \quad (67)$$

est proportionnelle à $Q(\beta)$

$$Q_A(\beta) = N^{\beta N/8} Z^{-N/2} Q(\beta) \quad (68)$$

avec la relation champ-fugacité

$$Z = e^{\beta h}$$

La preuve de (65) s'obtient en posant $\sigma_p = -v_p + \frac{1}{2}$, $v_p = 0, 1$, et en remarquant que

$$\sum_{p=1}^N v_p = n$$

Cependant Q et Q_λ ne peuvent posséder simultanément des propriétés extensives normales, à moins de redéfinir le zéro en énergie en soustrayant de \mathcal{H} l'énergie de l'état ferromagnétique de spin $N/2$, auquel cas les deux fonctions de partition en question coïncident.

Le potentiel répulsif $\log |e^p - e^q|$ prend des valeurs des deux signes et par conséquent le théorème de Lee et Yang [6] sur les zéros de $Q(Z)$ ne peut être invoqué. Cependant nous allons voir que ces zéros ont pour module 1, lorsque $\beta = 0, 2, 4$ et très probablement pour $\beta = 1$.

a) Les cas $\beta = 0, 2$ sont évidents : d'après (55) $Q(0) = (1 + Z)^N$; c'est un cas limite de confluence des racines.

$$Q(2) = \frac{1 - Z^{N+1}}{1 - Z};$$

la densité de zéros est uniforme sur le cercle $|Z| = 1$. Les racines sont simples.

b) Le cas $\beta = 4$ relève du théorème de Polya-Szégő sur les zéros des polynômes trigonométriques à coefficients monotones (Szégő, Orthogonal Polynomials, § 6.4) [7].

En effet, d'après la remarque $Q_n(\beta) = Q_{N-n}(\beta)$ on peut écrire en posant $Z = e^{it}$

$$Q(\beta) = 2 e^{iNt/2} \sum_{n=0}^{[N/2]} Q_n(\beta) \cos\left(\frac{N}{2} - n\right)t \quad (69)$$

on a évidemment $Q_n(\beta) > 0$ et, pour $n \leq N/2$ en vertu des formules (55),

$$\frac{Q_n(4)}{Q_{n-1}(4)} = \frac{2n-1}{N} < 1. \quad (70)$$

La suite $Q_n(4)$ ($1 \leq n \leq N/2$) est décroissante et par conséquent en vertu du théorème de Polya-Szégő les zéros de $Q(4)$ sont sur le cercle unité, simples et répartis avec une densité asymptotiquement uniforme ($N \rightarrow \infty$) sur tout le cercle; ce qui rejoint le cas $\beta = 2$. Par contre on ne peut rien conclure du théorème de Polya-Szégő pour $Q(1)$ car en ce cas, on a les inégalités

$$\frac{Q_n(1)}{Q_{n-1}(1)} \geq 1 \quad \left(n \leq \frac{N}{2}\right) \quad (71)$$

qui sont d'ailleurs celles de la *stabilité thermodynamique* des systèmes usuels.

c) $\beta = 1$. Nous restreignant aux systèmes à un nombre impair de particules mobiles, nous avons le résultat suivant.

6.1 PROPOSITION III. — La grande fonction de partition du système impair

$$Q_{\text{imp}}(1) = \sum_{v=0}^{M-1} Z^{2v+1} Q_{2v+1}(1); \quad N = 2M$$

a ses zéros non nuls sur le cercle $|Z| = 1$, aux angles θ_λ et $\theta_\lambda + \pi$, avec

$$\theta_\lambda = -\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda\pi}{2M}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, M-1. \quad (72)$$

Là encore, les zéros sont simples et à densité uniforme sur deux arcs symétriques $[\pi/4, 3\pi/4]$ et $[-\pi/4, -3\pi/4]$.

La preuve repose sur une identité de Gauss citée par Szégő (Orthogonal Polynomials § 2.7) [7].

$$\sum_{v=0}^{M-1} u^v \frac{(q^M - q)(q^M - q^2) \dots (q^M - q^v)}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^v)} = \prod_{\lambda=1}^{M-1} (1 - q^\lambda u) \quad (73)$$

il suffit de choisir

$$q = e^{i\pi/M} \quad \text{et} \quad u = iZ^2 \quad (74)$$

pour mettre l'expression (73) sous la forme

$$\sum_{v=0}^{M-1} Z^{2v} \prod_{j=1}^v \cotg \frac{j\pi}{2M} = \prod_{\lambda=1}^{M-1} (1 - Z^2 e^{i\pi/2 + i\pi\lambda/M}) \quad (75)$$

ce qui prouve la proposition III.

Nous n'avons pu montrer un résultat analogue pour la fonction complète $Q(1)$ faute d'avoir une formule de Gauss portant sur les puissances impaires de q . La forme de Q_n et la limite $N \rightarrow \infty$ laissent penser qu'il existe une fonction interpolante entre Q_n et Q_{n+1} analogue à une fonction Béta d'Euler; mais existe-t-il une généralisation de la formule de Gauss avec un coefficient du type

$$\left[\begin{matrix} N \\ v \end{matrix} \right]_\rho = \frac{(q^{N+\rho} - 1)(q^{N-1+\rho} - 1) \dots (q^{N-v+1+\rho} - 1)}{(q^{v+\rho} - 1)(q^{v+\rho-1} - 1) \dots (q^{1+\rho} - 1)}; \quad (76)$$

nous ne le savons pas.

Cependant la limite thermodynamique pour $\beta = 1$, est la même pour le système pair, le système impair, ou le système complet, en vertu de (62). Si l'on calcule la pression et la densité du système grand canonique par les formules

$$\begin{aligned} \beta p &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Q(\beta) \\ \rho &= Z \frac{\partial(\beta p)}{\partial Z} \end{aligned} \quad (77)$$

on obtient évidemment le résultat (62) pour l'énergie libre

$$F = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{\beta} \log Z \quad (78)$$

du système impair. Une conjecture de distribution uniforme des zéros de Q sur les arcs $[\pi/4, 3\pi/4]$

et symétrique, donnera aussi le résultat (62) ; en effet, dans une telle hypothèse

$$\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\lambda} \frac{Z}{Z - e^{i\theta\lambda}} = \frac{1}{i\pi} \log \frac{1 + iZ^2}{1 - iZ^2}; \quad (79)$$

c'est-à-dire

$$Z^2 = \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2},$$

et par conséquent

$$F = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \log Z \, d\rho = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^{\pi\rho/2} \log(\operatorname{tg} x) \, dx, \quad (80)$$

résultat identique à (62).

Signalons pour terminer ce paragraphe sur les zéros, le résultat suivant que nous n'avons pu exploiter.

Les zéros du polynôme

$$\prod_{n=0}^N Q_n(1) Q_{n+1}(1) Z^n \quad Q_0 \equiv Q_{N+1} = 1, \quad (81)$$

sont répartis avec une densité constante sur le demi-cercle $\Re Z < 0$.

7. Une transition solide-liquide. — Les résultats précédents (voir Fig. 1) sur les zéros de $Q(Z)$ et leur distribution asymptotique sont suffisants pour déter-

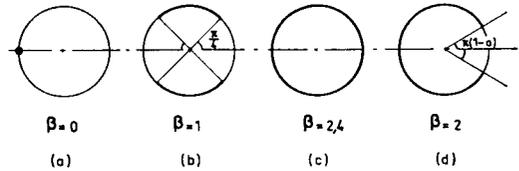


FIG. 1. — Distribution des zéros de K pour diverses valeurs de la température inverse β dans le modèle coulombien a) b) c) et dans le modèle du paragraphe 8 [Fig. d)].

miner les isothermes $\beta = 0, 1, 2, 4$ mais ne se laissent pas facilement interpoler. On peut conjecturer que les zéros sont simples et sur le cercle $|Z| = 1$ pour $\beta > 0$. On peut aussi conjecturer que leur densité est uniforme sur tout le cercle pour $\beta \geq 2$, puisqu'elle l'est pour $\beta = 2$ et $\beta = 4$. Dans toute cette région de température, cette propriété pourrait résulter tout simplement d'inégalités du genre $Q_n < Q_{n-1}$ ($n \leq N/2$). Dans la région $\beta < 2$, le mouvement des zéros semble compliqué. Entre $\beta = 2$ et $\beta = 1$, on pourrait imaginer que la distribution reste uniforme sur deux arcs symétriques $[\alpha, \pi - \alpha]$ et $[-\alpha, -\pi + \alpha]$ avec $\alpha = 0$ pour $\beta = 2$ et $\alpha = \pi/4$ pour $\beta = 1$. Une interpolation linéaire dans cet intervalle donnerait pour la pression

$$\beta p = \int_{(2-\beta)\pi/4}^{(2+\beta)\pi/4} \log(Z - e^{i\theta}) \frac{d\theta}{\pi\beta} + \int_{-(2+\beta)\pi/4}^{-(2-\beta)\pi/4} \dots \quad (82)$$

c'est-à-dire, après un calcul facile,

$$Z^2 = \frac{\sin \frac{\pi\beta\rho}{2}}{\sin \frac{\pi\beta}{2} (1 - \rho)} \quad (83)$$

et l'isotherme

$$\beta p = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi\beta}{2} \int_0^\rho \frac{x \, dx}{\sin \frac{\pi\beta x}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} (1 - x)}, \quad 1 \leq \beta \leq 2. \quad (84)$$

Nous verrons cependant plus loin que cette hypothèse d'interpolation conduit à un résultat inacceptable.

En ce qui concerne l'intervalle $0 < \beta < 1$, il est plus difficile d'imaginer le mouvement des deux secteurs symétriques venant se confondre au point $Z = -1$. Pour comprendre la séparation de la racine multiple $Z = -1$ au voisinage de $\beta = 0$, calculons par perturbation Q pour obtenir, au premier ordre en β

$$Q \propto (1+Z)^{N-2} \left(1 + Z^2 + 2Z - \frac{\beta Z}{2} N \log N \right). \quad (85)$$

Sous cette forme, l'ordre des limites, β petit, puis N grand, ne peut être interverti. Pour en tirer une infor-

mation à la limite thermodynamique, nous remarquons qu'il s'agit probablement du développement d'un terme

$$(1 + Z)^{N-2} (1 + Z^2 + 2ZN^{-\beta N/4}) \quad (86)$$

on voit que si β est seulement de l'ordre de $1/N$, deux racines sont déjà envoyées en $Z = \pm i$. On peut alors imaginer que, dans l'intervalle $0 < \beta < 1$, le secteur angulaire $[\alpha, \pi - \alpha]$, avec $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, et le secteur symétrique coexistent avec une racine multiple en $Z = -1$, dont l'ordre décroîtrait de N à 0 lorsque α décroît de $\pi/2$ à $\pi/4$. D'autres hypothèses sont possibles.

Quel que soit le mouvement de la distribution des

zéros de Q dans l'intervalle $1 \leq \beta \leq 2$, cette distribution est asymptotiquement uniforme sur le cercle complet $|Z| = 1$ pour $\beta = 2$; et pour $\beta = 1$ elle est uniforme sur les deux arcs $[\pi/4, 3\pi/4]$, $[-\pi/4, -3\pi/4]$ on en conclut :

7.1 PROPOSITION IV. — Le système subit une transition à une température β_c telle que $1 \leq \beta_c \leq 2$.

On peut considérer cette transition comme une transition solide-liquide (ou gaz). En effet Dyson a montré dans le cas continu — ce qui équivaut à une limite de basse densité pour le gaz discret — que le système coulombien à une dimension était caractérisé par un ordre à longue distance semblable à celui d'un cristal. La fonction de corrélation à deux particules possède un terme oscillant dont la période est la distance moyenne entre voisins. Bien que cette période soit uniquement déterminée par la densité et ne dépende pas du potentiel entre voisins comme dans un véritable solide, nous appelons la phase $\beta > \beta_c$: phase solide. La fonction de corrélation peut être calculée aisément pour $\beta = 2$ (elle peut l'être aussi pour $\beta = 1$ et 4) ; on trouve

$$R(p_1 - p_2) = \rho^2 - \frac{\sin^2 \rho \pi (p_1 - p_2)}{\pi^2 (p_1 - p_2)^2} \quad (87)$$

à la limite thermodynamique ; $|p_1 - p_2|$ est la distance de deux particules en nombre de mailles du réseau. Par exemple pour $\rho = \frac{1}{2}$, la probabilité atteint son maximum ρ^2 pour $|p_1 - p_2| = 2, 4, 6, \dots$

Pour $\beta = 2$, la pression grand canonique est nulle ; dans l'intervalle $0 \leq \rho < 1$ de même pour $\beta = 4$. En effet, une distribution uniforme de zéros de $Q(Z)$ sur tout le cercle nous donne

$$\beta p = \int_{-\pi}^{+\pi} \log(Z - e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \quad \beta = 2, 4, \quad (88)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} p = 0 & 0 \leq \rho < 1 \\ p \geq 0 & \rho = 1. \end{cases} \quad (89)$$

On peut penser qu'il en est de même dans toute la région $\beta \geq 2$.

Une première idée serait de supposer $\beta_c = 2$. En effet, nous avons déjà noté que la raison des isothermes triviales $p = 0, 0 < \rho < 1$, réside dans les inégalités

$$Q_n \leq Q_{n-1}, \quad [n \leq N/2].$$

Or, pour $\beta = 2$, nous avons d'après (55) $Q_n(1) = 1$, c'est-à-dire les égalités sont atteintes partout. On peut conjecturer que les inégalités seront toutes renversées pour $\beta < 2$, assurant la stabilité thermodynamique du système, et la pression sera alors la dérivée $\rho^2(\partial F/\partial \rho)$ de l'énergie libre comme en $\beta = 1$, donc une fonction *a priori* non nulle. Du point de vue de la distribution des zéros, l'hypothèse la plus grossière que nous avons faite plus haut est d'admettre l'ouverture des arcs de condensation au voisinage de $Z = 1$, pour $\beta = 2 - 0$. Dans une telle hypothèse, la pression serait donnée par la formule (84). Posant $\beta = 2 - \tau, \tau > 0$ on en déduirait pour l'énergie moyenne par particule juste au-dessus du point critique

$$U(\tau) = \frac{1}{4\rho} \log\left(\frac{2 \sin \pi \rho}{\pi \tau}\right) + \dots \quad \tau = \beta_c - \beta \ll \rho. \quad (90)$$

Or, il est possible de calculer exactement l'énergie moyenne par particule à $\beta = 2$, connaissant la fonction de corrélation d'ordre 2.

$$\begin{aligned} U(2) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\log Q_n(\beta)}{n} \right)_{\beta=2} \\ &= \lim \frac{1}{n!} \frac{1}{N^n} \sum_{\{p_i\}} |A^2| \left(- \frac{n(n-1)}{2} \log |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \frac{n}{2} \log N \right) \\ &= - \frac{1}{2n} \sum_{p_1 \neq p_2} \left[\frac{n^2}{N^2} - \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2 \frac{(p_1 - p_2) \pi n}{N}}{\sin^2 \frac{(p_1 - p_2) \pi}{N}} \right] \log |\varepsilon^{p_1} - \varepsilon^{p_2}| - \frac{1}{2} \log N \quad (91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \left(\frac{n}{2n} \log N - \frac{1}{2} \log N - \frac{1}{Nn} \sum_{p=1}^{[N/2]} \frac{\sin^2 \frac{p\pi n}{2}}{\sin^2 \frac{\pi p}{N}} \log \left(2 \sin \frac{p\pi}{N} \right) \right) \\ U_n(2) &= + \frac{N^{[N/2]}}{n} \sum_{p=1} \frac{\sin^2 \frac{p\pi n}{N}}{N^2 \sin^2 \frac{\pi p}{N}} \log \left(2N \sin \frac{p\pi}{N} \right). \quad (92) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit la limite thermodynamique

$$U(2) = + \frac{1}{\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi p \rho}{\pi^2 p^2} \log(2 \pi p) > 0. \quad (93)$$

La formule (90) introduit une discontinuité infinie de l'énergie pour $\beta = 2$ qui semble invraisemblable. Il faut donc abandonner l'interpolation simpliste qui conduisait à l'expression (84) pour la pression et nous en tenir à l'existence probable d'une transition du premier ordre dans la région $1 < \beta_c \leq \beta \leq 2$.

Signalons enfin que dans la région de basse température $\beta > 2$, il reste à comprendre la signification de la singularité de l'énergie libre en fonction de la densité. Par exemple $(\partial^2 F(4))/(\partial \rho^2)$ est discontinue pour $\rho = \frac{1}{2}$. Il est probable qu'il en soit de même pour $(\partial^2 F(\beta))/(\partial \rho^2)$, en $\rho = 2/\beta$ d'après (64). Cette singularité se retrouvera sans doute dans l'expression de l'énergie et de la fonction de corrélation qui peuvent aussi être calculées en $\beta = 4$.

8. Une généralisation analogue au modèle d'Anderson. — L'inconvénient des modèles coulombiens non neutres, tel celui que nous venons d'étudier, est évidemment l'absence des propriétés extensives normales qui caractérisent les systèmes dont le potentiel interparticule est à portée finie. Cependant si l'on cherche à construire un modèle dont le potentiel conserve l'allure coulombienne à courte distance mais soit écranté, on a décroissance rapide à longue distance, les difficultés de solution deviennent considérables. Au lieu du fameux triplet d'isotherme $\beta = 1, 2, 4$, il n'en reste qu'une seule qui soit accessible, $\beta = 2$. Un tel modèle avait déjà été considéré par l'auteur pour un gaz répulsif unidimensionnel [8], avec le potentiel

$$V(x_1 - x_2) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{a^2}{(x_1 - x_2)^2} \right) \quad (94)$$

qui, à une dimension, est un bon potentiel répulsif, coulombien à courte distance, intégrable à longue

distance. Toutes les propriétés d'équilibre de ce système sont connues sur le seul isotherme $\beta = 2$. Il n'est pas difficile de traiter la *lattice gas* correspondant, mais cette extension ne présente pas plus d'intérêt que le modèle continu. Par contre, une généralisation existe conduisant à un gaz discret attractif intéressant : le potentiel est le suivant

$$V(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{a^2}{(p_1 - p_2)^2} \right) \quad |p_1 - p_2| = 1, 2, 3, \dots \quad (95)$$

où p_1 et p_2 sont les coordonnées entières des particules sur le réseau linéaire périodique, et a est un paramètre

$$0 < a < 1. \quad (96)$$

Le paramètre a permet un dosage relatif de la partie attractive à courte distance. L'intérêt de ce potentiel est d'abord de fournir une grande fonction de partition dont les zéros auront tous même module (Théorème de Lee et Yang) ; ensuite de décroître à l'infini en $(p_1 - p_2)^{-2}$ et par conséquent d'avoir le même intérêt que le modèle d'Anderson [9] dans la question de l'existence d'une transition [10] et d'un effet Toulouse [11], [12] associé. Si la thermodynamique du modèle construit sur le potentiel (95) était connue au voisinage de la température nulle, celle du modèle d'Anderson le serait aussi ; en effet

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta V(p_1 - p_2) = - \frac{\beta_1}{(p_1 - p_2)^2} \quad a^2 \beta = \beta_1. \quad (97)$$

Etant donné la décroissance rapide du potentiel, il sera indifférent pour la thermodynamique de choisir des conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire de placer les N sites sur un cercle. (Cette équivalence a été prouvée dans le cas répulsif [8], la preuve serait analogue dans le cas discret attractif.) Le potentiel N -périodique sera

$$V_N(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(p + kN) = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{a\pi}{N}}{\sin^2 \frac{p\pi}{N}} \right) \quad |p| = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (98)$$

$V_N(p)$ tend uniformément vers $V(p)$ sur tout intervalle.

La fonction de partition s'écrira

$$Q_n(\beta) = \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n \leq N} \exp \left(- \beta \sum_{i < j} V_N(p_i - p_j) \right) \quad (99)$$

ou encore

$$Q_n = \frac{1}{n!} \sum_{\{p\}} \prod_{i < j} \left[\frac{(e^{p_i} - \varepsilon^{p_j})(\varepsilon^{p_j} - e^{p_i}) \zeta}{(e^{p_i} - \zeta e^{p_j})(\varepsilon^{p_j} - \zeta e^{p_i})} \right]^{\beta/2} \quad (100)$$

après avoir posé

$$\varepsilon = e^{2\pi i/N}, \quad \zeta = e^{2\pi i a/N}. \quad (101)$$

A l'aide de l'identité de Cauchy, on obtient donc

$$Q_n(\beta) = \frac{1}{n!} (1 - \zeta)^{n\beta/2} \sum_{(p)} \det \left| \frac{1}{1 - \zeta e^{(p_j - p_i)}} \right|_n^{\beta/2}. \quad (102)$$

L'espoir d'évaluer ces sommes pour les valeurs $\beta =$ entier pair est très faible. Le cas $\beta = 4$ a résisté à tous nos efforts. Pour $\beta = 2$, le problème est trivial ; la grande fonction de partition s'écrit, d'après (102)

$$Q(2) = \det \left| \delta_{p-q} + Z \frac{1 - \zeta}{1 - \zeta e^{(p-q)}} \right|_N = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + Z \frac{1 - \zeta}{1 - \zeta^N} \cdot \zeta^n \right) \quad (103)$$

ou encore

$$Q(2) = \prod_k \left(1 + Z \frac{N \sin \frac{\pi a}{N}}{\sin \pi a} e^{(2\pi i a k)/N} \right), \quad (104)$$

$$k \in \left\{ -\frac{N-1}{1}, -\frac{N-3}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \right\}.$$

Les zéros de $Q(2)$ sont asymptotiquement situés sur le cercle de rayon $r = \frac{\sin \pi a}{\pi a} < 1$, et répartis avec une densité uniforme sur l'arc

$$[\pi(1-a), -\pi(1-a)], \quad 0 < a < 1.$$

On déduit de (104) l'équation de l'isotherme $\beta = 2$,

$$2p = \pi a \sin \pi a \int_0^p \frac{x dx}{\sin(\pi a x) \cdot \sin \pi a(1-x)}. \quad (105)$$

Le paramètre a , joue ici le rôle que jouait $\beta/2$ dans notre interpolation (84). C'est d'ailleurs l'exemple ci-dessus de condensation des racines à densité uniforme sur un arc variable qui nous avait fait considérer comme non absurde l'interpolation tentée au paragraphe 7, mais sans succès. Il est notable que dans tous les cas exactement résolus de cette étude, la densité de zéros ait été trouvée asymptotiquement constante

sur un arc de cercle. Cependant nos résultats sont encore trop fragmentaires pour être extrapolés valablement.

Remerciements. — Je remercie J. des Cloizeaux pour des discussions utiles et une lecture critique du manuscrit.

Bibliographie

- [1] DYSON, F. J., *J. Math. Phys.* **3** (1962) 140, 157, 166.
- [2] WILSON, K. G., *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1040.
- [3] GUNSON, J., *J. Math. Phys.* **3** (1962) 752.
- [4] MEHTA, M. L. et GAUDIN, M., *Nucl. Phys.* **18** (1960) 420.
- [5] MEHTA, M. L., *Nucl. Phys.* **18** (1960) 395.
- [6] LEE, T. D. et YANG, C. N., *Phys. Rev.* **87** (1952) 410.
- [7] SZEGO, G., *Orthogonal Polynomials* (1939), Am. Math. Soc.
- [8] GAUDIN, M., *Nucl. Phys.* **85** (1966) 545-575.
- [9] ANDERSON, P. W., YUVAL, G. et HAMANN, D. R., *Phys. Rev.* **1B** (1970) 4464.
- [10] RUELLE, D., *Commun. Math. Phys.* **9** (1968) 267.
- [11] THOULESS, D. J., *Phys. Rev.* **187** (1969) 732.
- [12] DYSON, F. J., *Commun. Math. Phys.* **21** (1971) 269.
- [13] GOOD, I. J., *J. Math. Phys.* **11** (1970) 1884.

L'isotherme critique d'un plasma sur réseau ($\beta = 2, d = 2, n = 2$)

M. Gaudin

Service de Physique Théorique, CEN Saclay, 91190 Gif sur Yvette, France

(Reçu le 24 janvier 1985, accepté le 27 février 1985)

Résumé. — On détermine exactement l'équation d'état, à la température critique de collapsus, d'un plasma neutre bidimensionnel à deux composantes où les charges sont astreintes à occuper les sites d'un réseau périodique comme dans un cristal ionique. Les singularités de l'isotherme, à la densité nulle et à la densité maximale, sont explicitées et la longueur de corrélation est calculée à la limite de basse densité.

Abstract. — The equation of state of a two-component bidimensional neutral plasma on a lattice is calculated exactly at the critical temperature of collapse. The singularities of the isotherm, at zero and maximal density, are given explicitly and the correlation length is given in the low density limit.

1. Définition du modèle.

On considère à nouveau le modèle de plasma bidimensionnel à deux composantes, très étudié il y a une décade en particulier par Deutsch et Lavaud [1], où certaines techniques déjà appliquées aux systèmes de charges sur une droite ou un cercle permettaient d'atteindre des résultats exacts à deux dimensions, pour la température inverse $\beta = 2$ [2]. Cette valeur de la température est critique pour le système à deux composantes avec potentiel d'interaction logarithmique, qui n'existe comme plasma que dans le domaine $\beta < \beta_c = 2$. A cette valeur frontière, les propriétés du plasma sont masquées par le phénomène de collapsus ou fusion des paires de charge opposée si l'on néglige le rayon de la molécule neutre, qui constitue la distance minimum d'approche. Il est alors naturel de revenir à un modèle discret où les charges sont localisables sur les sites d'un réseau, dans une situation semblable à celle du système des charges d'un cristal ionique dans un plan réticulaire.

Le système étant de dimension 2, il est commode de repérer la position des particules par leur affixe dans le plan complexe \mathbb{C} , soient $\{x_j\}$ et $\{y_j\}$ $j = [1, N]$, pour les charges $+1$ et -1 respectivement, où les coordonnées varient dans le domaine rectangulaire (S)

$$(S) : \quad -\frac{A}{2} < \text{Re } x < \frac{A}{2}, \quad -\frac{B}{2} < \text{Im } x < \frac{B}{2}; \text{ etc...} \tag{1}$$

dont la surface est AB .

L'énergie potentielle d'une configuration $\{x, y\}$ est donc

$$V(x, y) = - \sum_{i < j} \left(\log \frac{|x_i - x_j|}{a} + \log \frac{|y_i - y_j|}{a} \right) + \sum_{i, j} \log \frac{|x_i - y_j|}{a}, \tag{2}$$

où a désigne une longueur caractéristique de la portée du potentiel à deux corps. Si le système était polarisé par un champ électrique externe constant $h \in \mathbb{C}$, l'énergie potentielle supplémentaire serait $\text{Re } \bar{h} (\sum x_j - \sum y_j)$, où la notation \bar{h} désigne le complexe conjugué de h .

Dans son domaine d'existence, la fonction de partition de ce système thermodynamique à la température inverse β , s'écrit

$$Q_{2N}(\beta) = \frac{1}{(N!)^2} \int_{(S)} e^{-\beta V} \prod_j d\mu(x_j) d\mu(y_j) \tag{3}$$

où $d\mu(x)$ est l'élément de surface

$$d\mu(x) = d(\text{Re } x) \wedge d(\text{Im } x) = \frac{1}{2i} d\bar{x} \wedge dx. \tag{4}$$

Moyennant l'expression (2) du potentiel, on a encore

$$Q_{2N}(\beta) = \frac{a^{\beta N}}{(N!)^2} \int_{(S)} \left(\frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j| |y_i - y_j|}{\prod_{i,j} |x_i - y_j|} \right)^\beta \prod d\mu(x) d\mu(y). \tag{5}$$

Il est évident que le second membre n'existe que pour $\beta < 2$. Pour $\beta = 2$, l'intégrale de configuration présente des divergences logarithmiques en $x_i - y_j = 0$. Le potentiel attractif entre charges opposées n'est pas borné inférieurement et à température suffisamment basse le système n'est qu'une assemblée de molécules neutres sans interaction. La température $\beta_c = 2$ constitue une valeur critique frontière et c'est cependant pour une telle valeur que l'on pouvait espérer une détermination exacte de l'isotherme.

Pour éviter le collapsus il suffit d'introduire une distance minimum d'approche entre les charges; par exemple en localisant celles-ci sur les sites d'un réseau quadratique comme dans le modèle du fluide discret (ou lattice gas). Si l'on s'en tenait là, on aurait l'équivalent d'un modèle d'Ising avec interaction

logarithmique. Pour que le modèle soit soluble, il faut encore une restriction et localiser chaque type de charge sur chacun des deux sous-réseaux contigus du réseau quadratique donné. D'où la définition modifiée du système, constitué d'un réseau cristallin quadratique diatomique, les sites d'un des sous-réseaux appelé X ($x \in X$) occupés par des atomes ionisables positivement, les sites du sous-réseau complémentaire Y ($y \in Y$) ionisables négativement, le cristal restant neutre, la situation physique du réseau étant comparable à celle d'un plan principal du cristal ionique ClNa.

On choisira pour repérer les sites de X, les coordonnées à valeur entière paire, et pour Y les valeurs entières impaires :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\omega m + i\omega' n) = (m + i n\tau^{-1}) \frac{\omega}{2} \quad m, n \text{ pairs} \\ y &= \frac{1}{2}(\omega m + i\omega' n) = (m + i n\tau^{-1}) \frac{\omega}{2} \quad m, n \text{ impairs.} \end{aligned} \tag{6}$$

où la maille élémentaire d'un sous-réseau est un rectangle de côtés ω et $\omega' = \tau^{-1} \omega$ (pour un réseau à maille carré $\tau = 1$). Cependant le fait de traiter le cas $\tau \neq 1$ a l'intérêt de briser la symétrie quaternaire du réseau complet. Par commodité on définit le domaine (S) par les inégalités

$$-M \leq m, n \leq M \tag{7}$$

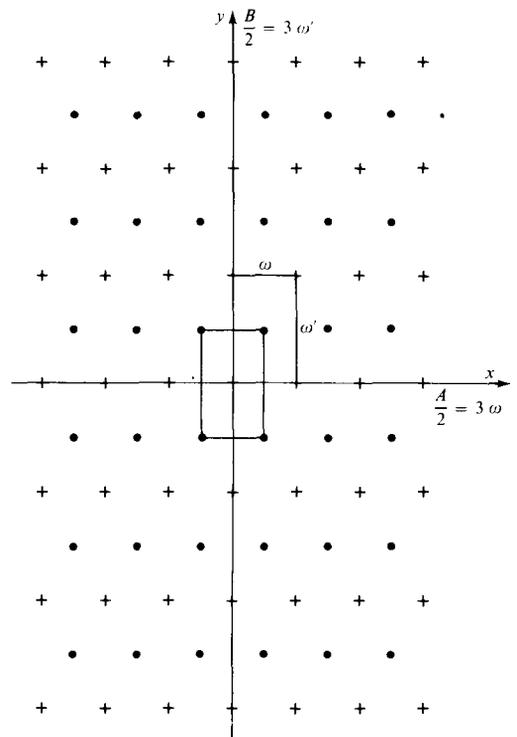
ce qui a l'inconvénient d'introduire un effet de bord, la frontière appartenant entièrement à l'un des sous-réseaux qui contient $(M + 1)^2$ sites, et l'autre seulement M^2 . On espère que les propriétés extensives n'en soient pas altérées. On aurait pu aussi définir nos deux sous-réseaux par les conditions

$$X : (m + n) \text{ pair}; \quad Y : (m + n) \text{ impair} \tag{8}$$

qui aurait l'avantage de conserver la symétrie +, - sur les bords.

Entre les dimensions A et B de (S) et la longueur ω on a les relations $A = M\omega, B = M\tau^{-1} \omega, \tau^{-1} = B/A$. Le choix (6) donne $M^2 + (M+1)^2 = 2M^2 + 2M + 1$ sites et le choix (8) le double moins un, soit $(2M+1)^2$. La maille ω, ω' est celle du sous-réseau dans le premier cas et du réseau complet dans le second.

La figure montre les deux sous-réseaux pour $M = 6$ et $\tau^{-1} = \sqrt{3}$.



2. La grande fonction de partition comme déterminant de Toeplitz. avec

$$A_N = \left| \frac{1}{x_i - \bar{y}_j} \right|_N \tag{10}$$

D'après (5), la fonction de partition du modèle discret pour $\beta = 2$ s'écrit simplement

$$Q_{2N} = \frac{a^{2N}}{(N!)^2} \sum_{\substack{\{x\} \in X \\ \{y\} \in Y}} \Delta_N \bar{\Delta}_N \tag{9}$$

où l'on a utilisé une identité due à Cauchy, après avoir effectué le changement de variables $y \rightarrow \bar{y}$ qui laisse invariant le domaine (S). On peut ensuite écrire le carré du module de Δ_N comme un déterminant d'ordre $2N$:

$$\Delta_N \bar{\Delta}_N = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_i - \bar{y}_j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{x}_i - y_j} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x_i - \bar{y}_j} \\ \frac{1}{y_i - \bar{x}_j} & 0 \end{vmatrix}_{2N} \tag{11}$$

qui est celui d'une matrice anti-hermitique K d'éléments

$$K(z_i - \bar{z}_j) = \begin{cases} \frac{a}{z_i - \bar{z}_j} & \text{si } z_i \in X \text{ et } \bar{z}_j \in Y \\ 0 & \text{ou } z_i \in Y \text{ et } \bar{z}_j \in X. \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{12}$$

Si l'on introduit la grande fonction de partition $Z(\lambda)$

$$Z(\lambda) = \sum_{N=0}^{M^2} \lambda^{2N} Q_{2N}, \tag{13}$$

qui est un polynôme de degré $2M^2$ dans la fugacité λ , le second membre de (13) n'est autre que le développement suivant la diagonale principale du déterminant $|1 + \lambda K|$ d'ordre $2M^2 + 2M + 1$

$$Z(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda a}{x - \bar{y}} \\ \frac{\lambda a}{y - \bar{x}} & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda a)^2 \sum_{x,y} -\frac{1}{x - \bar{y}} \cdot \frac{1}{y - \bar{x}}$$

$$+ (\lambda a)^4 \sum_{\substack{x_1 < x_2 \\ y_1 < y_2}} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x_1 - \bar{y}_1} & \frac{1}{x_1 - \bar{y}_2} \\ \frac{1}{x_2 - \bar{y}_1} & \frac{1}{x_2 - \bar{y}_2} & 0 \\ \frac{1}{y_1 - \bar{x}_1} & \frac{1}{y_1 - \bar{x}_2} & 0 \\ \frac{1}{y_2 - \bar{x}_1} & \frac{1}{y_2 - \bar{x}_2} & 0 \end{vmatrix} + \dots \tag{14}$$

(la notation $x_1 < x_2$ suppose qu'on a défini un ordre lexicographique des points du réseau; si on lève cette restriction dans la sommation, il faut compenser par le facteur $1/(N!)^2$ en tête de Q_{2N}).

La matrice $K(z - \bar{z})$ peut être considérée comme une extension à deux dimensions des matrices de Toeplitz, ou de Hankel :

$$K(z - \bar{z}) = K(m - m' + i(n + n') \tau^{-1}) \tag{15}$$

avec

$$-M \leq m, m', n, n' \leq M,$$

les éléments n'étant non-nuls que si $m - m'$ et $n + n'$ sont impairs.

Notre intention est de calculer l'éventuelle limite thermodynamique définissant la pression à $\beta = 2$

$$\beta p = \lim \frac{\log Z}{AB} = \frac{1}{\omega^2 \tau^{-1}} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \log Z. \tag{16}$$

Il nous faut donc évaluer le comportement asymptotique du « déterminant de Toeplitz » $|1 + \lambda K|$.

S'il s'agissait du problème unidimensionnel corres-

pondant (toujours avec le potentiel logarithmique) on aurait le noyau réel antisymétrique $K(m - m') = a/(m - m')$. Même en ce cas, il ne relève pas directement des théorèmes de Szegő [3] sur le spectre des formes de Toeplitz; il manque une hypothèse de positivité. Voyons cependant comment les choses fonctionnent dans ce cas simple, sans prétendre à la rigueur. On introduit la série de Fourier

$$f(q) = \sum_m K(m) e^{imq}, \quad -\pi \leq q < \pi \quad (17)$$

avec $K(m) = a/m$ pour m impair, et zéro autrement. On a $f(q) = \frac{i\pi a}{2} \epsilon(q)$. On aimerait montrer la validité de la formule asymptotique

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \log |\delta(m - m') + \lambda K(m - m')|_{2M+1} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq \log(1 + \lambda f(q)) \quad (18) \end{aligned}$$

pourvu que la fonction $1 + \lambda f(q)$ ne s'annule pas sur l'intervalle d'intégration, $\forall \lambda > 0$. (Une telle formule résulterait de ce que le spectre de K , de dimension finie, soit asymptotiquement donné par une indexation uniforme de la variable q du genre $Mq \sim n\pi$). Le théorème de Szegő n'est directement applicable que si $1 + \lambda f(q)$ est réel, positif et continu; or $f(q)$ est imaginaire et discontinu. Il est alors naturel de faire intervenir le carré du noyau :

$$(m_1 | K^2 | m_2) = \sum_{m=-M}^{+M} \frac{1}{m_1 - m} \frac{1}{m - m_2} \quad (19)$$

(m_1 et m_2 de même parité; $m - m_1$ impair). On obtient

a) $m_1 = m_2$

$$\begin{aligned} -(m_1 | K^2 | m_1) &= \sum_1^{M-m_1} \frac{1}{m^2} + \sum_1^{M+m_1} \frac{1}{m^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}^2 - m_1^2} + (m_1 | O_M | m_1) \quad \tilde{M} = M + 1. \end{aligned} \quad (20)$$

b) $m_1 \neq m_2$.

$$\begin{aligned} (m_1 | K^2 | m_2) &= \frac{1}{2} \frac{1}{m_1 - m_2} \left(\log \frac{\tilde{M} + m_1}{\tilde{M} - m_1} - \right. \\ &\quad \left. - \log \frac{\tilde{M} + m_2}{\tilde{M} - m_2} \right) + (m_1 | O_M | m_2). \end{aligned} \quad (21)$$

O_M désigne un reste vérifiant uniformément

$$|(m_1 | O_M | m_2)| \leq \frac{2}{(\tilde{M} - |m_1|)(\tilde{M} - |m_2|)} \quad (22)$$

ce qu'on prouve à l'aide de la double inégalité

$$\frac{1}{2} \log \frac{M_2 + 2}{M_1} < \sum_{m=M_1}^{M_2} \frac{1}{m} < \frac{1}{2} \log \frac{M_2 + 1}{M_1 - 1}$$

la différence entre les bornes étant inférieure à $\frac{1}{2} \frac{M_2 - M_1 + 2}{(M_1 - 1)(M_2 + 2)}$. On a donc

$$(m_1 | K^2 | m_2) = -\frac{\pi^2}{4} \delta(m_1 - m_2) + (m_1 | R | m_2) + (m_1 | O | m_2) \quad (23)$$

avec

$$(m_1 | R | m_2) = \frac{1}{2} \frac{L\left(\frac{m_1}{\tilde{M}}\right) - L\left(\frac{m_2}{\tilde{M}}\right)}{m_1 - m_2} > 0 \quad (24)$$

$$L(x) = \log \frac{1+x}{1-x}, \quad x_1 = \frac{m_1}{\tilde{M}}, \dots \quad (25)$$

et, par conséquent

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(1 + \lambda K) &= \frac{1}{2} \text{tr} \log(1 - \lambda^2 K^2) \\ &= \frac{2M+1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{4} \right) + \\ &\quad + \text{tr} \log(1 + \lambda' R + \lambda' O) \end{aligned} \quad (26)$$

avec

$$\lambda' = -\lambda^2 \left/ \left(1 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{4} \right) \right. \quad (27)$$

Il suffit maintenant de montrer $\lim M^{-1} \text{tr} \log(1 + \lambda' R + \lambda' O) = 0$; ce dont on peut se convaincre en appendice A. D'où finalement l'estimation asymptotique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2M+1} \text{tr} \log(1 + \lambda K) &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{4} \right) + \\ &\quad + O\left(\frac{\log M}{M}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

et la limite thermodynamique pour la pression, donnée par la formule naïve

$$\begin{aligned} \beta p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq \log \left(1 + \frac{i\pi a \lambda}{2} \epsilon(q) \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\lambda^2 a^2 \pi^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

enfin l'équation d'état ($\beta = 2$)

$$p = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \beta p = 1 - e^{-2\beta p} \quad (30)$$

ou

$$2p = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-p}. \quad (31)$$

On observe que cette équation est exactement celle d'un gaz discret unidimensionnel, sans autre interaction que le cœur dur simulé par le réseau, mais le facteur $1/2$ (au second membre) indique que la longueur d'exclusion est ici deux fois la maille. On interprète ceci en disant qu'à la température critique les particules effectives (les configurations de poids dominant) sont les dipôles constitués de deux charges opposées sur deux sites voisins, analogues aux molécules neutres du modèle unidimensionnel de Lenard [4]. L'absence d'interaction effective entre dipôles est probablement liée au fait que K^2 est asymptotiquement multiple de l'unité, ce qui exprime que l'effet de moyenne sur les configurations de charge d'un signe donné est d'annuler toute interaction à distance entre les particules de l'autre signe.

Signalons enfin que la structure de déterminant de la grande fonction de partition permettrait de calculer toutes les fonctions de corrélation à $\beta = 2$. Par exemple, on obtient la corrélation réduite à deux corps

$$\begin{aligned} g_{\text{réd.}}(n_1 - n_2) &\equiv - \left\langle n_1 \left| \frac{\lambda K}{1 + \lambda K} \right| n_2 \right\rangle \times \\ &\quad \times \left\langle n_2 \left| \frac{\lambda K}{1 + \lambda K} \right| n_1 \right\rangle \\ &= - \rho^2 \delta(n_1 - n_2) + \frac{4}{\pi^2} \frac{\rho(1 - \rho)}{(n_1 - n_2)^2} \times \\ &\quad \times \frac{1 - (-)^{n_1 - n_2}}{2} \quad (32) \end{aligned}$$

le second terme n'existant que si $(n_1 - n_2)$ est impair.

La corrélation totale $\rho^2 + g_{\text{réd.}}$ est bien positive, et vaut, si $n_1 \neq n_2$, ρ^2 entre charges de même signe, ou $\rho^2 + 4\rho(1 - \rho)/\pi^2(n_1 - n_2)^2$ entre charges de signe opposé.

On vérifie enfin la règle de compressibilité

$$\frac{1}{\rho} \sum_n g_{\text{réd.}}(n) = 1 - 2\rho \equiv \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial p} - 1,$$

ainsi que la règle dite d'écran parfait

$$\frac{1}{\rho} \sum_n (-)^n g_{\text{réd.}}(n) + 1 = 0.$$

Nous n'en dirons pas plus sur cet exemple à une dimension qui avait simplement pour but d'illustrer la validité probable d'un résultat de Szegő dans le cas où c'est seulement le carré de l'opérateur de Toeplitz qui est réel et de signe défini.

3. La fonction de partition du « cristal ionique » à deux dimensions.

A défaut de disposer d'une généralisation parfaitement adéquate du premier théorème de Szegő pour la matrice bidimensionnelle (15), on conjecture l'existence d'une formule analogue à (18) traduisant simplement la distribution asymptotique uniforme de la variable de Fourier q , ici un vecteur à deux composantes. On examine donc les conséquences de la formule naïve

$$\log |1 + \lambda K|_{M^2 + (M+1)^2} \sim \sum_{p,q} \log(1 + \lambda f(p, q)) \quad (33)$$

où $f(p, q)$ est le spectre continu de la matrice infinie K définie par (12) et (15), les deux indices p et q , indexant un ensemble complet de fonctions propres de K , étant discrétisés, mais uniformément distribués dans leur domaine de variation. Nous reviendrons plus loin sur la vraisemblance de cette conjecture à la lumière des théorèmes existants.

Appelons $\varphi_{p,q}(m, n)$ et $\chi_{p,q}(m, n)$ les composantes, définies respectivement sur le sous-réseau pair X pour φ et sur le sous-réseau impair Y pour χ , d'un vecteur propre courant de la matrice infinie $K(z - \bar{z})$. L'équation séculaire s'écrit

$$\begin{cases} (1 - f(p, q)) \varphi_{p,q}(m, n) + \lambda \sum_{m',n'} K(m - m' + i(n + n') \tau^{-1}) \chi_{p,q}(m', n') = 0 \\ (1 - f(p, q)) \chi_{p,q}(m, n) + \lambda \sum_{m',n'} K(m - m' + i(n + n') \tau^{-1}) \varphi_{p,q}(m', n') = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Choisissons

$$\begin{cases} \varphi_{p,q}(m, n) = \varphi_{p,q} e^{i(pm + qn)} \\ \chi_{p,q}(m, n) = \chi_{p,q} e^{i(pm - qn)}. \end{cases} \quad (35)$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} (1 - f(p, q)) \varphi_{p,q} + \lambda h(p, q) \chi_{p,q} = 0 \\ (1 - f(p, q)) \chi_{p,q} + \lambda h(p, -q) \varphi_{p,q} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

avec la définition

$$h(p, q) = \sum_{\substack{m,n \\ \text{imp.}}} K(m + in\tau^{-1}) e^{-i(pm + qn)} \quad (37)$$

$$= \frac{2a}{\omega} \sum'_{m,n} \frac{1}{m + in\tau^{-1}} e^{-i(pm + qn)}.$$

Cette transformée de Fourier est certainement définie

comme distribution vue la « croissance lente » du coefficient. Or, un théorème de L. Schwartz [5]. (Théorie des distributions ; t. II, ch. VII, formule VII-7-7) assure que la « somme » est indépendante de la façon dont elle est effectuée, la distribution étant indépendante de la manière dont elle est approchée. Nous verrons plus loin que la série double, comme somme répétée, converge vers une fonction méromorphe doublement périodique de $p + iq\tau$, ce qui est remarquable. On vérifie sur la définition (37) les propriétés de symétrie et de réalité

$$\bar{h}(p, q) = h(-p, q) = -h(p, -q). \tag{38}$$

Eliminant φ ou χ de (36), on obtient

$$(1 - f(p, q))^2 = \lambda^2 h(p, q) h(p, -q) = -\lambda^2 |h(p, q)|^2 \tag{39}$$

d'où le spectre

$$f(p, q) = 1 \pm i\lambda |h(p, q)| \tag{40}$$

avec

$$\chi_{p,q}/\varphi_{p,q} = \pm ih(p, q)/|h(p, q)|. \tag{41}$$

On a deux séries de vecteurs propres

$$\{ e^{i(pm+qn)}, \pm i e^{i(pm-qn \operatorname{Arg} h(p,q))} \} \tag{42}$$

avec la normalisation

$$2\pi^2 \delta_\pi(p - p') \delta_\pi(q - q')$$

et l'on vérifie aisément les deux relations de fermeture, à condition de choisir le domaine suivant

$$0 \leq p, q \leq \pi. \tag{43}$$

Dans l'hypothèse de distribution asymptotique uniforme

$$\left\{ \{ p, q \} \sim \left\{ \frac{r\pi}{M}, \frac{s\pi}{M} \right\} \right\}, \tag{44}$$

la formule (33) nous donne

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \log Z = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi dp dq \log(1 + \lambda^2 |h(p, q)|^2). \tag{45}$$

Le calcul explicite de la fonction h , que nous effectuons ci-dessous, rendra évidente la convergence de l'intégrale dans (45).

Calcul de $h(p, q)$:

Nous convenons de faire rentrer le facteur d'échelle $2a/\omega$ dans la définition de $\lambda(2\lambda a/\omega \rightarrow \lambda)$. Nous avons la sommation sur les seules valeurs impaires de $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} h(p, q) &= \sum_n e^{-iqn} \sum_{m>0} \left(\frac{e^{-ipm}}{m + in\tau^{-1}} + \frac{e^{ipm}}{-m + in\tau^{-1}} \right) \\ &= \sum_n \sum_{m>0} \int_0^\infty d\rho (e^{-m(\rho+ip) - in(q+\rho\tau^{-1})} - e^{-m(\rho-ip) + in(\rho\tau^{-1}-q)}). \end{aligned} \tag{46}$$

L'interversion sommation sur m , intégration sur ρ , est légitimée par la convergence normale de la somme résultante

$$\begin{aligned} h(p, q) &= \sum_n \int_0^\infty d\rho \left(\frac{e^{-in(q+\rho\tau^{-1})}}{2 \operatorname{sh}(\rho + ip)} - \frac{e^{in(\rho\tau^{-1}-q)}}{2 \operatorname{sh}(\rho - ip)} \right) \\ &= \frac{\pi\tau}{2} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} (-)^v \frac{1}{\operatorname{sh}(ip - q\tau + v\pi\tau)} \end{aligned} \tag{47}$$

où l'on a utilisé la formule de Poisson

$$\sum'_n e^{in\rho} = \pi \sum_{v \in \mathbb{Z}} (-)^v \delta(\rho - v\pi). \tag{48}$$

On peut encore écrire, en posant

$$\zeta = p + iq\tau, \tag{49}$$

$$h(\zeta) = \frac{\pi\tau}{2i} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \frac{(-)^v}{\sin(\zeta + iv\pi\tau)}, \tag{50}$$

qui converge dans tout le plan ζ vers une fonction méromorphe de périodes 2π et $2\pi i\tau$. On a précisément

$$h(\zeta) = -iK' \frac{dn\left(\frac{2K}{\pi}\zeta\right)}{sn\left(\frac{2K}{\pi}\zeta\right)} = -iK' ds\left(\frac{2K}{\pi}\zeta; k\right) \tag{51}$$

dans les notations traditionnelles de Jacobi pour les fonctions elliptiques [6] $sn(u; k)$ et $dn(u; k)$ de la

variable u et du module k , fonction du rapport des périodes $\tau = K'/K$. On a ici

$$u = \frac{2K}{\pi} \zeta = \frac{2}{\pi} (pK + iqK') \equiv \xi + i\eta. \quad (52)$$

La fonction impaire $ds(u)$ a deux pôles (et zéros)

dans le parallélogramme des périodes $4K, 4iK'$, mais la fonction $ds^2(u)$ a pour périodes $2K$ et $2iK'$ et elle prend donc deux fois toute valeur dans ce rectangle qui est justement le rectangle d'intégration ou équivalent. A l'origine $ds^2(u) \sim 1/u^2$, c'est le seul infini.

4. L'isotherme $\beta = 2$.

Les formules (16), (45) et (51) donnent la pression en fonction de la fugacité

$$\beta p = \frac{\tau}{\omega^2 \pi^2} \int_0^\pi dp \int_0^\pi dq \log \left(1 + \frac{4 \lambda^2 a^2 K'^2}{\omega^2} | ds^2(u) | \right). \quad (53)$$

On redéfinira la fugacité par le changement d'échelle

$$\lambda \rightarrow \mu = \frac{2a}{\omega} \lambda K' \quad (54)$$

et l'on prendra le côté ω de la maille comme unité de longueur. Ainsi

$$\beta p = \frac{1}{4K^2} \int_0^{2K} d\xi \int_0^{2K'} d\eta \log (1 + \mu^2 | ds^2(\xi + i\eta; k) |). \quad (55)$$

La fonction $p(\mu^2)$ est holomorphe dans le plan μ^2 coupé par $[-\infty, 0]$. On aura observé que les zéros de la grande fonction de partition sont localisés sur l'axe imaginaire $\Re \mu = 0$ comme l'indique la formule (40) : $\lambda_{p,q} = \pm i |h(p, q)|$. On donnera plus loin l'expression exacte de la densité de zéros, qui s'annule linéairement au voisinage de l'origine. Le seul fait notable est la singularité résultante en $\mu = 0$ des fonctions $p(\mu)$ et $\rho(\mu)$, ce qui justifierait de parler de point critique à pression et densité nulle.

L'équation de l'isotherme $\beta = 2$ s'obtiendrait en éliminant μ entre p et ρ

$$\rho = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \beta p = \frac{\mu^2}{2K^2} \int_0^{2K} \int_0^{2K'} \frac{d\xi d\eta}{\mu^2 + |sd^2(\xi + i\eta; k)|}, \quad (56)$$

ce qui ne semble guère faisable ni utile, sauf aux points singuliers.

On vérifie la symétrie des rôles joués par les deux longueurs ω et ω' ($\tau = \omega/\omega'$) de la maille d'un sous-réseau grâce à la transformation de Jacobi

$$| ds(\xi + i\eta; k) | \equiv | ds(\eta - i\xi; k') | \quad (57)$$

qui donne

$$\rho(\tau, \mu) = \tau^2 p(\tau^{-1}, \mu); \quad \rho(\tau, \mu) = \tau^2 p(\tau^{-1}, \mu). \quad (58)$$

Sans avoir à effectuer une intégration complète, on obtient aisément les comportements de haute et basse densité. Vérifions la limite de haute densité : D'après (56)

$$\rho_c = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \rho = \frac{1}{2K^2} \cdot 2K \cdot 2K' = 2\tau, \quad (\omega = 1) \quad (59)$$

ce qui est bien la densité limite supérieure $\rho_c = 2M^2/M\omega, M\omega' = 2\tau/\omega^2$. On précisera plus loin l'approche de ρ_c .

5. Limite de basse densité.

La singularité de l'isotherme critique à basse densité s'obtient en notant qu'elle est déterminée par les petits vecteurs d'onde $\{p, q\}$ ou $\{\xi, \eta\}$ modulo $\{2K, 2K'\}$. Avec le domaine indiqué par (56), les points d'intérêt sont les quatre coins du rectangle, il vaut mieux intégrer dans le domaine $[-K, +K]$ et $[-K', +K']$, aussi légitime que le premier du fait de la périodicité. D'après la remarque finale de la section 3, nous avons à l'origine

$$|sd^2(\xi + i\eta)| \propto \xi^2 + \eta^2,$$

et par conséquent

$$\rho \propto \frac{\mu^2}{2K^2} \iint \frac{d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \mu^2} \propto -\frac{\pi\mu^2}{2K^2} \log C\mu^2 + O(\mu^4) \quad (60)$$

où C est une constante qu'on pourrait calculer :

$$-\pi \log C = P \int_{-K}^{+K} \int_{-K'}^{+K'} \frac{d\xi d\eta}{|sd^2(\xi + i\eta)|} \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{|s| > r} \frac{d\xi d\eta}{|sd|^2} + \pi \log r^2.$$

On a pour la pression

$$\beta p = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\mu} \rho = -\frac{1}{2} \int \frac{\pi}{2K^2} d\mu^2 \log C\mu^2 + O(\mu^4) = -\frac{\pi}{4K^2} \mu^2 (\log C\mu^2 - 1) + \dots \quad (61)$$

et enfin l'équation d'état à basse densité

$$\begin{aligned} \beta p &= \frac{1}{2} \rho + \frac{\pi}{4K^2} \mu^2 + O(\mu^4) = \\ &= \frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{1}{\log \rho} \right) + O\left(\frac{\rho \log |\log \rho|}{|\log \rho|} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

On a le comportement singulier $\frac{\partial}{\partial \rho} (\beta p / \rho) \rightarrow \infty$, si $\rho \rightarrow 0$.

On note d'abord sur (62) le terme dominant $\beta p / \rho = 1/2$, qui permet encore l'interprétation du système comme gaz de molécules neutres à densité faible selon la remarque analogue pour le système unidimensionnel (cf. 31).

Le fait important est ensuite la singularité à l'origine de $p(\rho)$ dont la nature est aussi complexe que celle de la fonction $y(x)$ où $x = y \log \frac{1}{y}$. L'existence d'une singularité « faible » est attendue pour un tel système coulombien à 2 dimensions, où la théorie de Debye prévoit une correction au terme linéaire en $\rho^{d/2}$ avec $d > 2$, ce qu'on obtient soit par le traitement RPA des fluctuations de densité, soit par la resommation des chaînes de la série du viriel. Pour le système à une composante avec fond neutralisant cette dernière série donne à l'ordre ρ : $\beta p = \rho \left(1 - \frac{\beta}{4} \right)$, qui est aussi le résultat exact du modèle continu à deux composantes pour $\beta < 2$.

Enfin, la longueur de corrélation est simple à déterminer sans grand calcul puisqu'elle est définie par le pôle du « propagateur » qui intervient manifestement comme intégrant dans la densité (56) ou (60). On donne en appendice C des résultats préliminaires sur les fonctions de corrélation réduites $g_+(m, n) = \tau^{-1} g_+(r)$ entre charges de même signe, et $g_-(m, n) = \tau^{-1} g_-(r)$ entre charges de signe opposé. Dans la limite de basse densité, le comportement asymptotique (à grande

distance) serait le suivant

$$g_+(r) \propto -g_-(r) \propto -\frac{1}{4\pi l^3} \frac{1}{r} e^{-\frac{2r}{l}} \quad (63)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + \tau^{-2} n^2}, \quad (\omega = 1). \quad (64)$$

où la longueur de corrélation l est proportionnelle à la fugacité inverse

$$l = \frac{K}{\pi\mu} \quad (65)$$

et devient infinie à l'approche du point critique de densité nulle.

On remarque l'universalité de l'équation d'état et de la fonction de corrélation au voisinage du point critique ($l = \infty$) puisqu'elles sont, à l'ordre dominant, indépendantes de τ , la forme de la maille :

$$\rho \sim \frac{1}{2\pi l^2} \log \frac{Cte}{l^2}; \beta p \sim \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{4\pi l^2} + \dots \quad (66)$$

L'existence de cette singularité à l'origine, due à la ligne de zéros $\text{Re } \mu = 0$, est probablement cause de la difficulté à trouver un théorème asymptotique adéquat au noyau de Toeplitz K , et peut même jeter un doute sur la validité de la conjecture faite. L'énergie libre grand-canonique (la pression) est certes représentée par une somme convergente et les propriétés extensives attendues sont assurées. Mais la série de perturbation en puissances de λ^2 n'a pas la propriété extensive normale, comme on le voit dès le second ordre, selon (13) et (15) :

$$Q_2 = \frac{4a^2}{\omega^2} \sum_{\substack{-M < m, m' < M \\ n, n' \\ m, n \text{ pairs} \\ m', n' \text{ impairs}}} \frac{1}{(m-m')^2 + \tau^{-2}(n-n')^2} \propto 4 \cdot \frac{\pi\tau}{2} M^2 \log M. \quad (67)$$

A cet ordre, on a

$$\frac{1}{\omega^2 \tau^{-1}} \cdot \frac{1}{M^2} \log Z \propto 2 \pi \tau^2 \lambda^2 \log M \quad (68)$$

à rapprocher du terme exact de la pression

$$\beta p \propto - \pi \tau^2 \lambda^2 \log \rho + \dots \left(\rho = \frac{N\tau}{M^2} \right) \quad (69)$$

qui manifeste la même dépendance en M , mais « soustraite ».

Il existe cependant un autre argument pour conforter

le résultat obtenu à basse densité. Supposons que nous voulions déterminer la partie de basse fréquence du spectre en partant des équations séculaires (34) et passant directement à la limite continue

$$\lim \frac{m + i\tau^{-1} n}{M} = z = x + iy. \quad (70)$$

$$\lim \lambda M = \tilde{\lambda} \lim pM = \tilde{p}, qM = \tilde{q}.$$

$$\lim f_{p,q} = f_{\tilde{p},\tilde{q}} \equiv \tilde{f}. \quad (71)$$

$$\lim \varphi_{p,q}(m, n) = \varphi_{\tilde{p},\tilde{q}}(x, y) \equiv \tilde{\varphi}(z, \bar{z}). \quad (72)$$

Nous obtenons la première équation intégrale

$$(1 - \tilde{f}) \varphi_{\tilde{p},\tilde{q}}(x, y) + \frac{\tilde{\lambda}\tau}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-\tau'}^{+\tau'} \frac{dx' dy'}{z - \bar{z}'} \chi_{\tilde{p},\tilde{q}}(x', y') = 0 \quad (73)$$

et la seconde en échangeant le rôle de φ et χ . ($\tau' = \tau^{-1}$).

Nous constatons avec intérêt que les intégrales de surface sont convergentes et que le système (73) est équivalent à un système d'équations aux dérivées partielles complétées par des conditions aux limites convenables. En effet, nous avons l'identité

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - z'} = \pi \delta_2(z - z') \equiv \pi \delta(x - x') \delta(y - y'). \quad (74)$$

qui est la forme locale au sens des distributions du théorème de Cauchy pour les fonctions analytiques. On obtient donc

$$\begin{cases} (1 - \tilde{f}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{\varphi}(z, \bar{z}) + \frac{\tilde{\lambda}\pi\tau}{2} \tilde{\chi}(\bar{z}, z) = 0 \\ (1 - \tilde{f}) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\chi}(z, \bar{z}) + \frac{\tilde{\lambda}\pi\tau}{2} \tilde{\varphi}(z, \bar{z}) = 0 \end{cases} \quad (75)$$

$$\quad (76)$$

lorsque $z(\bar{z})$ appartient au rectangle (S) $[\pm 1 \pm i\tau']$. Echangeant z et \bar{z} dans (76), on peut éliminer $\tilde{\chi}(\bar{z}, z)$, et l'on a

$$(1 - \tilde{f})^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \tilde{\varphi} = \left(\frac{\tilde{\lambda}\pi\tau}{2} \right)^2 \tilde{\varphi} \quad z, \bar{z} \in (S) \quad (77)$$

c'est-à-dire l'équation d'onde $\Delta_2 \tilde{\varphi} + \kappa^2 \tilde{\varphi} = 0$, et la relation pour le spectre de :

$$\tilde{f} = 1 \pm i \frac{\pi\tau\tilde{\lambda}}{\kappa} = 1 \pm i \frac{M}{2k\kappa}. \quad (78)$$

La fonction $\tilde{\chi}$ vérifie aussi (77). Par contre, à l'extérieur du domaine (S), $\tilde{\varphi}$ est manifestement une fonction analytique de z nulle à l'infini, de même $\tilde{\chi}$ en \bar{z} ; on a donc

$$\partial \tilde{\varphi} / \partial \bar{z} = 0, \quad \partial \tilde{\chi} / \partial z = 0, \quad \text{à l'extérieur de (S)}.$$

De plus, φ et χ sont continues à la frontière (mais à dérivées discontinues). On montre en appendice B à partir de l'exemple d'un domaine circulaire que les

conditions aux limites, en conséquence de (79) et de la continuité, équivalent simplement à

$$\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\chi} = 0, \quad \text{sur le bord de (S)}. \quad (79)$$

Des solutions élémentaires de (77) sont

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(z, \bar{z}) \equiv \varphi_{\tilde{p},\tilde{q}}(x, y) = e^{i(\tilde{p}x + \tilde{q}y)} \\ \tilde{\chi}(\bar{z}, z) \equiv \chi_{\tilde{p},\tilde{q}}(x, -y) = e^{i(\tilde{p}x + \tilde{q}y + \psi)} \end{cases} \quad (80)$$

avec :

$$\kappa^2 = \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2 \tau^2 \quad \text{et} \quad \text{tg } \psi = \tilde{q}\tau/\tilde{p}. \quad (81)$$

Les solutions du problème aux limites sont

$$\varphi_{\tilde{p},\tilde{q}}(x, y) =$$

$$\begin{pmatrix} \sin r\pi x \\ \cos \left(r + \frac{1}{2} \right) \pi x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin s\pi y \\ \cos \left(s + \frac{1}{2} \right) \pi y \end{pmatrix} \quad (82)$$

et l'on détermine $\tilde{\chi}$ par (75) : $i\kappa\tilde{\chi} + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{z}} = 0$.

On a une seconde série de solutions en échangeant φ et χ . Dans chaque série, on a quatre familles de nombres d'onde

$$\{ \tilde{p}, \tilde{q} \} \equiv \{ r\pi, s\pi \}$$

$$r, s \text{ entiers ou demi-entiers positifs. } \quad (83)$$

Le spectre ainsi défini est asymptotiquement équivalent à celui donné par (40) et (44). La contribution des petits

vecteurs d'onde au déterminant $|1 + \lambda K|$ est donc

$$\prod_{r,s>0} \left(1 + \frac{M^2}{4 l^2 \kappa^2} \right) \sim \prod_{p,q} \left(1 + \frac{1}{4 l^2 (p^2 + q^2 \tau^2)} \right) \quad (84)$$

ce qui équivaut au produit figurant au second membre de (84) où p et q ont les deux signes et sont quantifiés selon la règle (45).

6. Densité de zéros. Limite de haute densité.

A défaut de savoir effectuer l'élimination de la fugacité entre la pression et la densité de façon exacte, il est cependant possible de ramener (56) à une intégrale simple et d'explicitier la densité spectrale, en utilisant les propriétés algébriques des fonctions elliptiques. En effet, selon (56)

$$\rho = \frac{\mu^2}{2 K^2} \int \int \frac{d\bar{u} \wedge du}{2i} \frac{1}{\mu^2 + z\bar{z}} \quad (85)$$

avec

$$z = sdu. \quad (86)$$

Or, nous avons la relation [6]

$$\left(\frac{dz}{du} \right)^2 = (1 + k^2 z^2)(1 - k'^2 z^2) \quad (k^2 + k'^2 = 1) \quad (87)$$

et, par conséquent

$$\rho = \frac{\mu^2}{2 K^2} \int \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \cdot \frac{1}{|1 + k^2 z^2| |1 - k'^2 z^2|} \cdot \frac{1}{|z^2| + \mu^2}. \quad (88)$$

Selon la remarque sur l'ordre de la fonction $sd(\mu)$, le domaine de variation de z est une fois \mathbb{C} ; d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{\mu^2}{2 K^2} \int_0^\infty \frac{r dr}{r^2 + \mu^2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{|1 + k^2 r^2 e^{2i\theta}| |1 - k'^2 r^2 e^{2i\theta}|} \quad (89)$$

ou encore

$$\rho = \frac{\mu^2}{2 K^2} \int_0^\infty \frac{r dr}{r^2 + \mu^2} \frac{1}{(1 + k^2 r^2)(1 + k'^2 r^2)} K'_1 \quad (90)$$

avec le module

$$k_1 = \frac{(k^2 r^2 - 1)(k'^2 r^2 - 1)}{(k^2 r^2 + 1)(k'^2 r^2 + 1)}, \quad k_1^2 + k_1'^2 = 1, \quad (91)$$

et

$$K'_1 \equiv \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k_1'^2\right) \quad (\text{fonction hypergéométrique}). \quad (92)$$

K'_1 est la seconde intégrale elliptique complète relative à k_1' .

On peut simplifier légèrement (90) à l'aide de la transformation de Landen [6] $k_1 \rightarrow k_2$

$$K'_1 = (1 + k_2') K'_2, \quad k_1 = \frac{1 - k_2'}{1 + k_2'}. \quad (93)$$

On a

$$k_2' \equiv \frac{r^2}{1 + k^2 k'^2 r^4}, \quad 1 + k_2' \equiv \frac{(1 + k^2 r^2)(1 + k'^2 r^2)}{1 + k^2 k'^2 r^4}, \quad (94)$$

$$\Rightarrow \frac{K'_1}{(1 + k^2 r^2)(1 + k'^2 r^2)} = \frac{K'_2}{1 + k^2 k'^2 r^4}.$$

d'où l'expression de la densité

$$\rho = \frac{\pi \mu^2}{2 K^2} \int_0^\infty \frac{dr^2}{r^2 + \mu^2} \frac{1}{1 + k^2 k'^2 r^4} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \left(\frac{r'}{1 + k^2 k'^2 r^4}\right)^2\right). \quad (95)$$

La densité spectrale en μ^2 est donc

$$\frac{\pi}{2 K^2} \frac{\mu^2}{1 + k^2 k'^2 \mu^4} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \left(\frac{\mu^2}{1 + k^2 k'^2 \mu^4}\right)^2\right). \quad (96)$$

La densité de zéros s'annule comme $|\mu|$ à l'origine.

Enfin, la forme (95) est adaptée à l'étude du comportement au voisinage de la densité $\rho_c = 2\tau(\mu \rightarrow \infty)$:

$$\rho - \rho_c = -\frac{\pi}{2 K^2} \int_0^\infty \frac{r^2 dr^2}{r^2 + \mu^2} \frac{1}{1 + k^2 k'^2 r^4} F \infty - \frac{\pi}{2 K^2} \frac{\log(kk' \mu^2)}{k^2 k'^2 \mu^2} + \dots \quad (97)$$

D'où la pression

$$\beta p = \frac{1}{2} \int_0^\mu \frac{d\mu^2}{\mu^2} \rho = \frac{1}{2} \rho_c \log \mu^2 + \frac{\pi}{4 K^2} \frac{1}{k^2 k'^2 \mu^2} (\log(kk' \mu^2) + 1) + \dots$$

$$\beta p \propto \frac{1}{2} \rho_c \log \frac{1}{\rho_c - \rho} + \frac{1}{2} (\rho_c - \rho) \left(1 + \log \frac{1}{\rho_c - \rho} + O(\log |\log(\rho_c - \rho)|)\right). \quad (98)$$

La singularité est plus complexe que dans le modèle du gaz discret ordinaire. Elle est analogue dans sa nature à celle de densité nulle (cf. (63) et ss.).

Les formules données dans les deux dernières sections ne se simplifient guère lorsque le réseau est carré. Pour $\tau = 1$, on a $k^2 = k'^2 = 1/2$;

$$K = K' = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(0; e^{-\pi}) = 1.854073... \quad (99)$$

7. Conclusion.

Nous avons obtenu pour une valeur particulière de la température l'équation d'état d'un plasma neutre à deux composantes où les charges sont localisées sur un réseau bidimensionnel comme dans un plan de cristal ionique, et nous avons déterminé les singularités de cette isotherme critique à basse et haute densité. Le calcul repose sur le comportement asymptotique conjecturé d'un « déterminant de Toeplitz à deux dimensions ». L'extension naïve d'un théorème de Szegő conduit certes à un résultat fini et plausible, mais est-il valide ? Il existe un ensemble de théorèmes tout à fait non triviaux généralisant de diverses manières les résultats de Szegő qui vont d'ailleurs au-delà de ce qui nous est ici nécessaire, puisqu'ils donnent la correction à la limite thermodynamique due aux effets de bord. Le noyau K intervenant ici ne satisfait pas les hypothèses (pas seulement techniques) généralement postulées. Par exemple, des théorèmes de Widom [7] ou de Linnik [8] postulent a) la surface limitant le système doit rester homothétique à une surface continûment différentiable et à courbure positive. (Il nous faudrait un cercle et non pas un rec-

tangle; ceci serait indifférent si l'on pouvait prouver l'existence de la limite thermodynamique.) b) Les séries $\sum_z |K(z)|$ et $\sum_z |z| |K(z)|$ doivent converger. Or notre noyau ne vérifie pas les conditions de décroissance à l'infini. De plus il est du type de Toeplitz dans une coordonnée et du type de Hankel dans l'autre.

Plus utilisable peut-être serait un théorème de Gyires [9] sur les matrices de Toeplitz par blocs. Il permettrait d'atteindre le résultat pour la limite d'une bande $N \times M$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} N^{-1} \lim_{M \rightarrow \infty} M^{-1} \log |1 + \lambda K|_{M \times N}.$$

En effet considérons la matrice de Toeplitz par blocs $K(m - m')$ dont les éléments sont des matrices de Hankel $K(m - m' + i(n + n') \tau^{-1})$

$$-M < m, m' < M; \quad -N < n, n' < +N.$$

On introduit les séries de matrices

$$h_n(p) = \frac{1}{i} \sum_m K(m + in\tau^{-1}) e^{imp} \quad (100)$$

vérifiant la condition de réalité

$$\bar{h}_n(p) = h_n(p); \quad h_n(-p) = -h_{-n}(p)$$

et convergeant vers des fonctions continues (n est

impair !). Alors, pour λ imaginaire pur et assez petit, N étant fixé, la matrice $\|\delta_{n-n'} + \lambda h_{n+n'}\|$ est sûrement définie positive, et selon le théorème de Gyires

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M^{-1} \log |1 + \lambda K| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dp \log |\delta_{n-n'} + \lambda h_{n+n'}(p)|_N \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \log |1 + \lambda^2 h^2(p)|_N dp. \end{aligned} \tag{101}$$

Le second membre est évidemment une fonction analytique de λ^2 dans le plan coupé selon $[-\infty, 0]$. Le premier membre est limite d'une suite analytique dans le même domaine, car $|1 + \lambda K|_{M,N} = |1 + \lambda^2 K K^+|_{M,N}^{1/2}$. Il suffirait de montrer l'existence de la limite thermodynamique pour un ruban, ou que la suite $M^{-1} \log |1 + \lambda K|$ soit bornée, pour que le théorème de Vitali permette de conclure la validité de (101) dans le plan coupé.

On pourrait ensuite, dans une seconde étape, utiliser le premier théorème de Szegő pour prouver

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \log |1 + \lambda^2 h^2(p)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \log (1 + \lambda^2 H(p, q)) dq$$

avec

$$H(p, q) = \sum'_{n', n} h_{n+n'}(p) h_{n'+n''}(p) e^{iq(n-n'')} = |h^2(p, q)|,$$

ce qui n'est pas directement évident puisque $h^2(p)$ n'est pas exactement un noyau de Toeplitz (cf. le problème unidimensionnel section 2 et Appendice A).

Nous n'avons donné ces quelques indications que pour souligner finalement que la solution obtenue ici par des méthodes heuristiques demanderait un traitement mathématique rigoureux pour être considérée comme établie. En champ électrique non nul le modèle paraît aussi soluble, mais il semble bien que le système $\beta = 2$ soit instable en présence d'un champ fini. Enfin il existe une façon radicale d'éviter les théorèmes asymptotiques requis par les conditions aux limites strictes, c'est d'introduire *ab initio* des conditions périodiques. Ceci se fait en choisissant un potentiel interparticules ayant la double périodicité $M\omega, M\omega'$ dans les coordonnées de toutes les particules. Ceci est possible, mais comme il s'agit de forces à longue portée, le champ moyen est très modifié sur des distances comparables à la dimension du système thermodynamique. Le potentiel entre deux charges n'est plus fonction de la seule distance entre celles-ci, mais fonction des distances à toutes les images ou points congruents modulo les périodes. Ceci ne modifie certes pas le comportement de portée finie devant $M\omega$, mais revient à surimposer un champ électrique moyen inhomogène à l'échelle des domaines de périodicité.

Dans le modèle périodique, le potentiel logarithmique élémentaire $\log |z|$ trouve son extension naturelle dans la fonction $\log \left| \sigma \left(\frac{2z}{M} \right) \right|$ où $\sigma(u)$ est la fonction de Weierstrass, proportionnelle à u pour

u petit, mais vérifiant la propriété

$$\Re(\log \sigma(u + 2\omega) = \log \sigma(u) + 2\eta(u + \omega))$$

$$\Re(\log \sigma(u + 2\omega') = \log \sigma(u) + 2\eta'(u + \omega')).$$

On peut d'ailleurs compenser par un potentiel quadratique l'effet d'inhomogénéité. Avec un tel potentiel, et en présence du champ si l'on veut, la résolution de l'isotherme $\beta = 2$ est encore possible, sans le problème posé par les matrices de Toeplitz. En surmontant quelques difficultés techniques mineures, on peut encore associer la fonction de partition au développement d'un déterminant, car il existe une extension de la formule déterminantale de Cauchy pour la fonction elliptique de Weierstrass.

Remerciements.

Je remercie C. Itzykson d'avoir réveillé mon intérêt pour ce genre de problèmes, P. Moussa pour de très utiles indications bibliographiques, et particulièrement B. Jancovici qui m'a aidé à clarifier certains points.

Appendice A.

On se donne les deux matrices d'ordre M, R et O :

$$(m_1 | R | m_2) = \frac{\tilde{M}}{2} \frac{L(x_1) - L(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad x_1 = \frac{m_1}{\tilde{M}}, \text{ etc...} \tag{A.1}$$

$$|(m_1 | O | m_2)| < 2 \frac{1}{\tilde{M} - |m_1|} \cdot \frac{1}{\tilde{M} - |m_2|} \cdot \quad (m_1 - m_2) \text{ pair} \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi_1 - \xi_2}{\text{sh}(\xi_1 - \xi_2)} \frac{f(\xi_2)}{\text{ch} \xi_1} d\xi_2 = 2r \frac{f(\xi_1)}{\text{ch} \xi_1} \quad (\text{A.6})$$

et l'on voudrait montrer

$$\text{tr} \log(1 + \lambda' R + \lambda' O) = O(\log M). \quad (\text{A.3})$$

qu'on résout par transformation de Fourier

$$f(x) = \text{ch} \xi e^{ik \cdot \xi}; \quad r(k) = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{\pi k}{2}}. \quad (\text{A.7})$$

Pour avoir une estimation asymptotique du spectre de R , on regarde la limite de l'équation aux valeurs propres

$$\sum_{m_2=-M}^{+M} (m_1 | R | m_2) f(m_2) = r f(m_1) \quad (\text{A.4})$$

On obtient un continu. En fait, la différence somme-intégrale provient essentiellement d'un effet d'extrémité (pour une fonction analytique sur tout l'intervalle de sommation la différence serait e^{-M}). x_2 n'atteint pas la valeur 1, mais plutôt $\frac{M}{\tilde{M}} = 1 - \frac{1}{\tilde{M}}$, et par

soit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{L(x_1) - L(x_2)}{x_1 - x_2} f(x_2) dx_2 = 4 r f(x_1) \quad (\text{A.5})$$

conséquent l'équation en ξ est définie avec les bornes $\pm \frac{1}{2} \log 2M$. On est alors en présence d'un noyau intégral du genre de Toeplitz, ce qui introduit la quantification asymptotique de k :

ou, par changement de variables $x_1 = \text{th} \xi_1$, etc...

$$k \sim \frac{2 \pi n}{\log 2M}, \quad -M < n < M. \quad (\text{A.8})$$

D'où l'estimation

$$\log |1 + \lambda' R| \sim \log M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2 \pi} \log \left(1 - \frac{\pi^2 \lambda^2 / 4}{1 + (\pi^2 \lambda^2 / 4)} \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{\pi k}{2}} \right). \quad (\text{A.9})$$

On remarque que la quantification approximative réalise une périodicité $2M$ du vecteur propre approché

$$f(m) \sim \frac{\tilde{M}}{\sqrt{\tilde{M}^2 - m^2}} \left(\frac{\tilde{M} + m}{\tilde{M} - m} \right)^{\frac{ik}{2}} \quad (\text{A.10})$$

$$f(M) = f(-M) \Leftrightarrow (2M + 1)^{ik} = 1 \Rightarrow (\text{A.8}). \quad (\text{A.11})$$

Reste à montrer que l'adjonction à R du noyau restant O , ne modifie pas les choses. On note d'abord que $1 + \lambda' R$ est un noyau positif, $\forall \lambda$ réel. Si $(m_1 | O | m_2)$ était exactement de la forme factorisée $(\tilde{M} - |m_1|)^{-1} (\tilde{M} - |m_2|)^{-1}$ on aurait

$$\begin{aligned} \log |1 + \lambda' R + \lambda' O| &= \log |1 + \lambda' R| + \log \left| 1 + \frac{1}{1 + \lambda' R} \lambda' O \right| \\ &= \log |1 + \lambda' R| + \sum_{m_1 m_2} \frac{2 \lambda'}{\tilde{M} - |m_1|} \cdot \frac{1}{\tilde{M} - |m_2|} \left(m_1 \left| \frac{1}{1 + \lambda' R} \right| m_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Cette seconde somme est bornée en module par

$$\begin{aligned} \sum_m' \frac{|2 \lambda'|}{(\tilde{M} - |m|)^2} \times \text{Valeur propre maximum de } \frac{1}{1 + \lambda' R} < \\ < \text{Cte} \left(1 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{4} \right) |\lambda'| = \text{Cte} \cdot \lambda^2 \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

puisque la série $\sum m^{-2}$ converge.

Ce résultat subsistera en postulant seulement l'iné-

galité (A.2) sur O , si l'on peut prouver la positivité de tous les éléments de matrice de $(1 + \lambda' R)^{-1}$.

On vérifie celle-ci à la limite $M \gg 1$:

$$\begin{aligned} (m_1 | (1 + \lambda' R)^{-1} | m_2) &= \delta(m_1 - m_2) + \\ &+ \left(m_1 \left| \frac{-\lambda' R}{1 + \lambda' R} \right| m_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

D'après (A.7) et (27), le signe du second terme est

celui de l'expression

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{-\lambda' \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi k}{2}}}{1 + \frac{\lambda' \pi^2}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi k}{2}}} e^{ik \cdot \xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \frac{\pi k_0}{2} \frac{e^{ik \cdot \xi}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi k}{2} - \cos^2 \frac{\pi k_0}{2}} dk \quad (\text{A.15})$$

avec $\xi = \xi_1 - \xi_2$; $\operatorname{th} \xi_1 = (m_1/\tilde{M}) \dots$ Le nombre k_0 , $0 \leq k_0 \leq 1$, étant défini par $\operatorname{cotg} \frac{\pi k_0}{2} = \frac{\pi \lambda}{2}$. Or l'intégrale vaut $\lambda \operatorname{ch}(1 - k_0) \xi / \operatorname{ch} \xi$, quantité positive.

Enfin, à l'aide de l'inégalité de Hadamard et de la convexité du log on a, pour toute matrice A réelle

$$\log |1 + A| < \operatorname{tr} A + \frac{1}{2} \operatorname{tr} A \tilde{A}$$

prenant $A = (1 + \lambda' R)^{-1} \lambda' O$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{m_1 m_2} (m_1 | (1 + \lambda' R)^{-1} | m_2) (m_2 | O | m_1)$$

et, en vertu de la positivité des éléments de $(1 + \lambda' R)^{-1}$,

de (A. 2) et (A. 13),

$$|\operatorname{tr} A| < \operatorname{Cte} \lambda^2.$$

De même

$$\operatorname{tr} A \tilde{A} < \operatorname{Cte} \lambda^4.$$

On en conclut (A. 3)

$$\log |1 + \lambda' R + \lambda' O| = O(\log M).$$

Appendice B.

Les équations intégrales couplées (73) sont équivalentes aux équations aux dérivées partielles suivantes

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + iK\chi = 0 \\ 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} + iK\varphi = 0 \end{cases} \quad z \in (S) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad z \notin (S) \quad (\text{B.1})$$

avec les conditions de continuité sur le bord de (S) et de décroissance en $|z^{-1}|$ à l'infini. Montrons que le problème est équivalent à

$$\Delta_2 \varphi + K^2 \varphi = 0, \quad (\text{B.2})$$

avec $\varphi = 0$ ou $\chi = 0$, sur le bord de (S). Il suffit de le prouver pour un cercle. En coordonnées polaires, (B. 1) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + iK e^{-i\theta} \chi = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + iK e^{i\theta} \varphi = 0 \end{cases} \quad \text{si } \rho < 1 \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \rho > 1. \quad (\text{B.3})$$

Une base de solutions élémentaires dans (S) est

$$\begin{cases} \varphi_m = J_m(K\rho) e^{im\theta} \\ i\chi_m = J_{m+1}(K\rho) e^{i(m+1)\theta} \end{cases} \quad -\infty < m < \infty. \quad (\text{B.4})$$

Or φ est une fonction analytique de $z = \rho e^{i\theta}$ pour $\rho > 1$:

$$\varphi = \sum_{m < 0} c_m \rho^m e^{im\theta}, \quad \rho > 1 \quad (\text{B.5})$$

qui se raccorde donc continûment à

$$\varphi = \sum_{m < 0} c_m (J_m(K\rho)/J_m(K)) e^{im\theta}, \quad (\text{B.6})$$

où il nous faut supposer $J_m(K) \neq 0, \forall m < 0$.

De même χ est fonction analytique de \bar{z} pour $\rho > 1$:

$$i\chi = \sum_{m > 0} c_m \rho^{-m} e^{im\theta} \quad (\text{B.7})$$

se raccordant continûment à

$$i\chi = \sum_{m \geq 0} c_m (J_{m+1}(K\rho)/J_{m+1}(K)) e^{i(m+1)\theta}; \quad \rho < 1 \quad (\text{B.8})$$

toujours si $J_{m+1}(K) \neq 0, m \geq 0$.

(B. 5) et (B.6) entraînent $c_m = 0$ pour $m \geq 0$, et (B. 7), (B. 8) $\Rightarrow c_m = 0$ pour $m < 0$.

Pour ne pas avoir à conclure $c_m \equiv 0$, il faut donc supposer que l'un des $J_m(K)$ est nul. Dans cette hypothèse on obtient la suite de solutions associées à chaque couple m, K vérifiant $J_m(K) = 0$:

$$\begin{cases} \varphi = J_m(K\rho) e^{im\theta}, & \rho < 1 \\ \varphi = 0 & \rho > 1 \end{cases} \quad J_m(K) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{cases} i\chi = J_{m+1}(K\rho) e^{i(m+1)\theta}, & \rho < 1 \\ i\chi = J_{m+1}(K) \rho^{-(m+1)} e^{i(m+1)\theta}, & \rho > 1; \end{cases} \quad J_m(K) = 0 \quad (\text{B.10})$$

et la suite où φ et χ sont échangées.

Appendice C.

On donne ici des résultats préliminaires sur la corrélation réduite à deux particules dans la limite thermodynamique du plasma sur réseau. Notant $\rho_c = 2\tau$ la densité maximale, toujours avec l'unité de longueur $\omega = 1$, dans les notations de la section 5, les deux composantes de la fonction de corrélation réduite sont les suivantes

$$g_+(z_2 - z_1) = -\rho_c \left\langle z_1 \left| \frac{\lambda K}{1 + \lambda K} \right| z_2 \right\rangle \left\langle z_2 \left| \frac{\lambda K}{1 + \lambda K} \right| z_1 \right\rangle \quad (\text{C.1})$$

$$\text{si } z_1, z_2 \in X. \quad z_1 = \frac{1}{2}(m_1 + i\tau^{-1}n_1), \dots$$

$$g_-(z_2 - z_1) = -\rho_c \left\langle z_1 \left| \frac{\lambda K}{1 + \lambda K} \right| \bar{z}_2 \right\rangle \left\langle \bar{z}_2 \left| \frac{\lambda K}{1 + \lambda K} \right| z_1 \right\rangle \quad (\text{C.2})$$

$$\text{si } z_1 \in X, \quad z_2 \in Y, \quad \text{etc..}$$

Utilisant les vecteurs propres donnés en (42), $\varphi_{p,q}(m, n)$ et $\chi_{p,q}(m, n)$ notés ici $\langle p, q, \pm | z \rangle$, correspondant aux valeurs propres du noyau $K = \pm i | h(p, q) |$ données en (40), nous obtenons

$$g_+(m, n) = -2\tau \left| \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\lambda^2 |h^2|}{1 + \lambda^2 |h^2|} e^{i(pm+qn)} \right|^2 \quad (\text{C.3})$$

$$g_-(m, n) = -2\tau \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\lambda h}{1 + \lambda^2 |h^2|} e^{i(pm+qn)} \times \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\lambda \bar{h}}{1 + \lambda^2 |h^2|} e^{i(pm+qn)} \quad (\text{C.4})$$

avec la notation $m = m_2 - m_1, \dots$ et $h \rightarrow h(p, q)$.

Substituant dans les intégrants l'expression (51) de h , nous avons encore

$$g_+(m, n) = -2\tau \left| \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 + |sd|^2} e^{i(pm+qn)} \right|^2 \quad (\text{C.5})$$

$$g_-(m, n) = -2\tau \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\mu sd}{\mu^2 + |sd|^2} e^{i(pm+qn)} \times \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\mu \bar{sd}}{\mu^2 + |sd|^2} e^{i(pm+qn)} \quad (\text{C.6})$$

avec $sd \rightarrow sd(\xi + i\eta)$ et $\xi + i\eta = \frac{2K}{\pi}(p + i\tau q)$.

Sous cette dernière forme, on vérifie très aisément les deux règles de somme

$$\sum_{m,n} g_+(m, n) - g_-(m, n) = -2\tau \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\mu^4 + \mu^2 |sd|^2}{(\mu^2 + |sd|^2)^2} \equiv -\rho \quad (\text{C.7})$$

$$\sum_{m,n} g_+(m, n) + g_-(m, n) = -2\tau \iint \frac{dp dq}{\pi^2} \frac{\mu^4 - \mu^2 |sd|^2}{(\mu^2 + |sd|^2)^2} \equiv \mu \frac{\partial \rho}{\partial \mu} - \rho. \quad (\text{C.8})$$

Seule la première ne semble pas évidente; par contre la règle de compressibilité (C.8) découle de la structure de définition (C.1) et (C.2):

$$\begin{aligned} \sum_{z_2} g(z_2 - z_1) &= -2\tau \left\langle z_1 \left| \frac{\lambda^2 K^2}{(1 + \lambda K)^2} \right| z_1 \right\rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-2\tau}{2M^2} \text{tr} \frac{\lambda^2 K^2}{(1 + \lambda K)^2} \equiv \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} - 1 \right) \lim \frac{1}{AB} \text{tr} \frac{\lambda K}{1 + \lambda K}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Le comportement à grande distance des fonctions de corrélation se déduit de (C.5) et (C.6). Avec la notation $r = \frac{1}{2}(m^2 + \tau^{-2} n^2)^{1/2}$ nous avons le comportement asymptotique de $g_+(r) = \tau g(m, n)$

$$g_+(r) \propto \frac{-2\tau^2}{(4K^2\tau)^2} \left| \iint d\xi d\eta \frac{\mu^2}{\mu^2 + \xi^2 + \eta^2} \exp \left[i \frac{\pi}{K} \left(\xi \cdot \frac{m}{2} + \eta \cdot \frac{n\tau^{-1}}{2} \right) \right] \right|^2 \quad (\text{C.10})$$

soit

$$g_+(r) \propto -\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\mu}{K} \right)^4 K_0^2 \left(\frac{\pi\mu}{K} r \right)$$

et, si l'on définit une longueur de corrélation $l = K/\pi\mu$, on obtient donc

$$g_+(r) \propto -\frac{1}{4\pi l^3} \frac{1}{r} e^{-\frac{2\pi r}{l}}. \quad (\text{C.11})$$

On trouve enfin que $g_-(r)$ a le même comportement asymptotique que $g_+(r)$:

$$g_-(r) \propto -g_+(r). \quad (\text{C.12})$$

Bibliographie

- [1] DEUTSCH, C. et LAVAUD, M., *Phys. Rev. A* **9** (1974) 2598, *Equilibrium properties of a two-dimensional Coulomb gas*.
 DEUTSCH, C., FURUTANI, Y. and GOMBERT, M., *Phys. Rep.* **69** (1981) 86, *Nodal expansions for strongly coupled classical systems*.
- [2] GAUDIN, M., *J. Physique* **34** (1973) 511, *Gaz coulombien discret à une dimension*. *Nucl. Phys.* **85** (1966) 545, *Une famille à un paramètre d'ensembles unitaires*.
 ALASTUEY, A. and JANCOVICI, B., *J. Physique* **42** (1981) 1, *On the classical two-dimensional one component Coulomb plasma*.
- [3] GRENANDER, U. and SZEGÖ, G., *Eigenvalues of Toeplitz forms*. Berkeley (1958).
- [4] LENARD, A., *J. Math. Phys.* **2** (1961) 682, *Exact statistical mechanics of a one-dimensional system with Coulomb forces*.
- BAXTER, R., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59** (1963) 776, *Statistical mechanics of a one-dimensional Coulomb system with a uniform charge background*.
- [5] SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris) 1950.
- [6] WHITTAKER, E. and WATSON, G., *Modern analysis* (Cambridge) 1958.
- [7] WIDOM, H., *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960) 170, *A theorem on translation kernels in N dimensions*. *Adv. Math.* **13** (1974) 284, *Asymptotic behaviour of block Toeplitz matrices and determinants*.
- [8] LINNIK, I. Ju., *J. Math. USSR. Izvestiya (Trad.)* **9** (1975) 1323, *A multidimensional analog of a limit theorem of G. Szegö*.
- [9] GYIRES, B., *Publ. Math. Debrecen.* **4** (1956) 171, *Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzschener Matrizen*.

LES PREMIERS TERMES DE L'ÉNERGIE LIBRE DANS LE MODÈLE DE FEYNMAN POUR LA TRANSITION λ

M. GAUDIN

CEN Saclay, B.P. n° 2, 91190 Gif sur Yvette, France

(Reçu le 6 mars 1978, accepté le 28 mars 1978)

Résumé. — Les cinq premiers termes du développement de l'énergie libre dans le modèle de Feynman pour la transition λ de l'hélium 4 sont calculés exactement.

Abstract. — The first five terms of the free-energy expansion in Feynman's model for the λ -transition in helium 4 are given exactly.

1. La fonction de partition d'un système de N atomes d'hélium 4, de masse m , à la température inverse β , peut être représentée par l'intégrale fonctionnelle suivante :

$$Q_{\text{exact}} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{p} \in \pi_N} \int_{\mathbf{x}_i(\beta) = \mathbf{x}_{\mathbf{p}_i(0)}} \mathcal{D}x_1 \mathcal{D}x_2 \dots \mathcal{D}x_N \exp \left\{ \int_0^\beta \left(-\frac{m}{2\hbar} \sum_i \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 - \sum_{i < j} V(x_i(u) - x_j(u)) \right) du \right\}. \quad (1)$$

Dans le but de comprendre la nature de la transition λ , Feynman [1] procède à une triple simplification de la somme sur les trajectoires (1) :

a) Pour tenir compte de l'effet du potentiel mutuel entre atomes, la position de ceux-ci est restreinte aux sites d'un réseau périodique cubique de forme et de volume donnés (par exemple un cube $N = L^3$). En effet, le cœur dur a pour effet de maintenir les distances entre atomes voisins dans des limites étroites. La densité détermine d'ailleurs la longueur a de la maille du réseau $a^3 = \rho^{-1}$, puisque l'on a un atome par site.

b) Le *propagateur* de chaque particule entre 0 et β est approché de façon naturelle par

$$\exp - \int_0^\beta \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 \propto \exp - \frac{m'}{2\hbar\beta} (x_i(\beta) - x_i(0))^2 = \exp - \frac{m'}{2\beta\hbar} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\mathbf{p}_i})^2 \quad (2)$$

où m' désigne une masse effective.

Les deux hypothèses ci-dessus donnent une approximation de Q_{exact} sous forme de la somme symétrique suivante :

$$Q_{\text{appr.}} = \frac{1}{N!} \sum_{\{\mathbf{x}_i\}} \sum_{\mathbf{p}} \prod_{j=1}^N \exp - \frac{m'}{2\beta\hbar} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{\mathbf{p}_j})^2. \quad (3)$$

Définissons la matrice $N \times N$ d'éléments

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \exp - \frac{m'}{2\beta\hbar} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2. \quad (4)$$

Après la sommation sur les \mathbf{x}_i nécessairement distincts, qui a pour effet de multiplier par $N!$, on reconnaît dans $Q_{\text{appr.}}$ le *permanent* de la matrice f

$$Q_{\text{appr.}} = \dagger f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \dagger_N. \quad (5)$$

c) Si l'on note que f décroît très vite avec la distance, une troisième simplification consiste à ne retenir dans la matrice (4) que les éléments dominants : la diagonale $f(0) = 1$ et les éléments paradiagonaux correspondant à la propagation de chaque atome d'un site au site voisin. On appelle λ la valeur correspondante de f

$$\lambda = \exp - \frac{m' a^2}{2\beta\hbar}. \quad (6)$$

D'où l'approximation de Feynman, donnant une fonction de partition modèle

$$Q = \dagger 1 + \lambda A \dagger_N = \dagger \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \dagger_N \quad (7)$$

dépendant du seul paramètre λ : les éléments de la matrice A sont

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} \text{ ne sont pas voisins} \\ = 1 \quad \text{si } \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} \text{ sont voisins.} \quad (8)$$

Si l'on développe le permanent (7) par la méthode de Laplace et qu'on utilise l'écriture cyclique des permutations de π_N , on obtient pour Q le polynôme de degré N en λ

$$Q(\lambda) = 1 + \sum_{n=2}^N C_n \lambda^n \tag{9}$$

où C_n est le nombre d'applications distinctes des systèmes de polygones orientés fermés — ou cycles — ayant un nombre total de côtés égal à n , sur les arêtes du réseau cubique donné, chaque site étant emprunté au plus une fois. A noter que les polygones de longueur 2 n'ont qu'une orientation et que les cycles ont toujours une longueur paire.

2. Ce rappel des hypothèses de Feynman étant fait (on trouvera leur motivation très étayée dans ses articles [3] et ceux de Kikuchi [2]) on s'intéresse à la limite thermodynamique de l'énergie libre par particule

$$\Phi(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log Q(\lambda)}{N} \tag{10}$$

On notera la majoration qui découle immédiatement de (7)

$$\Phi(\lambda) \leq \log(1 + 2d\lambda) \tag{11}$$

où l'on a appelé d la dimension de l'espace (nombre de coordination $q = 2d$ pour le réseau cubique). La conjecture de Van der Warden [4] pour le permanent des matrices bistochastiques nous donne de plus la borne inférieure

$$\log(1 + 2d\lambda) - 1 \tag{12}$$

Nous avons construit sans difficulté une théorie diagrammatique pour le développement perturbatif d'un permanent et l'avons appliqué au calcul des premiers termes de $\Phi(\lambda)$

$$\frac{\Phi_d(\lambda)}{d} = \lim \frac{\log |1 + \lambda A|}{Nd} = a_1 \lambda^2 + a_2 \frac{\lambda^4}{2} + a_3 \frac{\lambda^6}{3} + \dots + a_n \frac{\lambda^{2n}}{n} + \dots \tag{13}$$

Les a_n sont des entiers. Voici la valeur des premiers coefficients de la série (13) jusqu'à l'ordre λ^{10} , en fonction de la dimension $d = q/2$.

$$\left| \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -(q + 1) \\ a_3 = (3q^2 - 9q + 16) \\ a_4 = (5q^3 - 118q^2 + 505q - 613) \\ a_5 = (85q^4 - 1630q^3 + 11975q^2 - 36015q + 35936) \end{array} \right. \tag{14}$$

ce qui donne pour les trois premières dimensions

• $d = 3$:

$$\frac{1}{3} \Phi_3(\lambda) = \lambda^2 - 7 \frac{\lambda^4}{2} + 70 \frac{\lambda^6}{3} - 751 \frac{\lambda^8}{4} + 9026 \frac{\lambda^{10}}{5} + \dots \tag{15}$$

• $d = 2$:

$$\frac{1}{2} \Phi_2(\lambda) = \lambda^2 - 5 \frac{\lambda^4}{2} + 28 \frac{\lambda^6}{3} - 161 \frac{\lambda^8}{4} + 916 \frac{\lambda^{10}}{5} + \dots \tag{16}$$

• $d = 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda) &= \lambda^2 - 3 \frac{\lambda^4}{2} + 10 \frac{\lambda^6}{3} - 35 \frac{\lambda^8}{4} + 126 \frac{\lambda^{10}}{5} + \dots \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-)^{p-1} C_{p-1}^{2p-1} \cdot \frac{\lambda^{2p}}{p} \\ &= \log \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

Le problème à une dimension, facile à résoudre, fournit un test très sûr de la justesse du calcul des poids et d'une énumération correcte. Par exemple l'évaluation du terme en λ^{10} nécessite plus de 200 diagrammes connexes. Pour $d = 3$, la contribution d'un diagramme est couramment de l'ordre de $10^3 \cdot 10^4$. La somme des 205 contributions est de l'ordre de 10^3 , ce qui donne une idée des effets de compensation.

On remarque que la fonction Φ admet une forme limite lorsque la dimension devient infinie, le produit $\lambda^2 d = x$ restant constant

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= x - x^2 + 4x^3 + 10x^4 + 272x^5 + \dots - \\ &\quad - \frac{1}{d} \left(\frac{x^2}{2} + 18 \frac{x^3}{3} + 472 \frac{x^4}{4} + 13040 \frac{x^5}{5} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{d^2} \left(16 \frac{x^3}{3} + 1010 \frac{x^4}{4} + 47900 \frac{x^5}{5} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{1}{d^3} \left(613 \frac{x^4}{4} + 72030 \frac{x^5}{5} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{d^4} \left(35936 \frac{x^5}{5} + \dots \right) + \dots \end{aligned} \tag{18}$$

Donnons enfin une borne inférieure du rayon de convergence de la série (13) pour $\Phi_d(\lambda)$. D'après une formule connue on a :

$$\dagger |1 + \lambda A| < \frac{1}{\det |1 - \lambda A|} \tag{19}$$

pourvu que

$$\lambda^{-1} > \text{Sup. Spect. } A = 2d \tag{20}$$

On a la majoration

$$\Phi_d(\lambda) \leq - \left\langle \log \left(1 - 2\lambda \sum_{j=1}^d \cos \varphi_j \right) \right\rangle \tag{21}$$

où $\langle \rangle$ signifie valeur moyenne sur les angles φ_j avec

$$\Phi_d(\lambda) \text{ converge donc pour } 2 \lambda d < 1. \quad (22)$$

$$g = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

La borne (19) donne lieu à une *somme sur les polygones* où la condition de non-intersection est levée. La majorante (21) de l'énergie libre manifeste une transition essentiellement la même que celle d'un système de Bose sans interaction et ne nous apprend pas grand chose sur celle de Φ .

On a donc :

$$\Phi_2(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \log \lambda + \frac{2g}{\pi}$$

Bien que ce soit probablement le poids des polygones de longueur macroscopique qui soit prépondérant au voisinage de la transition, l'information contenue dans les premiers coefficients de $\Phi(\lambda)$, qui ne font intervenir que des polygones d'ordre 10 tout au plus, a au moins le mérite d'être sûre. Il serait utile de l'exploiter au mieux en construisant les divers approximations de Padé, mais ceci reste entièrement à faire. On pourrait utiliser aussi le comportement à l'infini, sûrement en $\log \lambda$ d'après (11) et (12), en étudiant les approximations $[N, N - 1]$ de e^Φ . Pour $d = 2$, le résultat de Fisher [5] pour le système de dimères sur réseau quadratique permet de calculer

Comparer 0,58 avec la borne inférieure $\log 4/e = 0,386$ et la borne supérieure 1,38 données par (11) et (12).

On aura noté que les séries (15) et (16) pour les dimensions physiques commencent alternées et ont une allure géométrique, ce qui n'entraîne pas forcément l'absence de singularité physique. Par contre, le développement dans la variable $x = \lambda^2 d$, au voisinage de $d = \infty$, fait intervenir des coefficients de même signe (sauf le second !), mais on ne peut plus rien dire sur le rayon de convergence de la série

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \Phi(x)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |A|}{N} = \frac{2g}{\pi} \sim 0,583 \ 12$$

Remerciements. — Je remercie M. L. Mehta qui s'est intéressé à ce calcul et a vérifié les résultats.

Bibliographie

[1] FEYNMAN, R. P., *Phys. Rev.* **90** (1953) 1116 ; **91** (1953) 1291.
 [2] KIKUCHI, R., *Phys. Rev.* **96** (1954) 563.
 [3] FEYNMAN, R. P., *Statistical Mechanics*. A set of lectures (Benjamin) 1972, Chap. 11.10.
 [4] MARCUS, M. & MINC, H., *A survey of matrix theory and matrix inequalities* (P.W.S.) 1964 (§ 2.11.6 et 5.11.6).
 [5] FISHER, M. E., *Phys. Rev.* **124** (1961) 1664.

Méthode d'intégration sur les variables d'énergie dans les graphes de la théorie des perturbations.

M. GAUDIN

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Service de Physique Théorique

(ricevuto il 2 Febbraio 1965)

Summary. — Using an algebraic identity, the product of propagators associated with the lines of a given graph of the perturbation theory, is decomposed into partial fractions. This allows a systematic summation over the energy variables of a diagram in statistical mechanics. The result is a sum of terms each corresponding to one of the « trees » into which the graph can be decomposed.

Introduction.

La théorie des perturbations appliquée au problème à plusieurs corps fait correspondre un diagramme connexe à chaque terme du développement des grandeurs physiques considérées. En mécanique statistique quantique ce sont par exemple l'énergie libre et les diverses fonctions de corrélation, en théorie des particules élémentaires ce sont les amplitudes ou éléments de la matrice S . Dans tous ces cas, les contributions associées à un graphe ont des définitions analogues, dont les éléments communs sont les suivants: Un graphe étant constitué de points ou sommets et de lignes orientées qui joignent certains couples de points, à chaque point est associé un « temps » t et à chaque ligne un propagateur G . Points et lignes sont numérotés. Si la ligne α est par exemple dirigée de t_1 vers t_2 , le propagateur associé est du type $G_\alpha(t_2 - t_1)$. La contribution d'un graphe Γ d'ordre n est l'intégrale

$$W(\Gamma) = \int_{\delta} dt_1 \int_{\delta} dt_2 \int_{\delta} \dots \int_{\delta} dt_n \prod_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha .$$

L'intervalle d'intégration δ , commun à toutes les variables, dépend de la théorie considérée.

On peut transformer la quantité W de deux manières en utilisant les propriétés analytiques de $G(t)$ et de sa transformée de Fourier $G(z)$. $G(t_2-t_1)$ étant composé de fonctions analytiques différentes suivant le signe de t_2-t_1 , le premier procédé d'intégration de W consiste à séparer W en $n!$ intégrales portant sur les suites de temps ordonnés. Ceci revient à considérer comme distincts des diagrammes numérotés qui diffèrent seulement par l'ordre de succession des interactions dans le temps. L'intégration sur les temps ordonnés se fait explicitement et l'on obtient la formulation dite « indépendante du temps » caractérisée par la distinction entre « lignes montantes » et « lignes descendantes » et par les « dénominateurs d'énergie » relatifs aux états intermédiaires ⁽¹⁾.

La seconde méthode emploie les transformées de Fourier $G_\alpha(z)$ (séries ou intégrales) ⁽²⁾. En statistique, on a $G_\alpha(z) = (\varepsilon_\alpha - z)^{-1}$, où ε_α est une quantité qui dépend de la ligne α , par exemple de l'impulsion associée.

Le propagateur d'une particule de masse m est du même type:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{2E_p} \left(\frac{1}{p_0 - E_p} - \frac{1}{p_0 + E_p} \right);$$

ici p_0 joue le rôle de z , et $\pm E_p$ le rôle de ε_α .

La contribution W se présente après transformation comme une somme (ou intégrale) sur les variables z_α associées à chaque ligne et liées par les relations de conservation à chaque sommet du graphe. Se pose maintenant le problème d'effectuer explicitement la sommation sur les variables z indépendantes. Dans chaque cas particulier, il suffit d'appliquer de façon répétée le théorème des résidus. Ceci amène à rechercher une méthode générale et conduit à un ensemble de règles permettant d'écrire directement le résultat de l'intégration, qui ne dépend que de la structure du graphe.

Dans la première Section de cet article, nous rappelons les définitions utiles et quelques notions simples sur la théorie des circuits. Dans la seconde Section, est établie une identité algébrique qui est à la base des règles proposées et qui vaut pour tout graphe. Enfin dans la dernière Section sont exposées les applications de ce résultat au calcul des diagrammes de la mécanique statistique avec ou sans lignes externes. Nous avons essayé d'appliquer ces règles aux graphes de Feynman et obtenu un résultat que nous signalons, sans préjuger de son intérêt; si, en mécanique statistique la variable « d'énergie » joue un rôle très différent des variables d'impulsion, ce n'est pas le cas en théorie

⁽¹⁾ C. BLOCH et C. DE DOMINICIS: *Nucl. Phys.*, **7**, 459 (1958); **10**, 181 (1959).

⁽²⁾ A. A. ABRIKOSOV, L. P. GORKOV et I. E. DZIALOSHINSKI: *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Trad. R. A. SILVERMAN (Princeton, N.J., 1963).

relativiste où les quatre variables d'intégration relatives à chaque cycle peuvent être traitées simultanément.

L'identité algébrique démontrée ici peut être considérée comme une décomposition en éléments simples de certaines fractions rationnelles définies sur le graphe. Nous n'avons effectué cette décomposition que dans le cas de pôles simples. C'est pourquoi une restriction importante, dans l'application de ce résultat aux systèmes conservatifs usuels, est que les diagrammes doivent être irréductibles, c'est-à-dire sans parties diagonales à une particule. On a donc envisagé seulement la théorie renormalisée où, à chaque ligne, est associé un propagateur complet. Ceci nous conduit à exprimer les grandeurs telles que le « potentiel de Gibbs » ou « l'opérateur de masse » d'un système de particules identiques comme une fonctionnelle des densités spectrales $\varrho(k, \varepsilon)$ des fonctions de Green à une particule. Ce n'est pas l'objet de cet article de développer un tel formalisme, mais l'introduction de ces densités nous permet de donner les règles du calcul des seuls diagrammes irréductibles.

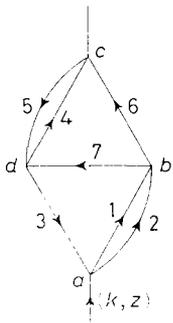


Fig. 1.

En guise de résumé, nous montrons l'application de ces règles sur l'exemple suivant.

Le diagramme Γ de la Fig. 1 donne une contribution du 4ⁱème ordre à l'opérateur de masse d'un système normal de fermions. On a sept lignes internes k_1, k_2, \dots, k_7 . On note $E_i = (1/2M)k_i^2 - \mu$. L'impulsion commune des deux lignes externes est k , l'énergie z . Dans le formalisme de Luttinger et

Ward par exemple, à température quelconque, la contribution particulière de ce diagramme Γ à la fonction $\Sigma(k, z)$ s'écrit ainsi, en omettant des coefficients numériques,

$$\Sigma_{\Gamma}(k, z) = \sum_{\zeta_i} \int \langle k k_3 | v | k_1 k_2 \rangle \langle k_5 k_7 | v | k_3 k_4 \rangle \langle k_1 k_2 | v | k_6 k_7 \rangle \langle k_4 k_6 | v | k_5 k \rangle \prod_{i=1}^7 [E_i - \zeta_i]^{-1} \cdot \delta(z + \zeta_3 - \zeta_1 - \zeta_2) \delta(\zeta_5 + \zeta_7 - \zeta_3 - \zeta_4) \delta(\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_6 - \zeta_7) \cdot d^3 k_1 d^3 k_2 \dots d^3 k_7,$$

où la somme porte sur les variables discrètes l_i telles que $\zeta_i = 2\pi i l_i / \beta$. Le potentiel v étant invariant par translation, on a dans l'élément de matrice $\langle k k_3 | v | k_1 k_2 \rangle$ la fonction δ usuelle $\delta(k + k_3 - k_1 - k_2)$. Dans l'expression ci-dessus, nous avons pris les propagateurs non perturbés $[E_{k_i} - \zeta_i]^{-1}$. Dans une théorie renormalisée, nous écrirons $G_{k_i}(\zeta_i)$ au lieu de $[E_{k_i} - \zeta_i]^{-1}$, et nous ferons usage de la représentation spectrale

$$G_k(\zeta) = \int \frac{\varrho(k, \varepsilon)}{\varepsilon - \zeta} d\varepsilon,$$

avec

$$\varrho \geq 0 \quad \text{et} \quad \int \varrho(k, \varepsilon) d\varepsilon = 1.$$

Nous sommes amenés dans les deux cas au problème de sommer sur les variables ζ liées par les relations de conservation, un produit de la forme $\prod_i [\varepsilon_i - \zeta_i]^{-1}$. La méthode classique d'intégration nous conduirait à décomposer Σ_I en la somme de $4!$ contributions associées aux diagrammes ordonnés dans le temps.

Nous exposons maintenant l'application des règles proposées au calcul du diagramme I , en définissant sommairement les notions utiles.

A) On dessine sur le graphe I , amputé de ses lignes externes, tous les arbres possibles, c'est-à-dire les graphes connexes sans cycles de quatre sommets et de trois lignes choisies parmi les lignes de I . Il existe 21 arbres \mathcal{A} sur I . En fait, il n'est pas besoin que d'en considérer 13, qui sont représentés Fig. 2: ceci à cause de la double ligne, 1 et 2, qui joint les deux sommets a

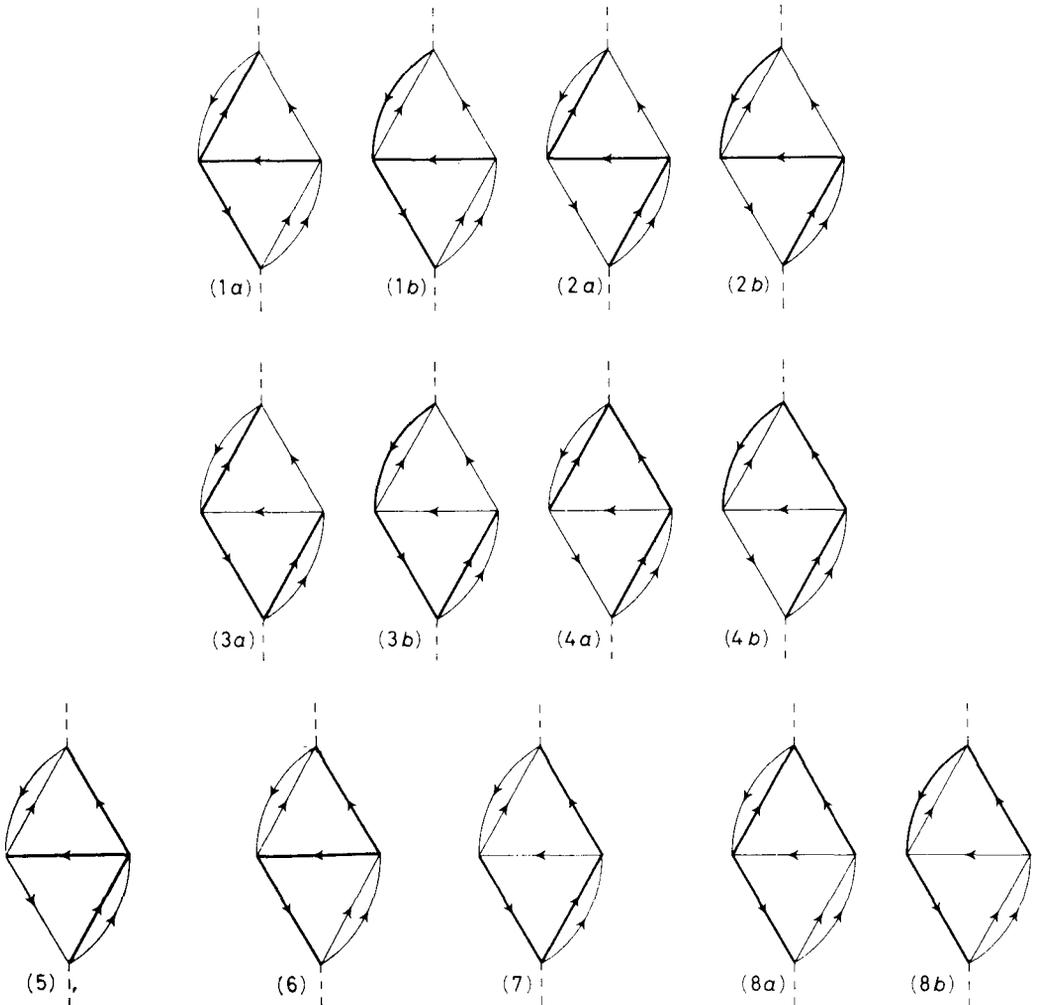


Fig. 2.

et b . C'est toujours le cas pour les doubles lignes, il suffit de considérer seulement un arbre qui passe par l'une d'elle et de doubler le résultat. Appelons Σ_T la somme des contributions $\Sigma_{\mathcal{A}}$ associées à chaque arbre

$$\Sigma_T(k, z) = \text{somme des } \Sigma_{\mathcal{A}}(k, z) . .$$

Explicitons maintenant la règle du calcul de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ pour un arbre particulier, par exemple $\mathcal{A}(a1)$ de la Fig. 2.

B) La contribution de l'arbre $\mathcal{A}(a1)$ a l'allure suivante :

aux lignes de l'arbre $\mathcal{A}\{E_3, E_4, E_7\}$ sont associés des dénominateurs d'énergie à des états intermédiaires déterminés par \mathcal{A} ;

aux autres lignes de T , n'appartenant pas à \mathcal{A} , et formant un ensemble $\mathcal{B}\{E_1, E_2, E_5, E_6\}$, sont associés les facteurs statistiques $f^+(E)$ ou $f^-(E)$.

Il reste donc à préciser comment déterminer le choix entre f^+ et f^- pour chaque ligne de \mathcal{B} , et comment construire les dénominateurs d'énergie relatifs aux lignes de \mathcal{A} .

C) *Dénominateurs d'énergie.* La Fig. 3 montre comment sont définis les trois dénominateurs D_3, D_7, D_4 relatifs aux lignes E_3, E_7 et E_4 .

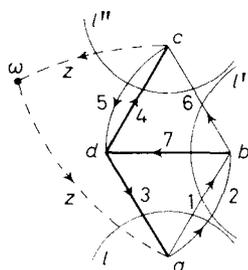


Fig. 3.

Au préalable, on joint ensemble sur un sommet auxiliaire ω , les deux lignes externes, affectées de la variable d'énergie z .

Soit à déterminer D_3 . On supprime idéalement la ligne E_3 de l'arbre \mathcal{A} . Ceci a pour effet de couper l'arbre en deux arbres et de séparer les sommets de T en deux groupes. Dans le cas présent, on a le groupe formé du sommet a seul, et le groupe formé des sommets b, c, d . La ligne en tirés l , est la ligne de séparation des deux groupes: la ligne de partage l , coupe les lignes de T et

la ligne externe suivantes: E_3, E_1, E_2, z . Le dénominateur est $D_3 \equiv +E_3 - E_1 - E_2 + z$, où l'on a mis le signe $+$ devant l'énergie E_3 de l'unique ligne de \mathcal{A} qui coupe l , et les autres signes suivant le sens relatif par rapport à E_3 des lignes qui coupent l . On lit donc sur la section idéale l , le transfert total d'énergie correspondant à l'état intermédiaire défini par l . On lit de même, relativement aux sections des lignes E_7 par l' et E_4 par l'' :

$$D_7 \equiv E_7 + E_6 - E_1 - E_2 .$$

et

$$D_4 \equiv E_4 + E_6 - E_5 - Z .$$

D) *Facteurs statistiques.* Soit à déterminer le facteur $f(E_6)$ relatif à la ligne E_6 de \mathcal{B} . On remarque que l'adjonction mentale de la ligne E_6 à l'arbre \mathcal{A} , crée un cycle et un seul formé des lignes E_7 , E_4 et E_6 . Définissons l'orientation totale de ce cycle de la façon suivante: on parcourt le cycle dans le sens indiqué par la flèche de la ligne n. 6. Le nombre total de flèches rencontrées du même sens que la ligne 6, diminué du nombre de flèches orientées dans le sens inverse de 6, est un nombre entier dont le signe est ε . Nous avons alors un facteur $\varepsilon f^\varepsilon(E)$.

Pour la ligne 6: cycle (6, 4, 7) d'où $\varepsilon = -1$.
(+ - -)

Pour la ligne 5: cycle (5, 4) d'où $\varepsilon = +1$.
(+ +)

Pour les lignes 1 et 3: cycle (1, 7, 3) d'où $\varepsilon = +1$.
(+ + +)

D'où les facteurs: $-f^-(E_6)f^+(E_5)f^+(E_1)f^+(E_2)$.

Il peut arriver que certains cycles aient une orientation totale nulle. La règle est alors de lever l'ambiguïté en renforçant arbitrairement, une fois pour toutes dans un graphe donné, certaines lignes du diagramme auxquelles on peut associer deux flèches, ou trois flèches, etc. Par exemple dans le cas de la Fig. 2a, la ligne n. 2 ajoutée à l'arbre $\mathcal{A}(2a)$ crée un cycle (2, 1) d'orientation totale nulle. On lève l'ambiguïté en mettant deux flèches sur la ligne n. 1, une fois pour toutes. Le cas se présente toujours pour les doubles lignes. Il montre aussi que la décomposition que nous donnons n'est pas unique.

Rassemblant facteurs statistiques et dénominateurs d'énergie, on obtient pour la contribution de $\mathcal{A}(1a)$

$$\Sigma_{\mathcal{A}(1a)}(k, z) = \int \langle k k_3 | v | k_1 k_2 \rangle \langle k_5 k_7 | v | k_3 k_4 \rangle \langle k_1 k_2 | v | k_6 k_7 \rangle \langle k_4 k_6 | v | k_5 k \rangle \cdot$$

$$\frac{-f^-(E_{k_6}) f^+(E_{k_5}) f^+(E_{k_1}) f^+(E_{k_2}) d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4}{(E_{k_1+k_2-k} - E_{k_1} - E_{k_2} + z)(E_{k+k_5-k_6} + E_{k_6} - E_{k_5} - z)(E_{k_1+k_2-k_6} + E_{k_6} - E_{k_1} - E_{k_2})}.$$

On remarque que les variables d'impulsion qui figurent dans les facteurs statistiques peuvent être choisies comme variables indépendantes d'intégration. Le fait est général. C'est pourquoi on a écrit $E_{k_1+k_2-k}$ pour E_{k_3} , etc. La fonction $\Sigma_{\mathcal{A}}(k, z)$ est la somme de 13 termes analogues. On peut noter le nombre de quatre facteurs f^ε pour un diagramme de sept lignes. En général dans un graphe

(³) J. M. LUTTINGER et J. C. WARD: *Phys. Rev.*, **118**, 1417 (1960).

d'ordre n de p lignes on a $p - n + 1$ facteurs statistiques. Enfin, sauf pour une classe de diagrammes et d'arbres exceptionnels, la séquence d'états intermédiaires définis par un arbre ne peut être identifiée à une séquence d'états intermédiaires de la théorie usuelle, indépendante du temps.

1. — Généralités.

1.1. *Définitions et hypothèses* ⁽⁴⁾. — Soit \mathcal{G} un graphe connexe d'ordre n , comprenant n sommets appelés a, b, c, \dots , et p lignes orientées, numérotées $1, 2, \dots, p$. Le degré du sommet a est le nombre de lignes incidentes à a , quelque soit leur orientation. Le degré de chaque sommet est supposé supérieur à 1. Une ligne dont les extrémités initiales et terminales sont sur le même sommet a , est dite une boucle en a . Enfin un cycle est un chemin fermé, constitué par une séquence de lignes du graphe. Nous ne faisons aucune hypothèse restrictive sur la nature du graphe connexe dans les deux premières parties. Pour les applications nous considérerons seulement les graphes irréductibles. Un graphe est dit irréductible s'il ne peut être rendu non connexe par la suppression de deux lignes.

A chaque ligne nous associons deux nombres ε_i et z_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Les ε sont un ensemble de p paramètres indépendants.

Soit a un sommet de degré r de \mathcal{G} . Supposons que les lignes qui convergent en a aient les numéros $1, 2, \dots, q$; celles qui sont issues de a , les numéros $q+1, q+2, \dots, r$. On définit en a la quantité $R_a(\varepsilon)$:

$$(1) \quad R_a(\varepsilon) \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q - \varepsilon_{q+1} - \varepsilon_{q+2} - \dots - \varepsilon_r.$$

R_a est la somme algébrique des quantités ε relatives au sommet a et mesurées positivement dans le sens des lignes convergeant sur a . Si le graphe avait une boucle en a , la variable ε correspondante ne figurerait pas dans R_a , d'après la définition donnée plus haut.

Par hypothèse les p variables z_i vérifient les n équations linéaires et homogènes:

$$(2) \quad R_a(z) = 0$$

pour tout sommet a de \mathcal{A} .

Si le graphe représente un réseau, les variables z représentent des courants. L'égalité $R_a(z) = 0$ est aussi appelée relation de conservation en a .

(4) C. BERGE: *Théorie des graphes et ses applications* (Paris, 1958).

1°2. *Les variables indépendantes.* — Nous rappelons maintenant la solution générale du système d'équations (2), en introduisant la notion d'arbre ⁽⁵⁾ sur un graphe connexe \mathcal{C} . Soit \mathcal{A} un arbre sur \mathcal{C} , c'est-à-dire un graphe connexe, sans cycle, dont les lignes appartiennent au graphe \mathcal{C} , et qui contient tous les sommets de \mathcal{C} . \mathcal{A} possède donc n sommets et $n-1$ lignes. Nous appelons \mathcal{B} le graphe complémentaire de \mathcal{A} sur \mathcal{C} , c'est-à-dire le graphe de n sommets, formé des lignes de \mathcal{C} qui n'appartiennent pas à \mathcal{A} . \mathcal{B} possède donc $p-n+1$ lignes. On a le résultat classique suivant ⁽⁶⁾: à tout arbre \mathcal{A} , de lignes $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$, correspond une résolution du système linéaire (2). Les quantités $z_\alpha, z_\beta, z_\gamma, \dots, z_\delta$ sont des formes linéaires des quantités $z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\rho$ associées au complémentaire \mathcal{B} dont les lignes sont $\lambda, \mu, \nu, \dots, \rho$.

Il suffit de remarquer que toute ligne λ de \mathcal{B} , ajoutée à \mathcal{A} , détermine sur \mathcal{C} un cycle et un seul. Nous l'appellerons le cycle (λ) (\mathcal{A} étant donné). Les cycles ainsi formés sont indépendants car chacun d'eux contient une ligne que ne contiennent pas les autres: la ligne λ n'appartient pas au cycle (μ) . Les lignes de \mathcal{B} déterminent donc $p-n+1$ cycles indépendants. Par convention, un cycle (λ) sera orienté dans le sens de la ligne λ qui le détermine. Ces remarques permettent de construire les $n-1$ formes linéaires

$$(3) \quad \begin{cases} z_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(z_\lambda z_\mu \dots z_\rho), \\ z_\beta = \mathcal{E}_\beta(z_\lambda z_\mu \dots z_\rho), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_\delta = \mathcal{E}_\delta(z_\lambda z_\mu \dots z_\rho), \end{cases}$$

que l'on obtient de la façon suivante:

Le coefficient de z_λ dans la forme $\mathcal{E}_\alpha(z_\lambda z_\mu \dots z_\rho)$ est nul si la ligne α n'est pas sur le cycle (λ) ; il est égal à $+1$ (ou à -1) suivant que la ligne α est sur le cycle (λ) , orienté dans le même sens que λ (ou dans le sens opposé).

Chaque arbre \mathcal{A} sur \mathcal{C} , détermine ainsi un système de variables indépendantes $z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\rho$, en fonction desquelles s'expriment les variables $z_\alpha, z_\beta, \dots, z_\delta$, associées aux lignes de \mathcal{A} . C'est la solution générale du système (2). Il existe une identité évidente entre les quantités $R_a(\varepsilon)$ qui est la suivante:

$$(4) \quad \sum_{a \in \mathcal{C}} R_a(\varepsilon) \equiv 0.$$

Les quantités z , liées par ν relations indépendantes, dépendent de $p-\nu$ va-

⁽⁵⁾ Voir réf. (4), Chapitre XVI.

⁽⁶⁾ Voir réf. (4), Chapitre XVI, p. 152.

riables; or, nous en avons trouvé $p - n + 1$, on a donc $\nu \geq n - 1$. L'identité (4) est donc la seule relation entre les R_a , et $\nu = n - 1$.

1'3. *Les formes $\mathcal{E}(\varepsilon)$.* - Nous donnons ici une autre expression des formes $\mathcal{E}_\alpha(z_\lambda z_\mu \dots z_\rho)$ qui servent à exprimer la solution du système (2) relativement à un arbre donné \mathcal{A} .

Soit α une ligne de \mathcal{A} . En la supprimant, on détermine avec les lignes restantes de \mathcal{A} , deux arbres: \mathcal{A}_α^+ et \mathcal{A}_α^- , tels que la ligne α soit orientée de \mathcal{A}_α^- vers \mathcal{A}_α^+ . Nous avons l'identité suivante:

$$(5) \quad \varepsilon_\alpha - \mathcal{E}_\alpha(\varepsilon) \equiv \sum_{a \in \mathcal{A}_\alpha^+} R_a(\varepsilon) \equiv - \sum_{a' \in \mathcal{A}_\alpha^-} R_{a'}(\varepsilon).$$

Pour le voir, considérons la quantité $\sum_{a \in \mathcal{A}_\alpha^+} R_a(\varepsilon)$; elle ne peut dépendre d'aucune quantité ε attachée à \mathcal{A}_α^+ , car toute ligne de \mathcal{A}_α^+ qui joint deux sommets b et c ne contribue pas à la somme $R_b + R_c$. Elle ne peut dépendre non plus des quantités ε associées à \mathcal{A}_α^- car

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_\alpha^-} R_a(\varepsilon) \equiv - \sum_{a' \in \mathcal{A}_\alpha^+} R_{a'}(\varepsilon)$$

en vertu de (4). La quantité $\sum_{a \in \mathcal{A}_\alpha^+} R_a(\varepsilon)$ est donc identique à ε_α + une forme linéaire de quantités ε attachées à \mathcal{B} , que nous appelons $-\mathcal{E}'$. Nous avons donc

$$(6) \quad \varepsilon_\alpha - \mathcal{E}'(\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu \dots \varepsilon_\rho) \equiv \sum_{a \in \mathcal{A}_\alpha^+} R_a(\varepsilon),$$

or si nous remplaçons $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \dots, \varepsilon_\rho$ par les $z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\rho$, le second membre de (6) s'annule et ε_α est égal à z_α . Nous trouvons donc la solution (3) du système (2) et nous avons $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}$.

La façon la plus simple de visualiser la quantité $\varepsilon_\alpha - \mathcal{E}_\alpha$ sur les graphes \mathcal{C} et \mathcal{A} est la suivante (Fig. 4): la suppression idéale de la ligne α coupe l'arbre \mathcal{A} en deux, et sépare donc les sommets de \mathcal{C} en deux groupes, les sommets sur \mathcal{A}_α^+ et ceux sur \mathcal{A}_α^- . En déformant le graphe on peut placer les sommets de \mathcal{A}_α^+ et de \mathcal{A}_α^- de part et d'autre d'une droite Δ , qui coupe un certain nombre de lignes de \mathcal{B} et la ligne α de \mathcal{A} . La quantité $\varepsilon_\alpha - \mathcal{E}_\alpha$ est égale au « dénominateur d'énergie » correspondant à « l'état intermédiaire » Δ .

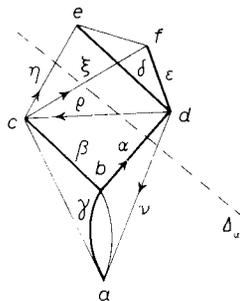


Fig. 4. - Arbre \mathcal{A}_α^+ : δ, ε , sommets d, e, f ; arbre \mathcal{A}_α^- : γ, β , sommets a, b, c . Energie de l'état intermédiaire Δ : $(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta - \varepsilon_\nu - \varepsilon_\rho)$.

2. – Identités.

2'1. Identité préliminaire. – Etant donné un graphe \mathcal{C} et p indéterminées, ε_i , associées aux lignes de \mathcal{C} , on établit l'identité suivante:

$$(7) \quad Q = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_p]^{-1} \equiv \sum_{[\mathcal{A}(\alpha\beta\gamma\dots\delta)]} D(\mathcal{A}) [\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu \dots \varepsilon_\rho]^{-1}.$$

Q désigne l'inverse du produit de tous les ε sur \mathcal{C} . La somme du second membre porte sur toute la famille des arbres \mathcal{A} sur \mathcal{C} . $\mathcal{A}(\alpha\beta\gamma\dots\delta)$ désigne l'arbre \mathcal{A} formé des lignes $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$. L'ensemble d'indices $\lambda, \mu, \nu, \dots, \rho$ désigne toujours les lignes de \mathcal{B} complémentaire de \mathcal{A} sur \mathcal{C} . $D(\mathcal{A})$ est un coefficient relatif à chaque arbre \mathcal{A} , qui ne dépend des ε que par l'intermédiaire des quantités $R_a(\varepsilon)$, $a \in \mathcal{C}$: c'est là le point essentiel. Nous démontrons cette identité en quatre étapes.

2'1.1. Contraction d'une ligne. – Soient a et b deux sommets de \mathcal{C} , joints par une ligne α . L'opération de contraction de la ligne α sur \mathcal{C} consiste à supprimer la ligne α et à confondre les sommets a et b en un seul sommet

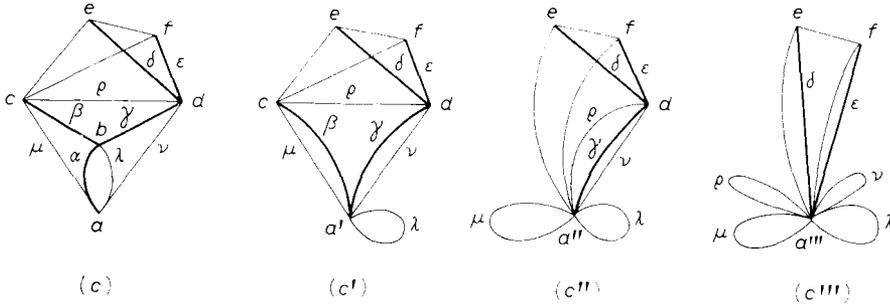


Fig. 5.

que nous appelons a' (Fig. 5). On a évidemment $R_{a'} = R_a + R_b$. Le graphe \mathcal{C}' obtenu par contraction de la ligne α sur \mathcal{C} contiendra des boucles en a' s'il existe une ou plusieurs lignes autres que α joignant b à a sur \mathcal{C} .

2'1.2. Décomposition d'un produit Q relatif à un sommet. – Soit a un sommet; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$ les quantités associées aux lignes orientées vers a ; $\varepsilon_{q+1}, \varepsilon_{q+2}, \dots, \varepsilon_r$ les quantités associées aux autres lignes issues de a . L'identité suivante est évidente:

$$(8) \quad Q = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_q \varepsilon_{q+1} \dots \varepsilon_r]^{-1} \equiv \frac{1}{R_a} \{ [\varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_r]^{-1} + [\varepsilon_1 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_r]^{-1} + \dots + [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \varepsilon_{q+1} \dots \varepsilon_r]^{-1} - [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_q \varepsilon_{q+2} \dots \varepsilon_r]^{-1} - \dots - [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_q \dots \varepsilon_{r-1}]^{-1} \}.$$

Nous interprétons cette décomposition du produit Q_a relatif aux lignes incidentes à un sommet a de \mathcal{C} en termes d'opérations de contraction. Nous pouvons dire que le produit total Q est la « somme » des produits attachés aux différents graphes obtenus par contraction d'une seule ligne incidente en a . Nous avons mis somme entre guillemets parce que nous ne nous occupons pas pour l'instant du signe des termes obtenus; mais seulement de la structure de la somme. Nous notons cependant la présence d'un facteur $1/R_a$ devant chaque terme.

2'1.3. Les contractions successives définissent un arbre. — Quel est l'effet d'une suite de contractions successives sur le graphe original \mathcal{C} ? Partons d'un sommet a et décidons de contracter toujours sur le même sommet. Par exemple, après contraction de b sur a , a devient a' ; après contraction de c sur a' , a' devient a'' , etc. On obtient ainsi une suite de graphes $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}'', \dots$, d'ordre $n, n-1, n-2, \dots$ où le sommet a , devient a', a'' , etc. Sur un graphe connexe d'ordre n on peut donc effectuer $n-1$ contractions successives, jusqu'au moment où tous les sommets sont confondus en un seul sommet $a^{(n)}$. Comme on a supprimé $n-1$ lignes, il reste donc $p-n+1$ boucles sur le sommet final unique $a^{(n)}$. Quel est la structure du graphe constitué des lignes successivement supprimées sur \mathcal{C} ? Il contient $n-1$ lignes. Il est d'ordre n , puisqu'il contient en plus de a les sommets de \mathcal{C} qui sont devenus $a', a'', a''', \dots, a^{(n)}$. Enfin il est connexe. On le voit par récurrence: si l'ensemble des lignes supprimées jusqu'à la $p-1$ -ième contraction est un graphe connexe $\mathcal{A}^{(p-1)}$, la p -ième ligne contractée a le point commun $a^{(p-1)}$ avec $\mathcal{A}^{(p-1)}$ et constitue le graphe connexe $\mathcal{A}^{(p)}$, or, un graphe connexe d'ordre n de $n-1$ lignes est un arbre (7). L'ensemble des lignes supprimées dans un processus de contraction, tel que nous venons de le décrire, est donc un arbre \mathcal{A} .

2'1.4. Décomposition du produit dans un processus de contractions. — A l'étape 2'1.2, nous avons associé à une opération de contraction sur \mathcal{C} , une décomposition du produit $Q = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p]^{-1}$. A quelle décomposition de Q nous mène un processus de $n-1$ contractions successives? On peut exprimer ainsi d'après 2'1.2 l'effet sur Q d'une contraction de la ligne α sur le sommet a : une contraction de la ligne α supprime dans Q le facteur $1/\varepsilon_\alpha$ et introduit un facteur $1/R_a$. On peut continuer ainsi: une contraction de la ligne β , sur a' , supprime le facteur $1/\varepsilon_\beta$ et introduit un facteur $1/R_{a'}$. Or $R_{a'}$ est nécessairement égal à $R_a + R_b$, car a' a été obtenu en confondant un sommet b avec a . De même $R_{a''}$ est de la forme $R_{a'} + R_c = R_a + R_b + R_c$.

Ainsi après $n-1$ contractions des lignes $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$, il reste à Q une contribution $[\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu \dots \varepsilon_\rho]^{-1}$ associée au complémentaire $\mathcal{B}(\lambda\mu\nu \dots \rho)$ de $\mathcal{A}(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$,

(7) Voir réf. (4), Chapitre XVI, Th. 1.

que multiplie un coefficient de la forme $1/R_a R_a' R_a'' \dots$ qui ne dépend que des quantités R_a, R_b, R_c, \dots . L'identité préliminaire est donc démontrée. Le coefficient du terme $[\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu \dots \varepsilon_\rho]^{-1}$ est évidemment une somme de termes de la forme

$$\sum \pm \frac{1}{R_a R_a' R_a'' \dots}$$

étendue à tous les processus de contractions possibles qui fournissent le même arbre \mathcal{A} . Nous allons déterminer ce coefficient au paragraphe suivant par une méthode indirecte.

2°2. Théorème. — Soient ε_i et z_i les quantités associées à la ligne i ($i = 1, 2, \dots, p$) d'un graphe \mathcal{C} d'ordre n . Les ε sont des paramètres indépendants, mais les z sont supposés liés par les relations de conservation en chaque sommet

$$R_a(z) = 0 \quad \text{pour tout } a \text{ sur } \mathcal{C}.$$

On a l'identité suivante

$$(9) \quad P = \frac{1}{(\varepsilon_1 - z_1)(\varepsilon_2 - z_2) \dots (\varepsilon_p - z_p)} \equiv \sum_{[\mathcal{A}(\alpha\beta\gamma\dots\delta)]} \frac{1}{(\varepsilon_\alpha - \mathcal{E}_\alpha)(\varepsilon_\beta - \mathcal{E}_\beta) \dots (\varepsilon_\delta - \mathcal{E}_\delta)} \frac{1}{(\varepsilon_\lambda - z_\lambda)(\varepsilon_\mu - z_\mu) \dots (\varepsilon_\rho - z_\rho)},$$

où la somme est étendue à tous les arbres \mathcal{A} d'ordre n sur \mathcal{C} et où les $n - 1$ formes linéaires $\mathcal{E}_\alpha(\varepsilon)$ sont les fonctions de $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \dots, \varepsilon_\rho$ définies à la Sect. 1°3. On peut écrire l'identité (9) sous la forme plus concise

$$(10) \quad \prod_{\mathcal{C}} \frac{1}{\varepsilon - z} = \sum_{[\mathcal{A}]} \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{E}} \right) \left(\prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{\varepsilon - z} \right).$$

Démonstration. — a) Dans l'identité préliminaire (7), remplaçons les nombres ε_i par $\varepsilon_i - z_i$. Les coefficients $D(\mathcal{A})$ ne dépendent des ε que par l'intermédiaire des quantités R . Or

$$R(\varepsilon - z) = R(\varepsilon) - R(z) = R(\varepsilon).$$

Les coefficients $D(\mathcal{A})$ sont donc invariants dans la transformation $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i - z_i$, et nous pouvons écrire

$$(11) \quad P = \frac{1}{(\varepsilon_1 - z_1)(\varepsilon_2 - z_2) \dots (\varepsilon_p - z_p)} \equiv \sum_{[\mathcal{A}(\alpha\beta\dots\delta)]} D(\mathcal{A}) \frac{1}{(\varepsilon_\lambda - z_\lambda)(\varepsilon_\mu - z_\mu) \dots (\varepsilon_\rho - z_\rho)}$$

où les $D(\mathcal{A})$ ne dépendent que des ε .

b) Calculons le coefficient $D(\tilde{\mathcal{A}})$ relatif à l'arbre $\tilde{\mathcal{A}}$. C'est le « résidu » du « pôle » de l'expression P considérée comme une fonction des variables z indépendantes associées à $\tilde{\mathcal{B}}$. Multiplions les deux membres de l'égalité (11) par $(\varepsilon_{\tilde{\lambda}} - z_{\tilde{\lambda}}) \dots (\varepsilon_{\tilde{\varrho}} - z_{\tilde{\varrho}})$ où $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \dots, \tilde{\varrho}$ sont les indices de $\tilde{\mathcal{B}}$ complémentaire de $\tilde{\mathcal{A}}$ sur \mathcal{C} . Nous obtenons au premier membre de (11)

$$\frac{1}{(\varepsilon_{\tilde{\alpha}} - z_{\tilde{\alpha}})\varepsilon_{\tilde{\beta}} - z_{\tilde{\beta}}) \dots (\varepsilon_{\tilde{\delta}} - z_{\tilde{\delta}})}$$

et au second membre

$$(12) \quad D(\tilde{\mathcal{A}}) + \sum_{[\mathcal{A}' \neq \tilde{\mathcal{A}}]} D(\mathcal{A}') \frac{(\varepsilon_{\tilde{\lambda}} - z_{\tilde{\lambda}}) \dots (\varepsilon_{\tilde{\varrho}} - z_{\tilde{\varrho}})}{(\varepsilon_{\tilde{\lambda}} - z_{\tilde{\lambda}})(\varepsilon_{\tilde{\mu}} - z_{\tilde{\mu}}) \dots (\varepsilon_{\tilde{\varrho}} - z_{\tilde{\varrho}})}.$$

Il existe en général dans chaque \mathcal{B} des lignes qui appartiennent à $\tilde{\mathcal{B}}$, en ce cas la fraction se simplifie au second membre, mais le quotient ne peut se réduire à 1, car \mathcal{B} est distinct de $\tilde{\mathcal{B}}$. Après simplification les indices figurant au dénominateur n'appartiennent plus à l'ensemble $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \dots, \tilde{\varrho}$. Ils appartiennent donc à l'ensemble complémentaire $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \dots, \tilde{\delta}$.

Considérant alors les nombres $z_{\tilde{\alpha}}, z_{\tilde{\beta}}, \dots, z_{\tilde{\delta}}$, comme fonctions des variables $z_{\tilde{\lambda}}, z_{\tilde{\mu}}, \dots, z_{\tilde{\varrho}}$ définies par la solution (3) du système (2), nous faisons tendre $z_{\tilde{\lambda}}$ vers $\varepsilon_{\tilde{\lambda}}, z_{\tilde{\mu}}$ vers $\varepsilon_{\tilde{\mu}}, \dots, z_{\tilde{\varrho}}$ vers $\varepsilon_{\tilde{\varrho}}$. La quantité $z_{\tilde{\alpha}}$ tend vers $\mathcal{E}_{\tilde{\alpha}}(\varepsilon), z_{\tilde{\beta}}$ vers $\mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$, etc. Le premier membre de (12) tend vers $[(\varepsilon_{\tilde{\alpha}} - \mathcal{E}_{\tilde{\alpha}})(\mathcal{E}_{\tilde{\beta}} - \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}) \dots (\varepsilon_{\tilde{\delta}} - \mathcal{E}_{\tilde{\delta}})]^{-1}$, où les dénominateurs sont supposés non accidentellement nuls. Ils ne peuvent l'être identiquement car si l'on avait $\varepsilon_{\tilde{\alpha}} - \mathcal{E}_{\tilde{\alpha}} \equiv 0$, il existerait, d'après (5), une identité autre que (4) entre les R , ce qui n'est pas, d'après les conclusions de la Sect. 1'2.

La somme du second membre de (12) tend vers zéro. En effet, les dénominateurs sont non nuls par hypothèse, puisque les facteurs qui constituent le dénominateur de la fraction après simplification sont extraits de la suite $\varepsilon_{\tilde{\alpha}} - \mathcal{E}_{\tilde{\alpha}}, \dots, \varepsilon_{\tilde{\delta}} - \mathcal{E}_{\tilde{\delta}}$. D'autre part, au numérateur, il existe des termes qui tendent vers zéro, puisque $\mathcal{B} \neq \tilde{\mathcal{B}}$. En conséquence, le second membre de (12) tend vers $D(\tilde{\mathcal{A}})$ et l'on a

$$(13) \quad D(\tilde{\mathcal{A}}) = \frac{1}{(\varepsilon_{\tilde{\alpha}} - \mathcal{E}_{\tilde{\alpha}}) \dots (\varepsilon_{\tilde{\delta}} - \mathcal{E}_{\tilde{\delta}})} = \prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{E}}.$$

2'3. *Extension aux graphes comprenant des lignes externes.* – Nous nous sommes limités jusqu'ici aux graphes dont tous les sommets étaient de degré supérieur à 1. Nous considérons maintenant les graphes avec lignes externes auxquelles nous associons encore deux nombres ε et z . Soit Γ le graphe obtenu en supprimant les lignes externes. Nous cherchons, pour le produit P associé aux seules lignes

internes, une décomposition analogue à celle donnée par la formule (10). Dans la définition de P

$$P = \prod_I \frac{1}{\varepsilon - z}$$

on voit que les quantités ε relatives aux lignes externes ne jouent aucun rôle. Nous les avons introduites comme auxiliaires de calcul.

Soit \mathcal{C} le graphe obtenu en réunissant les extrémités libres des lignes externes, numérotées de 1 à s , à un sommet supplémentaire de degré s , que nous appelons ω . Nous avons donc

$$R_\omega(z) = 0.$$

Formons le produit Q associé au graphe \mathcal{C}

$$(14) \quad Q = \prod_{\mathcal{C}} \frac{1}{\varepsilon - z} = \frac{1}{(\varepsilon_1 - z_1)(\varepsilon_2 - z_2) \dots (\varepsilon_s - z_s)} \prod_I \frac{1}{\varepsilon - z}$$

et appliquons le théorème (10), en désignant par \mathcal{A}' un arbre sur I' et \mathcal{B}' le complémentaire de \mathcal{A}'

$$Q = \sum_{|\mathcal{A}'|} D(\mathcal{A}') \left(\prod_{\mathcal{B}'} \frac{1}{\varepsilon - z} \right).$$

Partageons l'ensemble des arbres \mathcal{A}' en deux classes:

a) la classe des arbres \mathcal{A}_1 sur \mathcal{C} qui contiennent la ligne n° 1 et le point ω comme sommet « pendant », c'est-à-dire comme une ligne extrême de l'arbre. Cette classe est formée des arbres \mathcal{A} sur I' auxquels on a ajouté la ligne n° 1. On appelle \mathcal{B} le complémentaire de \mathcal{A} sur I' , c'est-à-dire \mathcal{B}_1 diminué des lignes externes n° 2, 3, ..., s .

b) La classe des arbres qui n'appartiennent pas à la classe \mathcal{A}_1 , soit \mathcal{A}_2 .

La somme Q est divisée en deux sommes:

$$(15) \quad Q = \sum_{|\mathcal{A}_1|} D(\mathcal{A}_1) \left(\prod_{\mathcal{B}_1} \frac{1}{\varepsilon - z} \right) + \sum_{|\mathcal{A}_2|} D(\mathcal{A}_2) \left(\prod_{\mathcal{B}_2} \frac{1}{\varepsilon - z} \right).$$

Puisque \mathcal{B}_1 contient les lignes 2, 3, ..., s , on a

$$(16) \quad \prod_{\mathcal{B}_1} \frac{1}{\varepsilon - z} = \frac{1}{(\varepsilon_2 - z_2) \dots (\varepsilon_s - z_s)} \prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{\varepsilon - z}.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (15) par $(\varepsilon_1 - z_1) \dots (\varepsilon_s - z_s)$ pour

obtenir d'après (14) et (16),

$$(17) \quad \prod_F \frac{1}{\varepsilon - z} = \sum_{\{\mathcal{A}_1\}} \left(D(\mathcal{A}_1)(\varepsilon_1 - z_1) \prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - z} \right) +$$

+ termes contenant au moins l'un des facteurs $(\varepsilon_2 - z_2), \dots, (\varepsilon_s - z_s)$.

Les quantités $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_s$ relatives aux lignes externes étant arbitraires, nous posons $\varepsilon_2 = z_2, \dots, \varepsilon_s = z_s$, et l'égalité (17) s'écrit

$$\prod_F \frac{1}{\varepsilon - z} = \sum_{\{\mathcal{A}_1\}} D(\mathcal{A}_1)(\varepsilon_1 + z_2 + \dots + z_s) \prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - z} :$$

or

$$D(\mathcal{A}_1, \varepsilon_2 = z_2, \dots, \varepsilon_s = z_s) \cdot (\varepsilon_1 + z_2 + \dots + z_s) = D(\mathcal{A}; \varepsilon_2 = z_2, \dots, \varepsilon_s = z_s),$$

on obtient donc la formule finale

$$(18) \quad \prod_F \frac{1}{\varepsilon - z} = \sum_{\{\mathcal{A}'\}} \left(D'(\mathcal{A}') \prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - z} \right),$$

avec

$$(19) \quad D'(\mathcal{A}') = \prod_{\mathcal{C}} \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{C}},$$

où les \mathcal{C} sont les formes linéaires des ε relatifs aux lignes internes, et des z relatifs aux lignes externes, obtenues en résolvant le système

$$R_a(z) = 0 \qquad a \in \mathcal{C}$$

par rapport aux variables associées à l'arbre \mathcal{A} , c'est-à-dire que le coefficient $D'(\mathcal{A}')$ est le résultat de la substitution $z_\alpha = \mathcal{C}'_\alpha(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_q, z_2, \dots, z_s)$ etc. dans $\prod_{\mathcal{A}'} 1/\varepsilon - z$.

On a encore la formule commode, analogue à (5),

$$(20) \quad \varepsilon_\alpha - \mathcal{C}'_\alpha = \sum_{a \in \mathcal{A}'_\alpha} R_a(\varepsilon),$$

où l'on convient d'identifier les ε et les z relatifs aux lignes externes.

3. - Application aux diagrammes de la mécanique statistique quantique.

3'1. - Si nous essayons d'appliquer directement les résultats précédents aux termes du développement de perturbation du potentiel de Gibbs par

exemple, d'un système de particules identiques, nous nous heurtons à une difficulté.

Prenons un système invariant par translation: les états de particules sont repérés par l'impulsion. Celle-ci est conservée à chaque interaction. A la ligne d'impulsion k est associée l'énergie $E_k = (k^2/2M) - \mu$. Nous voyons tout de suite que si le graphe \mathcal{G} , que nous voulons évaluer, contient une « partie diagonale » relative à l'impulsion k , les quantités E_k associées à ces lignes k seront les mêmes; nous avons donc des identités entre certaines quantités ε du théorème (10), ce qui est contraire à l'hypothèse d'indépendance de la Sect. 1'1. En effet dans la formule (10), certains dénominateurs $\varepsilon - \mathcal{E}$ seraient identiquement nuls. N'ayant pu généraliser de façon commode la formule (10) pour la rendre directement applicable aux graphes réductibles, nous l'appliquerons aux graphes irréductibles d'une théorie des perturbations renormalisée où l'on associe à chaque ligne le propagateur complet ⁽⁸⁾.

3'1.1. – Prenons l'exemple du potentiel de Gibbs d'un système de fermions. Les graphes sont connexes, sans lignes externes, sans boucles; les sommets sont de degré 4. A chaque sommet est associé un temps u , $0 \leq u \leq \beta$, et à la ligne d'impulsion k joignant u' à u est associé le propagateur complet $G_k(u - u')$. Cette fonction admet la représentation suivante ⁽⁹⁾

$$(21) \quad G_k(u - u') = \begin{cases} \int \varrho_k(\varepsilon) f^-(\varepsilon) \exp[-\varepsilon(u - u')] d\varepsilon, & u \leq u', \\ \int \varrho_k(\varepsilon) f^+(\varepsilon) \exp[-\varepsilon(u - u')] d\varepsilon, & u > u', \end{cases}$$

avec

$$(22) \quad \begin{cases} f^-(\varepsilon) = -\frac{1}{\exp[\beta\varepsilon] + 1}, & f^+(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[-\beta\varepsilon] + 1}, \\ \varrho_k(\varepsilon) \geq 0 & \text{et} \quad \int \varrho_k(\varepsilon) d\varepsilon = 1. \end{cases}$$

Nous définissons $g(\varepsilon, u - u')$ en rassemblant les égalités (21) sous la forme

$$(23) \quad G_k(u - u') = \frac{1}{\beta} \int \varrho_k(\varepsilon) g(\varepsilon, u - u') d\varepsilon.$$

La contribution d'un graphe Γ d'ordre n , avec $p = 2n$ lignes fait intervenir

⁽⁸⁾ Voir réf. ^(2,3).

⁽⁹⁾ J. M. LUTTINGER: *Phys. Rev.*, **121**, 942 (1961).

l'expression suivante:

$$W(I) = \beta^n \int_0^\beta du_1 \int_0^\beta du_2 \dots \int_0^\beta du_n \prod_I G_k(u - u').$$

Substituant dans $W(I)$ les expressions (23) des G_k , il est possible d'invertir l'ordre des intégrations sur les ε et sur les u , à cause des propriétés (22). Il suffit donc de calculer l'intégrale suivante:

$$(24) \quad I(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p) = \frac{1}{\beta^n} \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod_I g(\varepsilon, u - u')$$

ce qui donnera pour $W(I)$

$$(25) \quad W(I) = \int d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_p I(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p) \varrho_{k_1}(\varepsilon_1) \dots \varrho_{k_p}(\varepsilon_p).$$

Notons que pour les fermions, l'intégrant de (25) est borné par 1 et pour les bosons par $\prod_I 1/\varepsilon$.

3'1.2 - Nous allons maintenant évaluer l'intégrale (24) comme la valeur limite de la fonction de p variables réelles $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ que nous définissons ainsi:

$$(26) \quad I(\varepsilon; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) = \frac{1}{\beta^n} \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod g(\varepsilon, u - u' - \tau).$$

Il est clair que si les τ sont bornés, l'intégrant l'est aussi uniformément et l'on a

$$(27) \quad I(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} I(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p; \tau_1 \dots \tau_p),$$

quelque soit la manière dont les τ tendent vers zéro. On transforme $I(\varepsilon, \tau)$ en substituant dans l'intégrale (26) le développement en série de Fourier, de période 2β , des fonctions $g(\varepsilon, u)$:

$$(28) \quad g(\varepsilon, u) = \sum_l \left(\varepsilon - \frac{\pi il}{\beta} \right)^{-1} \exp -\frac{\pi il}{\beta} u$$

où la somme porte sur les entiers algébriques l pairs ou impairs suivant qu'il s'agit de bosons ou de fermions. Comme la série (28) n'est pas absolument

convergente, nous utiliserons la somme partielle

$$(29) \quad g(\varepsilon, u, L) = \sum_{\substack{|l| < L \\ \beta z = \pi i l}} \frac{1}{\varepsilon - z} \exp[-zu].$$

L'on a

$$\lim_{L \rightarrow \infty} g(\varepsilon, u, L) = g(\varepsilon, u).$$

La convergence est uniforme par rapport à u sur tout intervalle qui exclut les points de discontinuité $u = 0$ et $|u| = \beta$ de la fonction $g(\varepsilon, u)$. Nous pouvons donc intervertir l'ordre de la limite sur L , et de l'intégration sur les temps u :

$$(30) \quad I(\varepsilon, \tau_1 \dots \tau_p) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta^n} \int_0^\beta du_1 \dots du_n \prod_I g(\varepsilon, u - u' - \tau, L).$$

D'après (29), nous obtenons

$$(31) \quad \begin{aligned} I(\varepsilon, \tau_1, \dots, \tau_p) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{|l_j| < L} \frac{1}{\beta^n} \int_0^\beta du_1 \dots \int_0^\beta du_n \prod_I \frac{\exp[+z\tau]}{\varepsilon - z} \exp[-z(u - u')] = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{|l_j| < L} \left(\prod_I \frac{\exp[z\tau]}{\varepsilon - z} \right) \cdot \frac{1}{\beta} \int_0^\beta du_1 \exp[u_1 R_1(z)] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\beta} \int_0^\beta du_2 \exp[u_2 R_2(z)] \cdot \dots \cdot \frac{1}{\beta} \int_0^\beta du_n \exp[u_n R_n(z)]. \end{aligned}$$

L'intégration sur les u nous donne les n relations de conservation des variables z (ou l):

$$R_a(z) = 0, \quad \text{pour tout sommet } a \text{ de } I,$$

et nous obtenons pour $I(\varepsilon, \tau)$

$$(32) \quad I(\varepsilon, \tau) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{|l_j| < L, l \text{ liés}} \prod_I \frac{\exp[z\tau]}{\varepsilon - z}.$$

Dans cette expression (32), la somme porte sur les variables l liées par les relations de conservation, donc en fait sur $p - n + 1$ variables indépendantes, et elle est limitée au domaine \mathcal{D} , $|l_1| < L$, $|l_2| < L$, ..., $|l_p| < L$. Ce domaine est un polyèdre convexe de l'espace à $p - n + 1$ dimensions des variables indépendantes puisque les relations entre les l sont linéaires.

3'1.3. – La forme (32) se prête à l'application directe du théorème de décomposition (10):

$$(33) \quad \prod_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon - z} = \sum_{[\mathcal{A}]} \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - z} \right) \left(\prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{C}} \right),$$

où \mathcal{A} désigne un arbre sur Γ et \mathcal{B} le graphe formé des lignes de Γ qui ne sont pas sur \mathcal{A} .

D'autre part, la somme $\sum z\tau = z_1\tau_1 + z_2\tau_2 + \dots + z_p\tau_p$ s'exprime, relativement à chaque arbre $\mathcal{A}(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$, comme une forme linéaire des variables indépendantes $z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\rho$:

$$(34) \quad \sum_{j \in \Gamma} z_j \tau_j = z_\lambda T_\lambda + z_\mu T_\mu + \dots + z_\rho T_\rho.$$

Nous déterminerons plus loin les formes linéaires T_λ des paramètres τ , pour chaque arbre \mathcal{A} .

A l'aide de (33) et (34), l'expression (32) de $I(\varepsilon, \tau)$ s'écrit

$$(35) \quad I(\varepsilon, \tau_1 \dots \tau_p) = \sum_{[\mathcal{A}]} \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{C}} \right) \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{|l_j| < L \text{ liés}} \frac{\exp [z_\lambda T_\lambda]}{\varepsilon_\lambda - z_\lambda} \frac{\exp [z_\mu T_\mu]}{\varepsilon_\mu - z_\mu} \dots \frac{\exp [z_\rho T_\rho]}{\varepsilon_\rho - z_\rho}.$$

$I(\varepsilon, \tau)$ se décompose en une somme de termes relatifs chacun à un arbre \mathcal{A} , c'est-à-dire à un système de variables indépendantes sur Γ . Puisque la somme sur les $z = \pi i l / \beta$ est limitée à un polyèdre $\mathcal{D}(\mathcal{A}, L)$ comprenant un nombre fini de « points » ($z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\rho$) on peut écrire

$$\sum_{|l_j| < L, \text{ liés}} = \sum_{\mathcal{D}(\mathcal{A}, L)}$$

où $\mathcal{D}(\mathcal{A}, L)$ est limité par les plans $z_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(z)$, etc., contient donc l'ensemble des points à coordonnées entières définies par les inégalités

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_\alpha(l_\lambda, l_\mu, \dots, l_\rho)| < L, \\ |\mathcal{E}_\alpha(l_\lambda, l_\mu, \dots, l_\rho)| < L, \quad \text{etc.} \\ \dots \dots \dots \\ |l_\lambda| < L, \quad |l_\mu| < L, \quad \dots, \quad |l_\rho| < L. \end{aligned}$$

La question est maintenant de calculer la limite de la quantité

$$(36) \quad I(\mathcal{A}, L) = \sum_{\mathcal{D}(\mathcal{A}, L)} \frac{\exp [z_\lambda T_\lambda]}{\varepsilon_\lambda - z_\lambda} \frac{\exp [z_\mu T_\mu]}{\varepsilon_\mu - z_\mu} \dots \frac{\exp [z_\rho T_\rho]}{\varepsilon_\rho - z_\rho}$$

lorsque L augmente indéfiniment.

Il suffit de remarquer que $I(\mathcal{A}, L)$ est une série de Fourier dont les coefficients sont à croissance lente au sens de la théorie des distributions ⁽¹⁰⁾. On peut dire que $I(\mathcal{A}, \infty)$ est la transformée de Fourier d'une mesure sur \mathbf{R}^{p-n+1} à croissance lente ⁽¹¹⁾. On a en effet

$$\sum_{(z_\lambda, z_\mu, \dots, z_\rho) \in \mathcal{D}(L)} \left| \frac{1}{\varepsilon_\lambda - z_\lambda} \dots \frac{1}{\varepsilon_\rho - z_\rho} \right| \leq \leq \frac{1}{|\varepsilon_\lambda + i/\beta| \dots |\varepsilon_\rho + i/\beta|} \cdot \text{volume } \mathcal{D}(\mathcal{A}, L) \leq (\text{diamètre de } \mathcal{D})^{p-n+1} \cdot \text{const}$$

et on peut en conclure ⁽¹²⁾

$$(37) \quad \lim_{\mathcal{A}(\mathcal{D}, L) \rightarrow \mathbf{R}^{p-n+1}} I(\mathcal{A}, L) = I(\mathcal{A}, \infty)$$

au sens de l'égalité de deux distributions. Or la transformée de Fourier $I(\mathcal{A}, \infty)$ est le produit direct ⁽¹³⁾ des transformées de Fourier de $1/(\varepsilon_\lambda - z_\lambda)$, $1/(\varepsilon_\mu - z_\mu)$, ...; on en déduit

$$(38) \quad I(\mathcal{A}, \infty) = g(\varepsilon_\lambda, T_\lambda) g(\varepsilon_\mu, T_\mu) \dots g(\varepsilon_\rho, T_\rho)$$

où la distribution $g(\varepsilon, T)$ a le développement de Fourier (28). Or cette distribution est une fonction dans tout domaine où les T ne s'annulent pas.

Rassemblant les égalités (35), (37) et (38) on déduit l'égalité numérique suivante, valable pour les valeurs des $\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_p$ telles qu'aucune des quantités T ne soit nulle

$$(39) \quad I(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p, \tau_1 \dots \tau_p) = \sum_{[\mathcal{A}]} \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{E}} \right) \left(\prod_{\mathcal{B}} g(\varepsilon, T) \right).$$

Les conditions de validité de l'égalité ci-dessus expliquent pourquoi il était nécessaire d'introduire les quantités τ , afin que chaque terme du second membre ait un sens.

3.1.4. – Avant d'effectuer sur chaque terme la limite $\tau \rightarrow 0$, disons comment construire les formes linéaires T , associées à un arbre \mathcal{A} .

Etant donné un arbre $\mathcal{A}(\alpha\beta \dots \delta)$ et la solution (3) du système linéaire (2), substituons $z_\alpha, z_\beta, \dots, z_\delta$ exprimées en fonction des variables indépendantes

⁽¹⁰⁾ L. SCHWARTZ: *Théorie des Distributions*, Tome II, Chap. VII, Th. 1 (Paris, 1960), p. 80.

⁽¹¹⁾ Voir réf. ⁽¹⁰⁾, p. 98, formule VII, 4; 7.

⁽¹²⁾ Voir réf. ⁽¹⁰⁾, p. 111, formule VII, 7; 7.

⁽¹³⁾ Voir réf. ⁽¹⁰⁾, Chap. VII, Sect. 8, Th. XIV.

dans la somme $\sum_{j=1}^p z_j \tau_j$

$$\sum z\tau = (z_\alpha \tau_\alpha + \dots + z_\delta \tau_\delta) + (z_\lambda \tau_\lambda + \dots + z_\rho \tau_\rho) = z_\lambda T_\lambda + z_\mu T_\mu + \dots + z_\rho T_\rho .$$

avec

$$(40) \quad \begin{cases} T_\lambda = T_\lambda(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_p), \\ T_\mu = T_\mu(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_p), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Avec les règles et les notations de la Sect. 1'2, on peut énoncer: T_λ est la « somme » des variables τ associées aux lignes du cycle (λ). τ_α est précédé du signe + si la ligne α est orientée dans le même sens que le cycle (λ), précédé du signe — dans le cas contraire.

3'1.5. — Le passage à la limite $\tau = 0$.

Evidemment $I(\varepsilon, \tau_1, \dots, \tau_p)$ tend vers $I(\varepsilon)$ quelle que soit la façon dont les quantités τ tendent vers zéro, d'après la convergence absolue de l'intégrale (26). Mais il n'en est pas de même de chaque terme de la somme (39). Le plus commode pour utiliser ce développement consiste à choisir les τ_j multiples d'un même module $\theta > 0$:

$$\tau_j = n_j \theta, \quad n_j \text{ entier algébrique.}$$

La quantité $g(\varepsilon_\lambda, T_\lambda)$ tend vers $f^+(\varepsilon_\lambda)$ ou $f^-(\varepsilon_\lambda)$ selon que T_λ est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que la somme $\sum_{\alpha \in (\lambda)} \pm n_\alpha$ est positive ou négative (elle ne doit pas être nulle).

Supposons que l'on puisse prendre tous les n_j égaux à +1 pour toutes les lignes du graphe Γ . La quantité T_λ est de la forme $N_\lambda \theta$ où N_λ est ce que nous appellerons « l'orientation totale » du cycle (λ): c'est en effet le nombre de lignes du cycle (λ) orientées dans le même sens que la ligne λ , diminué du nombre de lignes orientées dans le sens opposé. Supposons que pour tous les arbres possibles sur Γ , les « orientations totales » des cycles soient toujours différentes de zéro; alors il n'y a pas de difficultés: pour chaque ligne λ sur \mathcal{B} , on a un facteur f^+ ou f^- suivant que l'orientation totale est positive ou négative.

Si au contraire il existe des arbres \mathcal{A} , pour lesquels l'orientation totale est nulle, alors il faut trouver un autre choix que tous les n_j égaux à un, en renforçant pour ainsi dire l'orientation d'une ligne particulière, c'est-à-dire en lui affectant un nombre entier supérieur à un. Nous montrerons, sur un exemple complétant celui qui a été donné dans l'introduction, comment ces règles s'appliquent très simplement, pour les graphes d'ordre peu élevé.

3'2 - Règles. - En résumé, nous pouvons énoncer les règles suivantes pour calculer la quantité $I(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p)$ qui intervient dans le poids associé à un graphe Γ d'ordre n , de p lignes, irréductible, sans boucle.

a) Construire la famille de tous les arbres \mathcal{A} sur Γ . \mathcal{A} est un graphe connexe, sans cycle, d'ordre n .

b) Définir l'orientation de chaque ligne de Γ , par un nombre entier n , de telle sorte que l'orientation totale N de tout cycle sur Γ soit définie, c'est-à-dire: $N \neq 0$.

c) La contribution à I du graphe Γ est la somme des contributions à $I(\mathcal{A})$ de chaque arbre \mathcal{A} .

$I(\mathcal{A})$ est un produit de $p - n + 1$ facteurs statistiques et de $n - 1$ facteurs du type $1/(\varepsilon - \mathcal{E})$, appelés dénominateurs d'énergie.

c.1) A toute ligne ε_λ qui n'est pas sur \mathcal{A} , est associé un facteur statistique $f^+(\varepsilon_\lambda)$ ou $f^-(\varepsilon_\lambda)$, suivant que l'orientation totale N_λ du cycle (λ) défini par la ligne λ et l'arbre \mathcal{A} est positive ou négative.

c.2) A toute ligne ε_α qui est sur \mathcal{A} , correspond un état intermédiaire et un dénominateur d'énergie de la façon suivante: la suppression idéale de la ligne α coupe l'arbre \mathcal{A} en deux arbres \mathcal{A}_α^+ et \mathcal{A}_α^- . Les lignes qui joignent les sommets de \mathcal{A}_α^+ à ceux de \mathcal{A}_α^- définissent un état intermédiaire qui comprend la seule ligne α de \mathcal{A} : les autres lignes n'appartiennent pas à \mathcal{A} . Le dénominateur d'énergie est la somme des variables correspondant à ces lignes, avec le signe $+$ pour les lignes orientées dans le même sens que α et le signe $-$ dans le cas contraire.

d) Ces règles s'appliquent aux graphes avec lignes externes. Il ne faut pas tenir compte des lignes externes pour la construction des arbres \mathcal{A} , mais elles interviennent par contre dans la définition des dénominateurs d'énergie où figure la somme des variables z , relatives aux lignes externes se rattachant à \mathcal{A}_α^+ (ou à \mathcal{A}_α^-).

e) Le nombre d'arbres sur un graphe Γ se calcule de la façon suivante ⁽¹⁴⁾: on construit la matrice $n \times n$, symétrique, d'éléments non diagonaux $a_{ji} = -1$ ou 0 selon que i et j sont joints par une ligne ou non. Les éléments diagonaux sont définis par $a_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$. Le nombre d'arbres est égal à un mineur d'ordre $n - 1$ quelconque sur la diagonale principale. Lorsque l'ordre du graphe Γ augmente, le nombre d'arbres est bien inférieur aux nombres de diagrammes ordonnés dans le temps (pour les graphes dont tous les sommets sont de degré

(14) Voir réf. (4), Chap. XVI, p. 155, Th. 6.

4 ou 3 par exemple) pour le degré 4, par exemple, le nombre d'arbres est inférieur à 4^{n-1} .

En guise de conclusion, nous constatons que le développement obtenu pour le potentiel thermodynamique, par exemple, se présente comme une fonctionnelle réelle des densités spectrales $\varrho_k(\varepsilon)$. Nous avons donné le mode de calcul du noyau I qui figure dans la formule (25) pour le poids $W(I)$ du graphe I . Il serait intéressant de pouvoir écrire

$$W(I) = \sum_{[\mathcal{A}]} W(\mathcal{A}),$$

où $W(\mathcal{A})$, relatif à l'arbre \mathcal{A} de I , aurait pour noyau $I(\mathcal{A})$. Mais il faut alors donner un sens à l'intégrale sur les ε du noyau $I(\mathcal{A})$, dont le dénominateur peut s'annuler. On peut sans doute complexifier à nouveau le problème en déplaçant légèrement les contours d'intégrations sur les variables ε , les uns par rapport aux autres. A cause de la structure particulière de $I(\mathcal{A})$

$$I(\mathcal{A}) = f^{\pm}(\varepsilon_\lambda) f^{\pm}(\varepsilon_\mu) \dots f^{\pm}(\varepsilon_\rho) \frac{1}{(\varepsilon_\alpha - \mathcal{E}_\alpha) \varepsilon_\beta - \mathcal{E}_\beta) \dots (\varepsilon_\delta - \mathcal{E}_\delta)}$$

où les \mathcal{E} ne dépendent que de ε_λ , nous pouvons écrire :

$$W(\mathcal{A}) = \int \dots \int d\varepsilon_\lambda \dots d\varepsilon_\rho f^{\pm}(\varepsilon_\lambda) \varrho(\varepsilon_\lambda) \dots f^{\pm}(\varepsilon_\rho) \varrho(\varepsilon_\rho) \cdot \left[\int d\varepsilon_\alpha \frac{\varrho(\varepsilon_\alpha)}{\varepsilon_\alpha - \mathcal{E}_\alpha} \right] \left[\int d\varepsilon_\beta \frac{\varrho(\varepsilon_\beta)}{\varepsilon_\beta - \mathcal{E}_\beta} \right] \dots \left[\int d\varepsilon_\delta \frac{\varrho(\varepsilon_\delta)}{\varepsilon_\delta - \mathcal{E}_\delta} \right];$$

où l'on a donné un sens à l'intégrale

$$\int d\varepsilon \frac{\varrho(\varepsilon)}{\varepsilon - \mathcal{E}},$$

dès que les dénominateurs ont une partie imaginaire. On aimerait cependant pouvoir exprimer directement $W(\mathcal{A})$ avec les seules quantités réelles $\varrho^{\pm}(\varepsilon)$ et $P \int (d\varepsilon/(\varepsilon - \mathcal{E})) \varrho(\varepsilon)$.

3'3. *Exemple.* - Contribution du graphe \mathcal{C}_2 (Fig. 6), du second ordre, pour le potentiel thermodynamique d'un système de fermions. Le résultat connu est le suivant :

$$I_2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4) = \frac{f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_2) f^-(\varepsilon_3) f^-(\varepsilon_4) - f^-(\varepsilon_1) f^-(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3) f^+(\varepsilon_4)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4}.$$

Appliquons les règles de la sect. 3.

Sur le graphe \mathcal{C}_2 , on peut construire 4 arbres, constitués chacun d'une seule ligne.

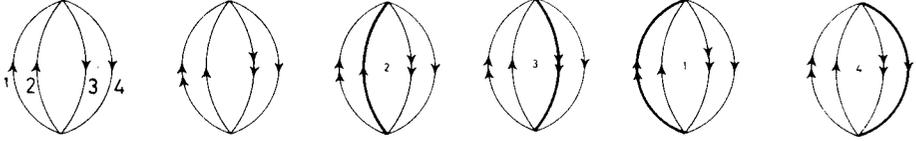


Fig. 6. - Cycle (2): $N = -1$; cycle (3): $N = +4$; cycle (4): $N = +3$.

Si on laisse l'orientation de chaque ligne de \mathcal{C}_2 telle qu'elle est définie par les flèches, on voit qu'il existe deux cycles d'orientation totale non définie: les cycles (1, 2) et (3, 4). Si nous renforçons l'orientation des lignes 1 et 3 (choix arbitraire) en leur associant l'indice $n_1 = 2$ et $n = 2$, ce que nous pouvons symboliser par deux flèches sur la ligne 1 et sur la ligne 3, nous voyons que l'orientation totale de tous les cycles possibles sur \mathcal{C}_2 est définie.

Les contributions des arbres $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ s'écrivent respectivement:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1: & \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4} f^-(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3) f^+(\varepsilon_4), \\ \mathcal{A}_2: & \frac{1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4} f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_3) f^+(\varepsilon_4), \\ \mathcal{A}_3: & \frac{1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2} f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_2) f^-(\varepsilon_4), \\ \mathcal{A}_4: & \frac{1}{\varepsilon_4 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2} f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3). \end{aligned}$$

Il faut noter que, pour les fermions, la définition (22) de $f^-(\varepsilon)$ a le signe opposé à celui de la définition usuelle.

Rassemblant les quatre contributions, on reconnaît une décomposition possible de la différence suivante:

$$\begin{aligned} & f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_2) f^-(\varepsilon_3) f^-(\varepsilon_4) - f^-(\varepsilon_1) f^-(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3) f^+(\varepsilon_4) = \\ & = f^-(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3) f^+(\varepsilon_4) + f^+(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3) f^+(\varepsilon_4) - f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_2) f^-(\varepsilon_4) - f^+(\varepsilon_1) f^+(\varepsilon_2) f^+(\varepsilon_3). \end{aligned}$$

L'exemple précédent illustre aussi le cas général où plusieurs lignes joignent les deux mêmes sommets d'un graphe. C'est le cas le plus défavorable pour ce qui est du nombre des termes. Cependant dans le cas des doubles lignes, il suffit de construire un seul arbre, au lieu de deux, et doubler le résultat. L'in-

tégration ultérieure sur les ε et les k permet donc de remplacer $I_2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)$ par

$$-2 \cdot \frac{f^+(\varepsilon_1)f^+(\varepsilon_2)f^0(\varepsilon_3)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4}$$

avec

$$f^0(\varepsilon) = \frac{1}{2}(f^+(\varepsilon) + f^-(\varepsilon)) .$$

4. – Application aux intégrales de Feynman.

Soit Γ un graphe de Feynman irréductible d'ordre n comprenant p lignes internes dont les impulsion et masse sont désignées par q_j et m_j ; l'intégrale de Feynman a la forme

$$(40) \quad F(\Gamma) = \int d^4k_1 \dots d^4k_l \prod_{j \in \Gamma} \frac{1}{q_j^2 - m_j^2} \cdot P(q) , \quad \text{Im } m_j^2 < 0 ,$$

où les l variables d'intégration k_1, \dots, k_l constituent un système de variables indépendantes sur Γ , ou variables de cycle. On a $l = p - n + 1$. $P(q)$ est un polynôme en q_1, \dots, q_p .

Si l'on considère dans (40) seulement l'intégration sur les composantes de temps $k_{10}, k_{20}, \dots, k_{l0}$, on a l'analogie de la somme (32) ou plutôt de sa forme limite $I(\varepsilon)$

$$I(\varepsilon) = \sum_{z_j \text{ liés}} \prod_{j \in \Gamma} \frac{1}{\varepsilon_j - z_j}$$

où les variables z_j jouent le rôle des variables k_{j0} .

Nous nous proposons d'employer la méthode de la Sect. 3 pour intégrer (40) sur les composantes de temps des 4-vecteurs k , l'invariance formelle relativiste étant provisoirement rompue. Introduisant comme précédemment p variables réelles τ_1, \dots, τ_p , on définit l'intégrale de Fourier suivante:

$$(41) \quad J(\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}) = \int dk_{10} \dots dk_{l0} \prod_{\Gamma} \frac{\exp[-iq_0\tau]}{q^2 - m^2} \cdot P(q) .$$

Nous nous limitons dans la suite au cas où, pour des valeurs de q fixés, cette intégrale est absolument convergente, ($P(q)$ est de degré inférieur ou égal à P). Nous avons donc

$$(42) \quad F = \int d^3k_1 \dots d^3k_l J(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_p)$$

avec

$$(43) \quad J(\mathbf{q}) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} J(\mathbf{q}, \tau_1 \dots \tau_p) .$$

Substituons dans (41) les expressions

$$\frac{1}{q^2 - m^2} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{\varepsilon}{2E_q} \frac{1}{q_0 - \varepsilon E_q}$$

avec

$$E_q = \sqrt{q^2 + m^2}$$

$$(44) \quad J(\mathbf{q}, \tau) = \sum_{\{\varepsilon\}} \int dk_{10} \dots dk_{l_0} \left(\prod_{\Gamma} \frac{\varepsilon}{2E_q} \cdot \frac{\exp[-iq_0\tau]}{q_0 - \varepsilon E_q} \right) \cdot P(q).$$

On a affecté un nombre ε_j à chaque ligne j et on somme sur tous les ensembles de valeur ± 1 des ε_j , ce qui est noté par $\sum_{\{\varepsilon\}}$.

Nous appliquons au produit $\prod_{\Gamma} 1/(q_0 - \varepsilon E_q)$ la décomposition donnée par la formule (18) dans le cas des graphes avec lignes externes

$$(45) \quad \prod_{\Gamma} \frac{1}{q_0 - \varepsilon E_q} = \sum_{\{\mathcal{A}\}} D(\mathcal{A}) \left(\prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{q_0 - \varepsilon E_q} \right)$$

où le coefficient $D(\mathcal{A})$ selon la formule (19) est défini de la façon suivante: $D(\mathcal{A})$ est la valeur du produit $\prod_{\mathcal{A}} 1/(q_0 - \varepsilon E_q)$ lorsque l'on a exprimé les q_{α_0} , $\alpha \in \mathcal{A}$, en terme des paramètres E_{q_λ} définis sur \mathcal{B} , et des variables q_0 des lignes externes.

On peut donc écrire

$$(46) \quad J(\mathbf{q}, \tau) = \sum_{\{\varepsilon\}} \sum_{\{\mathcal{A}\}} D(\mathcal{A}) \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{\varepsilon}{2E_q} \right) J(\mathbf{q}, \tau; \mathcal{A})$$

avec

$$(47) \quad J(\mathbf{q}, \tau; \mathcal{A}) = \int dk_{10} \dots dk_{l_0} \cdot P(q) \cdot \prod_{\mathcal{B}} \frac{\varepsilon}{2E_q} \frac{\exp[-iq_0 T]}{q_0 - \varepsilon E_q}.$$

Les T_λ , définies pour chaque arbre \mathcal{A} , sont les formes linéaires des τ construites à la Sect. 3.1.4 et données par la règle (40).

Sans répéter le raisonnement de la Sect. 3.1.3, nous considérons l'expression (47) comme la transformée de Fourier de la fonction continue à croissance lente $P(q) \times \prod_{\mathcal{B}} 1/(q_0 - \varepsilon E_q)$. Nous choisissons comme variables d'intégration, au lieu des k_{10}, \dots, k_{l_0} , les variables de cycles définies par \mathcal{B} qui sont $q_{\lambda_0}, q_{\mu_0}, \dots, q_{\rho_0}$. Dans tout domaine excluant les plans $T_\lambda = 0$, $T_\mu = 0$, etc., la distribution

$$(48) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{\lambda_0} dq_{\mu_0} \dots dq_{\rho_0} P(q_{\lambda_0} \dots q_{\rho_0}) \cdot \frac{\varepsilon_\lambda}{2E_{q_\lambda}} \frac{\exp[-iq_{\lambda_0} T_\lambda]}{q_{\lambda_0} - \varepsilon_\lambda E_{q_\lambda}} \dots$$

est égale à la fonction

$$(49) \quad (2\pi i)^l \prod_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{2E_q} \right) \cdot \exp [-i(E_{q_\lambda} | T_\lambda | + \dots + E_{q_\rho} | T |)] \cdot P(q_{\lambda_0} = \varepsilon_\lambda E_{q_\lambda}, q_{\mu_0} = \varepsilon_\mu E_{q_\mu}, \dots)$$

où les ε_λ ont le signe du T_λ correspondant.

Nous avons vu ensuite, 3.1.3, qu'il était possible de faire tendre les τ_j vers zéro, de sorte que les T_λ gardent un signe déterminé par ce que l'on a appelé l'orientation totale du cycle (λ). Les ε_λ qui interviennent dans (49) ont donc un signe défini par cette orientation (signe de l'entier N_λ de la Sect. 3.1.5. Nous avons donc pour (46), à la limite $\tau = 0$

$$(50) \quad J(q) = (2\pi i)^l \sum_{\{\varepsilon_\alpha\}} \sum_{[\mathcal{A}]} D(\mathcal{A}) \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{2E_q} \right) \cdot P(\varepsilon_\lambda E_{q_\lambda}, \dots, \varepsilon_\rho E_{q_\rho}).$$

Sommant sur les ε_α , $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$(51) \quad J(\mathbf{q}) = (2\pi i)^l \sum_{[\mathcal{A}]} \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{q_\alpha^2 - m_\alpha^2} \right) \left(\prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{2E_{q_\lambda}} \right) \cdot P(\varepsilon_\lambda E_{q_\lambda}, \dots)$$

où dans $\prod_{\mathcal{A}} (q_\alpha^2 - m_\alpha^2)^{-1}$ et dans P , les q_α , $\alpha \in \mathcal{A}$ sont exprimés en fonction des q_λ indépendents, $\lambda \in \mathcal{B}$, et des variables externes. Introduisons les fonctions

$$(52) \quad \theta^\pm(q_0) \delta(q^2 - m^2) = \frac{1}{2E_q} \delta(q_0 \mp E_q).$$

L'expression (51) s'écrit sous la forme

$$(53) \quad J(\mathbf{q}) = (2\pi i)^l \int_{\mathcal{A}} dq_{\lambda_0} \dots dq_{\rho_0} \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{q_\alpha^2 - m_\alpha^2} \right) \prod_{\mathcal{B}} \theta^{\varepsilon_\lambda}(q_{\lambda_0}) \delta(q_\alpha^2 - m_\alpha^2) \cdot P.$$

Comme E_q a une partie imaginaire non nulle, il faut entendre l'intégrale (53) dans le sens donné par (51). L'expression finale invariante de l'intégrale de Feynman est la décomposition suivante:

$$(54) \quad F = \sum_{[\mathcal{A}]} (2\pi i)^l \int d^4k_1 \dots d^4k_l \left(\prod_{\mathcal{A}} \frac{1}{q^2 - m^2} \right) \left(\prod_{\mathcal{B}} \theta^\varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) \right) \cdot P,$$

d'où la règle, pour chaque arbre \mathcal{A} sur Γ

- a) associer un facteur $\theta^\varepsilon(q) \delta(q^2 - m^2)$ pour chaque variable indépendante déterminant un cycle d'orientation totale ε ;
- b) associer un facteur $1/q^2 - m^2$ à chaque ligne de \mathcal{A} .

* * *

Je remercie Monsieur C. BLOCH de l'intérêt qu'il a porté à ce travail et de son aide critique, ainsi que L. PICMAN pour de nombreuses conversations.

RIASSUNTO (*)

Facendo uso di una identità algebrica, si decompone in frazioni parziali il prodotto di propagatori associato con le linee di un dato diagramma della teoria delle perturbazioni. Ciò permette in meccanica statistica una somma sistematica sulle variabili dell'energia di un diagramma. Il risultato è una somma di termini, ciascuno dei quali corrisponde ad una delle «ramificazioni» in cui il diagramma può essere scomposto.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Systemes intégrables

Thèse soutenue le 21 novembre 1967 (Université Paris):

Étude d'un modèle à une dimension pour un système de fermions en interaction

Résumé. — On étudie un modèle à une dimension pour un système quantique de fermions en interaction attractive ou répulsive dans un volume donné. L'ensemble des niveaux d'énergie et des états propres du système est déterminé exactement. La connaissance du spectre est surtout appliquée à l'étude du gaz attractif, intéressant par la présence de "paires" ou états liés à deux particules. On peut décrire ce système comme un gaz de "deutérons à une dimension" qui possède quelque ressemblance avec un système de bosons. Quelques propriétés extensives de l'état fondamental sont données, comme l'énergie en fonction de la densité et de la magnétisation totale, pour une valeur de la constante de couplage. Les propriétés analytiques de la fonction énergie sont étudiées sans être complètement élucidées. On aborde enfin les excitations élémentaires du système et on établit la courbe de dispersion d'une excitation de type phonon.

Abstract. — The subject of this thesis is a one-dimensional model for a quantum system of fermions with attractive or repulsive interaction. The eigenvalues and eigenfunctions of the Hamiltonian with periodic boundary conditions are exactly determined. The knowledge of the spectrum is essentially applied on the study of the attractive gas, characterized by the presence of "pairs" or two particles bound states. This system can be described as a gas of "one dimensional deuterons", which has some analogy with a boson gas. Some extensive properties of the ground state have been discussed for example energy as a function of the density and magnetization, for all the values of the coupling constant. The analytic properties of the energy function are studied, but not completely resolved. Finally, the elementary excitations of the phonon type are considered and the dispersion curves are given.

DÉTERMINATION DU SPECTRE D'ÉNERGIE

1. Introduction

L'objet de cette étude est un modèle à une dimension pour un gaz quantique de particules en interaction dans un "volume" donné. Sa définition tient en une phrase : il s'agit d'un système de N fermions de même masse, à deux états internes, en interaction δ sur un segment de

longueur L . Ce modèle précis a déjà été considéré par plusieurs auteurs ⁽¹⁾ en particulier par Mc Guire [1] sous la forme définie ci-dessus et par Bychkov, Gorkov et Dzyaloshinski [2] dans un contexte plus général. Ce gaz de Fermi à une dimension possède une réelle simplicité qui le rend abordable directement, et il contient cependant les éléments de modèles réalistes où interviennent à la fois les notions de masse, de spin et d'interaction à deux corps. Notre but est de donner ici des résultats exacts concernant la détermination des fonctions d'onde et des niveaux d'énergie de ce système [26], pour toute valeur des paramètres, nombre de particules, volume de la "boîte", intensité de l'interaction. C'est une première étape. Un exemple de problème analogue est celui de la chaîne linéaire d'atomes de spin 1/2 traité par Bethe [3] en 1931 ; la première étape de la solution de Bethe consiste en ceci : la chaîne possède 2^N états quantiques. L'Hamiltonien est une matrice $2^N \times 2^N$ et Bethe ramène le problème des valeurs propres à la recherche des solutions de N équations algébriques couplées. A la limite d'un système infini c'est presque franchir le pas qui sépare le continu du dénombrable.

La seconde étape consiste à tirer parti de ces équations couplées pour en déduire les propriétés de l'état fondamental, des premiers états excités, ou peut-être même des fonctions de corrélation ou des grandeurs thermodynamiques. Pour reprendre l'exemple de la chaîne linéaire de spin, Bethe et Hulthen [3, 4] purent donner explicitement l'énergie du fondamental et trente ans plus tard des Cloizeaux et Pearson [5] ont obtenu la loi de dispersion de l'onde de spin antiferromagnétique. On a pu faire de même pour la chaîne linéaire anisotrope [6, 7] à cause de la simplicité des équations intégrales obtenues en ces cas. Pour notre problème, nous n'avons pu aller aussi loin, bien que l'analyse ou le calcul numérique permettent aussi, mais à plus grand effort, d'extraire des informations intéressantes sur les premiers états. Par exemple, dans le cas du gaz linéaire de bosons de Lieb et Liniger [8], il est difficile d'extraire d'une équation intégrale d'apparence anodine, la singularité de l'énergie du fondamental en fonction de la constante de couplage. Nous avons rencontré un obstacle semblable. Quant au calcul exact des fonctions de corrélation ou thermodynamiques, il paraît très difficile dans tous les cas évoqués : on n'a pas réussi à calculer la norme des fonctions d'onde données explicitement par Bethe, en ce qui concerne la chaîne de spin.

Il existe deux exemples, de natures très différentes, il est vrai, de gaz linéaires de fermions sur lesquelles on ait obtenu des résultats exacts. Le premier est le modèle de Luttinger [9] complètement résolu dans le cas infini par Mattis et Lieb [10]. C'est un système de fermions de deux espèces où l'interaction à deux corps de forme arbitraire n'existe qu'entre particules d'espèces différentes, mais où la partie cinétique ne peut décrire des particules massives et n'est pas bornée inférieurement. Lorsque le système est actuellement infini, il peut être décrit comme un système de fermions de type "trou" et de type "particule" dont l'interaction engendre un champ de bosons. Il est alors équivalent à un système de quasi-particules et de plasmons indépendants. Outre la différence essentielle entre système fini ou infini que manifeste ce modèle de Luttinger, le résultat important est que la surface de Fermi peut disparaître si l'interaction attractive est assez intense.

Le second exemple connu a déjà été considéré par Lieb, Schultz et Mattis [11], et Katsura [12], puis par Des Cloizeaux [13] en utilisant les résultats exacts du problème de la chaîne linéaire magnétique anisotrope dont dérive le modèle en question. L'Hamiltonien décrit l'interaction de fermions sans spin dans une bande. Il est intéressant d'une part d'avoir pu obtenir une expression analytique de l'énergie par particule au voisinage de l'origine dans le plan de la constante de couplage, et de mettre en évidence une sorte de transition pour une certaine valeur de celle-ci. D'autre part, la comparaison du résultat exact avec le résultat des méthodes variationnelles

⁽¹⁾ Après le dépôt de cette thèse, nous avons eu connaissance des travaux cités en références [27] et [28].

usuelles est instructif quant à la validité de ces méthodes (Hartree ou Bogoliubov).

Par conséquent, au-delà de l'intérêt formel que présente la solution d'un problème à N corps, on peut reconnaître dans les précédents modèles les points de contact avec la théorie usuelle des systèmes de Fermi. Qu'en est-il dans celui-ci ?

Le premier point de contact est avec la théorie du ferromagnétisme pour illustrer le théorème de Lieb et Mattis [14] sur le classement des niveaux par la valeur du spin total. Le second est avec la théorie de la superconductivité [2] pour éprouver les méthodes d'approximation sur le cas à une dimension. Reconnaissons tout de suite que l'étude de ces questions constituerait une suite à ce travail dont le plan suivant indique la consistance propre et fait connaître les limites.

Les sections 1 à 3 sont consacrées au rappel des résultats connus sur le problème des particules en interaction δ et sur la question de la symétrie de la fonction d'onde d'un système de fermions à spin. Dans les sections 4 à 5, le problème spécifique que nous traitons ici est posé ; ceci donne lieu à deux types de conditions : les conditions de symétrie et les conditions aux limites. La solution est établie par une méthode algébrique dans les sections 6 à 9 où nous suivons la voie inductive. Les diverses propositions utiles sont établies en appendice. Les équations couplées qui déterminent le spectre et les fonctions d'onde du système sont étudiées dans les sections 10 à 11. Leur interprétation conduit à traiter les questions suivantes : correspondance biunivoque des états avec ceux du système sans interaction, nombres quantiques, caractère complet de la solution et dénombrement, analogie statique et principe variationnel.

La section 12 étudie la nature du gaz attractif qui se présente d'abord comme un gaz de paires de fermions liés, à la manière d'un gaz d'hydrogène. L'état lié des paires est dû au potentiel attractif δ , capable de lier deux particules dans l'état singulier, et ceci n'a aucun rapport avec le phénomène de Cooper. Le problème de la forme de la surface de Fermi, c'est-à-dire de l'occupation des états d'impulsion n'est pas abordé, faute de savoir calculer la matrice densité à un corps.

A titre de test, on effectue section 13 un développement des équations couplées au second ordre en V et on compare le développement de l'énergie obtenu dans certains cas particuliers à celui que donne la méthode de perturbation.

Les sections 14 et 15 sont consacrées à l'étude de l'état fondamental dans le cas attractif, à la limite du gaz infini. La détermination des nombres quantiques est faite en suivant une méthode intuitive ; puis on passe à la limite thermodynamique. L'énergie par particule dépend alors de la solution d'équations intégrales de simple apparence, mais assez difficile pour nous empêcher de conclure sur la question de l'analyticité de l'énergie en fonction de la constante de couplage. Cependant le problème est mathématiquement bien posé. La solution donnerait une indication sur l'instabilité de l'état de Fermi en présence d'une légère perturbation. Une solution numérique de ces équations est possible. On a ainsi pu montrer que l'énergie à densité donné décroissait avec la magnétisation du système.

Le cas répulsif a été abordé section 16 mais il est paradoxalement plus complexe que le cas attractif. Enfin, la section 17 traite de la détermination du spectre des diverses excitations élémentaires du gaz attractif : excitation de type phonon, due au fait certain que ce gaz de paires ressemble à un gaz de bosons ; excitations de spins 0 et 1, dégénérées en énergie, dues à la dissociation d'une paire, ce qui donne lieu à une lacune entre l'énergie de cette excitation et le fondamental.

Les sections 12 à 17 sont donc une étude de quelques propriétés du système considéré comme un modèle de système physique à un grand nombre de particules. Ces propriétés sont fondées sur un ensemble de résultats rappelés ou établis dans les 11 premières sections et dans l'appendice, ensemble que nous abordons maintenant.

Il résulte de la définition du système que l'Hamiltonien peut être écrit de la façon suivante :

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2V \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j), \quad (1.1)$$

le nombre x_i étant l'abscisse de la particule i sur le segment $[0, L]$. L'intensité du potentiel à deux corps est $2V$; celui-ci est attractif ou répulsif suivant que V est négatif ou positif.

L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde générale d'énergie E

$$H\psi = E\psi \quad (1.2)$$

n'a de sens que si ψ est dans la classe des fonctions continues ; les dérivations et l'action du potentiel singulier δ sont alors bien définies au sens des distributions.

On sait construire les états de diffusion, donc la matrice de collision, et par prolongement analytique sur V les états liés d'un système de particules évoluant sur un axe indéfini sous l'action de l'Hamiltonien.

Mais le problème que nous nous posons est relatif à l'introduction du "volume" nécessaire à l'étude des propriétés extensives du système à densité fixée. Une méthode classique consiste à imposer les conditions aux limites périodiques. Cette méthode revient à traiter exactement le problème de particules en interaction δ sur un cercle de longueur L .

Lieb et Liniger [8] ont étudié le modèle correspondant à un système de bosons répulsifs. Ces auteurs ont donné la solution complètement symétrique de l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien H , (1.1), avec les conditions de périodicité L . En ce cas la méthode de construction de la fonction d'onde est semblable à celle que Bethe [3] employa pour la chaîne linéaire magnétique.

Dans le cas du système de fermions qui nous occupe, Mc Guire [1] a donné la solution correspondant au spin total $S = \frac{1}{2}N - 1$, où il suffit de considérer une seule particule de composante magnétique de spin $-1/2$ en interaction avec les $(N-1)$ particules de composantes $+1/2$. Il a donc construit la fonction d'onde d'espace ayant le type de symétrie du diagramme d'Young à deux colonnes de longueur respective $(N-1)$ et 1. L'étape suivante est la solution du problème de fermions pour un spin total quelconque, que nous abordons ici. Plus généralement, il s'agirait de fabriquer toutes les solutions périodiques ayant un type de symétrie défini.

Cette étude est basée sur le résultat fondamental suivant, en quoi réside la simplicité de l'Hamiltonien (1.1), résultat donné par Mc Guire et démontré récemment par Zinn-Justin et Brézin [15].

Le domaine de variation de l'ensemble des N coordonnées x_i se divise naturellement en secteurs : un secteur est défini par un certain classement des points x_i , il est donc associé à une permutation σ d'ordre N telle que

$$\sigma : x_{\sigma 1} < x_{\sigma 2} < \dots < x_{\sigma N}.$$

Il existe $N!$ solutions élémentaires indépendantes de l'équation

$$H\psi = E\psi,$$

associées chacune au même ensemble de N nombres complexes k_1, k_2, \dots, k_N , distincts ; dans chaque secteur σ , ces solutions sont des superpositions d'ondes du type

$$\exp i(k_{P_1}x_1 + k_{P_2}x_2 + \dots + k_{P_N}x_N)$$

où P désigne une permutation d'onde N . Nous avons appelé "solution élémentaire", une solution de l'équation (1.1), de symétrie indéfinie, quel que soit son comportement à l'infini.

Le résultat précédent, dont nous rappellerons le principe de démonstration à la fin de la section 3, admet une interprétation simple dans l'analogie optique suivante [1] : une onde plane incidente, dans un espace à N dimensions, est transmise et réfléchiée par un ensemble de $\frac{1}{2}N(N - 1)$ lames minces identiques, confondues avec les plans bissecteurs des plans de coordonnées. Dans chaque secteur, espace limité par $(N - 1)$ lames, on obtient une superposition de $N!$ ondes planes réfractées dont les vecteurs d'onde sont déterminés par les lois de l'optique géométrique ; mais les relations de phase à la traversée des lames sont telles qu'il n'y a pas d'onde diffractée supplémentaire.

2. Spin total et type de symétrie [14]

L'Hamiltonien H commutant évidemment avec le spin total, il s'agit de construire les fonctions d'onde de spin S , de composante magnétique M , antisymétriques dans l'échange de particules 1, 2, ..., N . Comme H est indépendant des variables de spins, la fonction d'onde $\psi^{SM}(x_1, S_1 ; x_2, S_2 ; \dots ; x_N, S_N)$ qui dépend des N coordonnées x_i et des composantes de spin S_i ($M = \sum S_i$), peut être décomposée sur la base complète des fonctions de spins χ_T^{SM} appartenant au spin total S , et repérées par l'indice T :

$$\psi^{SM} = \sum_T \varphi_T^S(x_1, x_2, \dots, x_N) \chi_T^{SM}(S_1, S_2, \dots, S_N). \tag{2.1}$$

Or, les fonctions de spin S pour N particules de spin 1/2 sont déterminées par les divers tableaux d'Young formés avec le même diagramme à deux lignes de longueur respective $\nu = \frac{1}{2}N + S$ et $\bar{\nu} = \frac{1}{2}N - S$. L'antisymétrie totale de ψ^{SM} dans l'échange des N indices de particules, impose alors que la fonction d'onde d'espace φ_T^S ait la symétrie complémentaire de χ_T^S , c'est-à-dire celle du diagramme d'Young à deux colonnes de longueur ν et $\bar{\nu}$.

La séparation des variables d'espace et de spin ainsi achevée, nous sommes amenés à chercher les solutions de l'équation :

$$H\varphi_T = E\varphi_T \tag{2.2}$$

ayant la symétrie du diagramme à deux colonnes ν et $\bar{\nu}$. Il suffit d'obtenir les solutions de l'équation (2.2) pour un seul tableau T , les autres s'en déduisent par l'application de permutations.

Nous choisissons alors comme tableau T celui dont la première colonne est occupée par les variables x_1, x_2, \dots, x_ν , et la seconde par les variables $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots, x_N$. Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction φ_T ait le type de symétrie T .

- a) φ est séparément antisymétrique dans les variables des deux colonnes.
- b) φ ne peut être antisymétrisé par rapport aux $(\nu + 1)$ variables x_1, x_2, \dots, x_ν et $x_{\nu+1}$.

Si l'on désigne par (ij) la transposition qui échange les variables x_i et x_j , la condition b) s'écrit :

$$[(1, \nu + 1) + (2, \nu + 1) + \dots + (\nu, \nu + 1) - 1]\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv 0 \tag{2.3}$$

A cause de l'antisymétrie dans les variables de la seconde colonne cette condition est équivalente à l'une des suivantes :

$$\left[\sum_{i=1}^{\nu} (i, a) - 1 \right] \varphi \equiv 0 \tag{2.4}$$

quel que soit l'indice a supérieur à ν . Nous appellerons conditions de symétrie les conditions a) et b) sous la forme (2.4).

3. Forme générale d'une solution élémentaire

Précisons ici la forme d'une solution élémentaire de l'équation

$$H\varphi = E\varphi \quad (3.1)$$

D'une part, dans chaque secteur σ (défini dans l'introduction), vérifie l'équation des particules libres

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = E\varphi, \quad (3.2)$$

puisque σ est un domaine ouvert dans lequel le potentiel est nul.

D'autre part, les restrictions de φ à deux secteurs voisins obéissent à des conditions de raccordement à leur frontière commune. Deux secteurs sont dits voisins, s'il existe une transposition de deux variables voisines qui fasse passer de l'un à l'autre. Prenons par exemple les secteurs voisins

$$\sigma : x_\lambda < x_\mu < \dots < x_\alpha < x_\beta < \dots$$

et

$$(\alpha\beta)\sigma : x_\lambda < x_\mu < \dots < x_\beta < x_\alpha < \dots \quad (3.3)$$

où x_α et x_β sont des variables voisines dans ces deux secteurs.

Les conditions de raccordement comprennent

a) la condition de continuité

$$\varphi_\sigma |_{x_\alpha=x_\beta} \equiv \varphi_{(\alpha\beta)\sigma} |_{x_\alpha=x_\beta}, \quad (3.4)$$

nécessaire pour que le produit $\delta(x_\alpha - x_\beta)\varphi$ soit défini.

b) la condition sur la dérivée normale à la frontière commune des deux secteurs, obtenue par intégration de l'équation (3.1) sur la variable relative $x_\alpha - x_\beta$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) (\varphi_{(\alpha\beta)\sigma} - \varphi_\sigma)_{x_\alpha=x_\beta} \equiv 2V\varphi_\sigma |_{x_\alpha=x_\beta} \quad (3.5)$$

L'équation de Schrödinger (3.1) est équivalente à l'équation (3.2) augmentée des conditions (3.4) et (3.5).

Nous fondant sur le théorème énoncé dans l'introduction, une solution élémentaire associée à une suite donnée de N nombres k_1, k_2, \dots, k_N , a la forme suivante dans chaque secteur σ :

$$\varphi_\sigma = \sum_P A_\sigma\{P\} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N k_{Pj} x_j \right\}. \quad (3.6)$$

Les coefficients $A_\sigma\{P\}$ dépendent donc de deux permutations d'ordre N : σ et P . Les équations (3.2) sont vérifiées si l'on choisit l'énergie E

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2 \quad (3.7)$$

Les équations (3.4) et (3.5) sont équivalentes aux équations de passage

$$A_{(\alpha\beta)\sigma}\{P\} = A_\sigma\{P\} \left(1 + \frac{V}{i(k_{P\alpha} - k_{P\beta})} \right) + A_\sigma\{P(\alpha\beta)\} \frac{V}{i(k_{P\alpha} - k_{P\beta})} \quad (3.8)$$

valables quels que soient σ , P et j tels que

$$\alpha = \sigma j \quad \beta = \sigma(j + 1), \quad 1 \leq j \leq N - 1.$$

Le fait essentiel est la compatibilité du système homogène (3.8). Une fois celle-ci établie, la donnée de φ dans un seul secteur détermine la solution dans tout secteur voisin et de proche en proche dans tout secteur. Nous choisirons le secteur initial de définition de φ de façon à exprimer le plus simplement possible les conditions de symétrie.

Terminons cette section en rappelant brièvement le théorème de Brezin et Zinn-Justin [15] qui fonde le résultat énoncé dans l'introduction, c'est-à-dire qui démontre la compatibilité des équations homogènes (3.8).

Considérons les coefficients :

$$a^\sigma\{P\} = A_\sigma\{P\sigma^{-1}\}$$

comme les composantes d'un vecteur a^σ , élément d'un espace vectoriel à $N!$ dimensions. Les relations (3.8) expriment qu'il existe une matrice $B^{(j, j+1)}$ indépendante de σ , telle que l'on ait :

$$a^{\sigma(j, j+1)} = B^{(j, j+1)} a^\sigma.$$

On démontre alors que les $(N - 1)$ matrices $B^{(j, j+1)}$ forment un ensemble de générateurs d'un groupe de matrices isomorphe à la représentation régulière du groupe des permutations d'ordre N . On a l'équivalence :

$$B^{(j, j+1)} \sim (j, j + 1)$$

Chaque vecteur a^σ associé à un secteur σ est donc déterminé de façon unique et cohérente par la donnée d'un seul vecteur a^{σ_0} :

$$a^\sigma = B^{\sigma\sigma_0^{-1}} a^{\sigma_0}.$$

Selon l'isomorphisme la matrice $B^{\sigma\sigma_0^{-1}}$ est définie et construite à partir des générateurs $B^{(j, j+1)}$ comme la permutation $\sigma\sigma_0^{-1}$ l'est à partir des diverses transpositions $(i, i + 1)$.

4. Les conditions de symétrie

4.1. EXPRESSION DES CONDITIONS. — Le choix du secteur initial σ_0 suffisant pour définir la fonction d'onde φ est pratiquement déterminé par le tableau d'Young T : φ est antisymétrique en x_1, x_2, \dots, x_ν et en $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots, x_N$. Or le potentiel δ n'agit pas entre paires de particules antisymétriques. Il en résulte que si deux secteurs voisins diffèrent par l'échange d'une paire de variables de la même colonne de T , les fonctions φ restreintes à ces deux secteurs ont la même forme analytique. Soient x_α et x_β , deux variables d'une même colonne de T , voisines dans le secteur σ ; l'antisymétrie implique

$$\varphi_\sigma(\dots x_\alpha, x_\beta, \dots) \equiv -\varphi_{(\alpha\beta)\sigma}(\dots x_\beta, x_\alpha, \dots). \quad (4.1)$$

c'est-à-dire, d'après (3.6),

$$A_\sigma\{P\} = -A_{(\alpha\beta)\sigma}\{P(\alpha\beta)\} \quad (4.2)$$

et l'on déduit des formules de passage (3.8)

$$A_\sigma\{P\} = A_{(\alpha\beta)\sigma}\{P\}, \quad (4.3)$$

c'est-à-dire l'identité des fonctions φ dans les deux secteurs voisins.

Il est alors naturel de prendre pour σ_0 un secteur où toutes les variables de chaque colonne soient voisines. De plus, le résultat (4.3) permet d'identifier les secteurs différant seulement par l'échange de paires voisines d'une même colonne. Le secteur initial σ_0 est ainsi défini : les variables de la seconde colonne y précèdent celles de la première colonne.

Nous avons donc :

$$\sigma_0 : x_{\nu+1} < x_{\nu+2} < \dots < x_N < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu. \quad (4.4)$$

Nous appellerons aussi σ_0 tout secteur qui se déduit de (4.4) par une permutation Q laissant globalement invariante chaque colonne de T . Nous écrirons $A_0\{P\}$ le coefficient $A_{\sigma_0}\{P\}$ relatif au secteur initial. D'après (4.2) nous avons :

$$A_0\{PQ\} = I(Q)A_0\{P\}, \quad (4.5)$$

où $I(Q)$ est le signe de la permutation Q .

Il sera commode de noter le coefficient $A_0\{P\}$ sous la forme

$$A_0\{P\} = (P_1, P_2, \dots, P_\nu | P(\nu+1), \dots, P_N), \quad (4.6)$$

où sont mis en évidence deux groupes d'indices tous distincts séparés par une barre. Le premier groupe et le second groupe indexent les k associés respectivement aux x de la première colonne et de la seconde colonne de T , comme on le voit sur le développement (3.6) de φ dans le secteur σ_0 . D'après (4.5) le coefficient $(\alpha\beta\gamma \dots \delta | \lambda\mu \dots \rho)$ est antisymétrique dans les indices du premier groupe et dans les indices du second.

Nous sommes en mesure d'utiliser la condition de symétrie (2.4) :

$$\left(\sum_{i=1}^{\nu} (ai) - 1 \right) \varphi = 0, ; \nu < a \leq N. \quad (4.7)$$

où a est une variable distinguée de la seconde colonne. Il suffit de considérer seulement la restriction de l'équation (4.7) du secteur σ_0 : en effet, le premier membre de (4.7) est aussi une solution élémentaire de l'équation de Schrödinger ; d'après les formules de passage (3.8) elle est nulle dans tous les secteurs, si elle l'est dans un seul.

Pour obtenir la restriction à σ_0 de $(a\lambda)\varphi$, il nous faut obtenir celle de φ au secteur σ_λ ainsi défini

$$\sigma_\lambda : x_{\nu+1} < \dots < x_N < x_1 < \dots < x_\lambda < x_a < x_{\lambda+1} < \dots < x_\nu. \quad (4.8)$$

Si nous appelons $A_\lambda\{P\}$ les coefficients de φ dans le secteur σ_λ , nous avons dans σ_0 :

$$\begin{aligned} (a\lambda)\varphi &= \sum_P A_\lambda\{P\} \exp i [\dots k_{P_a} x_\lambda + \dots + k_{P_\lambda} x_a + \dots] \\ &= \sum_P A_\lambda\{P(a\lambda)\} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N k_{P_j} x_j \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La condition (2.4) s'écrit donc :

$$S_\nu \equiv \sum_{\lambda=1}^{\nu} A_\lambda\{P(a\lambda)\} - A_0\{P\} = 0 \quad (4.10)$$

pour tout P et tout indice a supérieur à ν .

4.2. CALCUL DES COEFFICIENTS A_λ . — Nous sommes amenés au calcul des coefficients $A_\lambda\{P\}$ relatifs au secteur σ_λ défini au paragraphe précédent. Le calcul est effectué en appendice et la proposition I nous donne le résultat suivant

$$A_\lambda\{P\} = A_0\{P\}x_{P_a P_1}x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{\lambda} A_0\{P(a\mu)\}x_{P_\mu P_1}x_{P_\mu P_2} \dots x_{P_\mu P_\lambda} \frac{1}{P_a - P_\mu}, \quad (4.11)$$

où l'on a posé

$$x_{\alpha\beta} = 1 + \frac{V}{i(k_\alpha - k_\beta)} \quad (4.12)$$

ou encore dans une notation condensée

$$x_{\alpha\beta} = 1 + \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \leftrightarrow \frac{ik_\alpha}{V}. \quad (4.13)$$

La connaissance des A_λ permet alors le calcul de la somme S_ν , formule (4.10), et le résultat fait l'objet de la proposition II démontrée en appendice.

Nous obtenons alors en fonction des coefficients $A_0\{P\}$ relatifs au secteur initial :

$$\begin{aligned} S_\nu &= -A_0\{P\}x_{P_a P_1}x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\nu} \\ &+ A_0\{P(a1)\}x_{P_1 P_a}x_{P_1 P_2} \dots x_{P_1 P_\nu} \\ &+ A_0\{P(a2)\}x_{P_2 P_1}x_{P_2 P_3} \dots x_{P_2 P_\nu} \\ &+ A_0\{P(a\nu)\}x_{P_\nu P_1} \dots x_{P_\nu P_{\nu-1}}x_{P_\nu P_a} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Appelons $\mathcal{E}_{\nu+1}$ l'ensemble des $\nu + 1$ indices distincts $P_a, P_1, P_2, \dots, P_\nu$;
Définissons des quantités $Y_i(\mathcal{E})$ associées à l'ensemble \mathcal{E}

$$Y_i(\mathcal{E}) = \prod_{j \in \mathcal{E}} x_{ij}, \quad i \in \mathcal{E}.$$

La condition de symétrie (4.14) prend la forme

$$-A_0\{P\}Y_{P_a}\{\mathcal{E}\} + \sum_{\lambda=1}^{\nu} A_0\{P(a\lambda)\}Y_{P_\lambda}\{\mathcal{E}\} = 0 \quad (4.15)$$

Si nous remarquons que les indices P_a, P_1, \dots, P_ν peuvent être un ensemble quelconque de $\nu + 1$ indices distincts variant de 1 à N

$$\mathcal{E}_{\nu+1} \equiv \{\rho, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta\},$$

Nous obtenons une écriture plus explicite de la condition de symétrie à l'aide de la notation (4.6) :

$$\begin{aligned} &-(\alpha\beta\gamma \dots \delta | \dots \rho \dots)Y_\rho(\mathcal{E}) \\ &+(\rho\beta\gamma \dots \delta | \dots \alpha \dots)Y_\alpha(\mathcal{E}) \\ &+(\alpha\rho\gamma \dots \delta | \dots \beta \dots)Y_\beta(\mathcal{E}) \\ &+ \dots \\ &+(\alpha\beta\gamma \dots \rho | \dots \delta \dots)Y_\delta(\mathcal{E}) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'antisymétrie des coefficients A_0 dans les deux groupes d'indices et les équations homogènes (4.16) expriment complètement que la fonction d'onde φ a le type de symétrie du tableau T .

Les conditions (4.16) généralisent simplement les conditions de symétrie du tableau T pour les coefficients de la fonction d'onde du système de particules sans interaction. A la limite

$V = 0$, tous les nombres Y sont égaux à 1. Rappelons la méthode constructive utilisée en ce cas pour obtenir les solutions du système (4.16). Prenons l'exemple $N - 2\nu, S = 0$.

Appelons $q_1^+ q_1^- q_2^+ q_2^- \dots q_\nu^+ q_\nu^-$, les N nombres k : ils sont repérés par deux indices

$$k \leftrightarrow q_i^{\sigma_i}, \quad 1 \leq i \leq \nu, \quad \sigma_i = \pm 1.$$

Partons d'une solution élémentaire à un seul terme

$$\exp \left\{ i \sum_{j=1}^{\nu} q_j^+ x_j + q_j^- x_{\nu+j} \right\}$$

Symétrisons par rapport aux ν lignes du tableau T , nous obtenons

$$\sum_{\{\sigma_j = \pm 1\}} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{\nu} q_j^{\sigma_j} x_j + q_j^{-\sigma_j} x_{\nu+j} \right\}.$$

Antisymétrisons par rapport aux $x_j, 1 \leq j \leq \nu$, et par rapport aux $x_{\nu+j}, 1 \leq j \leq \nu$, pour obtenir la fonction d'onde de symétrie T :

$$\sum_{\{\sigma_j = \pm 1\}} \det \left| \exp \{ i q_j^{\sigma_j} x_\ell \} \right| \times \det \left| \exp \{ i q_j^{-\sigma_j} x_\ell \} \right| \tag{4.17}$$

On voit sur (4.17) que les coefficients $A\{P\}$ non nuls sont du type suivant

$$(q_1^{\sigma_1} q_2^{\sigma_2} \dots q_\nu^{\sigma_\nu} | q_1^{-\sigma_1} q_2^{-\sigma_2} \dots q_\nu^{-\sigma_\nu}) = I(P) \prod_{j=1}^{\nu} \sigma_j \tag{4.18}$$

où P désigne la permutation

$$\begin{pmatrix} q_1^+ & q_2^+ & \dots & q_\nu^+ & q_1^- & \dots & q_\nu^- \\ q_1^{\sigma_1} & q_2^{\sigma_2} & & q_\nu^{\sigma_\nu} & q_1^{-\sigma_1} & \dots & q_\nu^{-\sigma_\nu} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que dans ce cas particulier, les sommes (4.16) sont nulles et ne comprennent que deux termes opposés. Par exemple, prenons :

$$\mathcal{E}_{\nu+1} = \{ q_1^+ q_2^+ \dots q_\nu^+ q_1^- \}$$

on obtient pour le premier membre de (4.16) :

$$\left. \begin{aligned} & (q_1^+ q_2^+ \dots q_\nu^+ | q_1^- q_2^- \dots q_\nu^-) \\ & - (q_1^- q_2^- \dots q_\nu^- | q_1^+ q_2^+ \dots q_\nu^+) \\ & - (q_1^+ q_1^- \dots q_\nu^+ | q_2^+ q_2^- \dots q_\nu^-) \\ & - \dots \\ & - (q_1^+ q_2^+ \dots q_\nu^- | q_\nu^+ q_2^- \dots q_\nu^-) \end{aligned} \right\} \text{termes identiquement nuls}$$

ce qui est nul d'après (4.18).

5. Les conditions aux limites

5.1. NATURE ET COHERENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES. — Les particules du système étant confinées sur le segment $[0, L]$, existe-t-il des fonctions d'onde du type (3.6) qui vérifient les conditions aux limites suivantes :

$$\varphi|_{x_j=0} \equiv \varphi|_{x_j=L} \text{ , quel que soit } j \text{ ?} \tag{5.1}$$

Exprimons d'abord cette condition "dans le secteur σ_0 ". Distinguons suivant que x_j appartient à l'une ou l'autre colonne : si $\nu < a \leq N$, x_a est une variable de la seconde colonne. Le domaine

$$x_a < x_{\nu+1} < \dots < x_N < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$$

est dans σ_0 , d'après la définition (4.4) et la remarque qui la suit.

Par conséquent, $\varphi|_{x_a=0}$ est défini dans σ_0 , tandis que $\varphi|_{x_a=L}$ est défini dans le secteur que nous avons appelé σ_ν (pour un indice a donné). La condition (5.1) nous donne la relation suivante entre les coefficients de φ

$$A_0\{P\} = A_\nu\{P\}e^{ik_{P_a}L}. \tag{5.2}$$

Inversement les équations (5.2) entraînent (5.1) restreint à σ_0 , et même un peu plus, car elles permettent "d'identifier" σ_0 et σ_ν . On a en effet l'égalité :

$$\varphi(x_1, \dots, x_a, \dots, x_N) = \varphi(x_1, \dots, x_a + L, \dots, x_N),$$

dans le domaine

$$0 < x_a < x_{\nu+1} < \dots < x_N < x_1 < \dots < x_\nu < L.$$

De même, si x_b est une variable de la première colonne ($1 \leq b \leq \nu$) on voit que $\varphi|_{x_b=0}$ est défini dans le secteur que nous appelons $\sigma_{\bar{\nu}}$ (pour un indice b donné)

$$\sigma_{\bar{\nu}} : x_b < x_{\nu+1} < \dots < x_N < x_1 < \dots < x_{b-1} < x_{b+1} < \dots < x_\nu ;$$

ce qui nous donne la condition

$$A_0\{P\} = A_{\bar{\nu}}\{P\}e^{-ik_{P_b}L}. \tag{5.3}$$

Les conditions (5.2) et (5.3) expriment la restriction de la condition (5.1) au secteur σ_0 .

Montrons maintenant qu'elles entraînent les relations (5.1) dans tous les secteurs.

Soit τ_0 un secteur quelconque où x_a est à l'origine. Le secteur où x_a est envoyé en L , sans changement des autres variables est le secteur τ_ν avec

$$\tau_\nu = \tau_0 C \tag{5.4}$$

où C est la permutation circulaire $(12 \dots N)$;

On a donc aussi

$$\sigma_\nu = \sigma_0 C. \tag{5.5}$$

Or, il est clair que l'on passe du secteur σ_0 (avec $x_a = 0$) au secteur τ_0 ($x_a = 0$) , par un produit de transpositions successives entre voisins qui ne portent jamais sur la variable x_a ; appelons \mathcal{T} cette suite de transpositions : elle permet aussi de passer du secteur σ_ν au secteur τ_ν , où la variable x_a reste en L .

Or, d'après les formules de passage (3.8), les coefficients $A_{\tau_0}\{P\}$ dans le secteur τ_0 sont une forme linéaire des $A_0\{P\}$ dans le secteur σ_0

$$A_{\tau_0}\{P\} = \sum_{P'} B(P, P') A_0\{P'\} \tag{5.6}$$

où la matrice $B(P, P')$ ne dépend que de la suite de transpositions \mathcal{T} : par récurrence on voit que les permutations P' qui interviennent dans la somme (5.4) sont de la forme :

$$P' = P \times \text{produits de transpositions extraites de } \mathcal{T}.$$

On a donc les deux conséquences suivantes :

- d'une part

$$A_{\tau_\nu}\{P\} = \sum_{P'} B(P, P') A_\nu\{P'\}$$

puisque la suite \mathcal{T} permet aussi de passer de σ_ν à τ_ν .

- d'autre part, pour les permutations de l'ensemble P' on a

$$P_a = P'_a$$

puisque les transpositions de \mathcal{T} laissent x_a invariant.

On déduit des relations (5.2), (5.4), (5.5) et (5.6) et des remarques ci-dessus :

$$A_{\tau_0}\{P\} = A_{\tau_\nu}\{P\} e^{ik_{P_a} L}. \tag{5.7}$$

c'est-à-dire que la condition (5.1) est réalisée dans tout secteur τ si elle l'est "dans σ_0 ", c'est-à-dire si elle prolonge σ_0 dans les secteurs σ_ν (et $\sigma_{\bar{\nu}}$) obtenus en envoyant une variable arbitraire de la seconde colonne (ou de la première) d'une extrémité à l'autre du segment $[0, L]$.

Les conditions (5.3) et (5.7) expriment donc que la fonction φ est L périodique dans toutes les variables.

5.2. EXPRESSION ALGÈBRE DES CONDITIONS AUX LIMITES. — Connaissant la forme générale des coefficients $A_\nu\{P\}$ donnée en appendice, proposition I, l'équation (5.2) s'écrit

$$\begin{aligned} & (x_{P_a P_1} x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\nu} - e^{-ik_{P_a} L}) A_0\{P\} \\ & + \sum_{\mu=1}^{\nu} A_0\{P(a\mu)\} x_{P_\mu P_1} x_{P_\mu P_2} \dots x_{P_\mu P_\nu} \frac{1}{P_\mu - P_\nu} = 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Cette équation doit valoir pour toute permutation P et tout indice $a, \nu < a \leq N$. Appliquons la successivement pour les permutations

$$P, P(a1), P(a2), \dots P(a\nu).$$

Compte-tenu de la relation (4.5), nous avons

$$A_0\{P(a\lambda)(a\mu)\} = A_0\{P(a\mu)(\lambda\mu)\} = -A_0\{P(a\mu)\}$$

et nous obtenons les ν équations, $1 \leq \lambda \leq \nu$:

$$A_0\{P\} x_{P_a P_1} \dots x_{P_a P_{\lambda-1}} x_{P_a P_\lambda} \dots x_{P_a P_\nu} \frac{1}{P_\lambda - P_a}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\mu \neq \lambda} A_0\{P(a\mu)\} x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_\nu} x_{P_\mu P_a} \frac{1}{P_\lambda - P_\mu} \\
 & + A_0\{P(a\lambda)\} (x_{P_\lambda P_1} \dots x_{P_\lambda P_a} \dots x_{P_\lambda P_\mu} - e^{-ik_{P_\lambda} L}).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Les $(\nu + 1)$ équations (5.8) et (5.9), à P et a fixés, forment un système linéaire homogène pour les $(\nu + 1)$ coefficients $A_0\{P\}$ et $A_0\{P(a_\lambda)\}$ $1 \leq \lambda \leq \nu$.

Considérons à nouveau l'ensemble des indices

$$\mathcal{E}_{\nu+1} = \{P_a, P_1, P_2, \dots, P_\nu\} \tag{5.10}$$

et les quantités Y ($\mathcal{E}_{\nu+1}$) déjà définies, section 4, égalité (4.15),

$$\begin{aligned}
 Y_{P_a} &= x_{P_a P_1} x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\nu} \\
 Y_{P_1} &= x_{P_1 P_2} x_{P_1 P_3} \dots x_{P_1 P_\nu}, \text{ etc.}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Le système homogène (5.8) et (5.9) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 0 &= (Y_{P_a}(\mathcal{E}) - e^{-ik_{P_a} L}) A_0\{P\} - \sum_{\mu=1}^{\nu} A_0\{P(a\mu)\} \frac{Y_{P_\mu}(\mathcal{E})}{P_\mu - P_a + 1} \\
 0 &= -\frac{Y_{P_a}(\mathcal{E})}{P_a - P_\lambda + 1} A_0\{P\} + \sum_{\mu \neq \lambda} A_0\{P(a\mu)\} \frac{Y_{P_\mu}(\mathcal{E})}{P_\mu - P_\lambda + 1} \\
 &+ A_0\{P(a\lambda)\} (Y_{P_\lambda}(\mathcal{E}) - e^{-ik_{P_\lambda} L}).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Nous avons écrit pour abrégé

$$\frac{1}{P_\mu - P_\lambda + 1} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{u_{P_\mu} - u_{P_\lambda} + 1}$$

avec

$$u_{P_\lambda} = \frac{i}{V} k_{P_\lambda}, \tag{5.13}$$

pour reprendre les notations (4.13) et celles de l'appendice C.

La matrice $M(\mathcal{E})$ du système homogène d'ordre $(\nu + 1)$ pour les inconnues

$$-A_0\{P\}, A_0\{P(a_1)\}, \dots, A_0\{P(a\nu)\}$$

a donc pour éléments

$$M_{\alpha\beta}(\mathcal{E}) = -e^{-ik_\alpha L} \delta_{\alpha\beta} + \frac{Y_\beta(\mathcal{E})}{u_\beta - u_\alpha + 1} \tag{5.14}$$

Elle est construite sur l'ensemble d'indices \mathcal{E}

$$\mathcal{E}_{\nu+1} \equiv \{P_a, P_1, P_2, \dots, P_\nu\}.$$

On montrerait de la même façon que les conditions (5.3) obtenues en écrivant la périodicité de φ dans une variable x_b de la première colonne conduisent au système homogène pour les $\bar{\nu} + 1$ coefficients inconnus

$$-A_0\{P\}, A_0\{P(b, \nu + 1)\}, A_0\{P(b, \nu + 2)\}, \dots, A_0\{P(bN)\}$$

dont la matrice $\bar{M}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})$ est la suivante :

$$\bar{M}_{\alpha\beta}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}) = -e^{ik_\alpha L} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\bar{Y}_\beta(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})}{u_\alpha - u_\beta + 1}. \tag{5.15}$$

Cette matrice \bar{M} est formée sur l'ensemble d'indices

$$\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1} \equiv \{Pb, P(\nu + 1), \dots, PN\}$$

Elle est analogue à M et s'obtient à partir de celle-ci en changeant k en $-k$, donc aussi u en $-u$ et Y en \bar{Y} avec

$$\bar{Y}_j(\mathcal{E}) = \prod_{\ell \in \mathcal{E}} \bar{x}_{j\ell} = \prod_{\ell \in \mathcal{E}} x_{\ell j}. \tag{5.16}$$

Cette "conjugaison" $k \rightarrow -k$ ne coïncide avec la conjugaison complexe que si les k sont réels, ce qui n'est pas supposé.

On peut conclure cette section en disant que les conditions aux limites (5.1) sont équivalentes à l'ensemble des équations homogènes pour les inconnues $A_0\{P\}$, formées comme nous venons de le décrire avec les matrices $M(\mathcal{E}_{\nu+1})$ et $\bar{M}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})$. Comme P est arbitraire, les ensembles $\mathcal{E}_{\nu+1}$ et $\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}$ sont tous les ensembles possibles de $(\nu + 1)$ indices et de $(\bar{\nu} + 1)$ indices choisis parmi $(1, 2, \dots, N)$. On voit que l'ensemble de ces équations est largement surabondant. Il faut donc montrer à quelles conditions le système global est compatible. Dans les sections 6 et 7, nous donnons des conditions suffisantes de comptabilité de toutes les équations (5.14), et séparément, de toutes les équations (5.15).

6. Paramétrisation des ensembles $\{k\}$ par l'ensemble $\{q\}$

Nous montrons dans cette section comment les conditions de périodicité nous amènent à définir des suites discrètes d'ensembles $\{k\} \equiv \{k_1, \dots, k_N\}$ paramétrisées par un ensemble de $\bar{\nu}$ nombres $q_a, 1 \leq a \leq \bar{\nu}$.

Pour cela nous considérons séparément les systèmes homogènes (5.14) et (5.15) dont les matrices sont les $M(\mathcal{E}_{\nu+1})$ et les $\bar{M}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})$, associées aux différents ensembles d'indices. L'existence d'une solution non nulle de ces systèmes entraîne les relations suivantes :

$$\det |M(\mathcal{E}_{\nu+1})| \equiv \det \left| -e^{-ik_\alpha L} \delta_{\alpha\beta} + \frac{Y_\beta(\mathcal{E}_{\nu+1})}{u_\beta - u_\alpha + 1} \right|_{\mathcal{E}_{\nu+1}} = 0 \tag{6.1}$$

$$\det |\bar{M}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})| \equiv \det \left| -e^{ik_\alpha L} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\bar{Y}_\beta(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})}{u_\alpha - u_\beta + 1} \right|_{\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}} = 0 \tag{6.2}$$

Nous avons indexé le déterminant (6.1) par $\mathcal{E}_{\nu+1}$ pour indiquer que les lignes et les colonnes sont repérées par les indices de $\mathcal{E}_{\nu+1}$.

La clé de la solution des équations (6.1) et (6.2) pour tous les ensembles $\mathcal{E}_{\nu+1}$ et $\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}$ est donnée par la proposition IV démontrée en appendice. Etant donnés $(p + 1)$ variables $u_j, j \in \mathcal{E}_{p+1}$, et p paramètres $v_a, 1 \leq a \leq p$, la fraction rationnelle en u et v .

$$M = \det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}_{p+1}}$$

s'annule identiquement, si les quantités z ont les valeurs

$$z_j = \prod_{a=1}^p \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right), \quad j \in \mathcal{E}_{p+1}.$$

Remarquons que certains paramètres v peuvent être infinis : ce qui revient à les supprimer et à définir z_j par un nombre de facteurs inférieurs à p . Il suffit d'appliquer cette identité à

l'équation (6.1), avec $p = \nu$. Considérons un choix d'indices $\mathcal{E}_{\nu+1}$ particulier. S'il existe des paramètres v_a en nombre inférieur ou égal à ν tels que

$$z_j = e^{-ik_j L} = \prod_a \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right), \quad j \in \mathcal{E}_{\nu+1} \tag{6.3}$$

(avec la notation $u_j = \frac{i}{V} k_j$) on obtient :

$$\det |M(\mathcal{E}_{\nu+1})| = 0.$$

Supposons alors que nous nous donnions un ensemble de paramètres v_a dont le nombre ne dépasse pas ν . Il suffit de choisir les N nombres k_j parmi les solutions de l'équation transcendante en k

$$e^{-ikL} = \prod_a \left(1 - \frac{1}{ik/V - v_a} \right) \tag{6.4}$$

pour être assuré de la compatibilité de toutes les équations (6.1) relatives à tous les ensembles $\mathcal{E}_{\nu+1}$. Ceci vient évidemment de ce qu'en chaque équation (6.1) ne figure qu'un seul k_j . Les v étant donnés arbitrairement pour l'instant, l'équation (6.4) possède en général une infinité de solutions discrètes, d'où nous extrayons une infinité d'ensembles $\{k\}$ de N nombres k_j ordonnés, distincts.

Passons maintenant aux équations analogues (6.2) : $\det |\bar{M}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})| = 0$. La proposition IV s'applique de la même façon au déterminant \bar{M} à la différence qu'il faut changer le signe de tous les u , donc de tous les k .

S'il existe des nombres \bar{v}_a en nombre inférieur ou égal à $\bar{\nu} = N - \nu$ tels que pour tout j

$$\bar{z}_j = e^{ik_j L} = \prod_{a \leq \bar{\nu}} \left(1 + \frac{1}{-ik_j/V - \bar{v}_a} \right) \tag{6.5}$$

alors

$$\det |\bar{M}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})| = 0.$$

En effet, prenons l'inverse des deux membres de l'équation (6.4), nous obtenons :

$$e^{ikL} = \prod_{a \leq \nu} \left(1 + \frac{1}{-ik/V + v_a - 1} \right) \tag{6.6}$$

Il suffit de choisir, d'une part $\bar{v}_a = 1 - v_a$, et d'autre part le nombre de v ne dépassant pas le plus petit des deux entiers ν et $\bar{\nu}$. Comme $\bar{\nu}$ est la longueur de la seconde colonne de T , nous avons $\bar{\nu} \leq \nu$ et $\bar{\nu} \leq \frac{N}{2}$. Nous choisissons donc le plus grand nombre de paramètres v_a possible, soit $\bar{\nu}$; si les k sont solutions de la seule équation

$$e^{-ikL} = \prod_{a=1}^{\bar{\nu}} \left(1 + \frac{1}{(ik/V) - v_a} \right). \tag{6.7}$$

Les conditions nécessaires (6.1) et (6.2) sont toutes satisfaites.

Nous allons donner à cette équation (6.7) une forme plus agréable en définissant $\bar{\nu}$ nombres complexes q_a tels que

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{1}{2} + \frac{i}{V} q_a, \\ \bar{v}_a &= \frac{1}{2} - \frac{i}{V} q_a, \end{aligned} \tag{6.8}$$

L'équation en k devient

$$e^{ikL} = \prod_{a=1}^{\bar{\nu}} \frac{\frac{2i}{V}(k - q_a) - 1}{\frac{2i}{V}(k - q_a) + 1} \quad (6.9)$$

Définissons les angles $\theta_{ja} \pmod{2\pi}$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq a \leq \bar{\nu}$ par les égalités

$$\frac{2}{V}(k_j - q_a) = \cotg \frac{1}{2}\theta_{ja}. \quad (6.10)$$

Il résulte de (6.3) et (6.9) que les nombres k_j satisfont aux conditions de périodicité suivantes

$$Lk_j = 2\pi n_j + \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \theta_{ja}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (6.11)$$

les n_j sont des nombres entiers.

Les équations (6.10) et (6.11) quantifient les nombres d'ondes et réduisent le choix des k_j admissibles au choix d'une suite d'entiers n_j et de $\bar{\nu} = \frac{N}{2} - S$ paramètres q .

Evidemment, la méthode inductive que nous avons suivie dans cette section ne permet pas de conclure que nous ayons toutes les solutions des conditions nécessaires. Nous étudierons cette question après avoir obtenu un système complet de relations qui déterminent fonctions d'ondes et niveaux d'énergie.

7. Les coefficients de la fonction d'onde dans le secteur initial

7.1. SOLUTION DU SYSTÈME HOMOGENÈ (5.15). — Nous continuons toujours à dissocier les deux systèmes (5.14) et (5.15) qui sont pourtant relatifs aux mêmes inconnues $A_0\{P\}$. Nous abordons dans cette section "le plus petit" des deux, c'est-à-dire le système (5.15) et nous montrons, en construisant la solution, la compatibilité de toutes les équations homogènes dont les matrices partielles sont les \bar{M} , ce qui constitue une première étape vers la solution globale.

Rappelons le résultat de la section 5 (proposition (5.15)). Une permutation arbitraire P et un indice b ($1 \leq b \leq \nu$) étant choisis, les $\bar{\nu} + 1$ quantités forment un vecteur ξ de composantes ξ_τ

$$\xi : -A_0\{P\}, A_0\{P(b, \nu + 1)\}, \dots, A_0\{P(bN)\}$$

qui sont solutions du système homogène

$$\sum_{\tau \in \mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}} \bar{M}_{\sigma\tau}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}) \xi_\tau = 0 \quad (7.1)$$

avec

$$\sigma \in \mathcal{E}_{\bar{\nu}+1} \equiv \{P_b, P_{(\nu+1)}, \dots, P_N\},$$

et

$$\bar{M}_{\sigma\tau}(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}) = -e^{ik_\sigma L} \delta_{\sigma\tau} + \frac{\bar{Y}_\tau(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})}{u_\sigma - u_\tau + 1} \quad (7.2)$$

Explicitons davantage les inconnues ξ_τ ou A_0 , en nous servant de la notation introduite en (4.6) où les indices qui figurent dans $A_0\{P\}$ sont divisés en deux groupes : un groupe de gauche, image par P des indices de la première colonne et un groupe de droite image par P des indices de la seconde colonne du tableau T .

Posons $\alpha = P_b$, qui appartient au premier groupe, et soient

$$\lambda = P(\nu + 1), \mu = P(\nu + 2), \dots, \rho = PN$$

les indices du second groupe. Nous avons donc

$$\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1} \equiv \{\alpha\lambda\mu \dots \rho\} \quad (7.3)$$

Les coefficients inconnus s'écrivent :

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= -A_0\{P\} &= (\dots \alpha \dots | \lambda\mu \dots \rho) \\ \xi_\lambda &= A_0\{P(b, \nu + 1)\} &= (\dots \lambda \dots | \alpha\mu \dots \rho) \\ \xi_\mu &= A_0\{P(b, \nu + 2)\} &= (\dots \mu \dots | \lambda\alpha \dots \rho) \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_\rho &= A_0\{P(b, N)\} &= (\dots \rho \dots | \lambda\mu \dots \alpha) \end{aligned} \quad (7.4)$$

La solution du système linéaire (7.1) relatif à l'ensemble $\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}$ est donnée par la proposition III, formule (C.5) de l'appendice. Le déterminant $\det|\bar{M}|$ est nul d'après le choix des k qui fait l'objet de la section 6. En général le rang du système est effectivement $\bar{\nu}$, et l'on a pour tout indice $\omega \in \mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}$ la proportion suivante

$$\xi_\omega = B(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}) \det \left| e^{ik_j L} \delta_{j\ell} + \frac{\bar{Y}_\ell(\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\omega)}{u_j - u_\ell + 1} \right|_{\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\omega} \quad (7.5)$$

où $B(\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1})$ est un coefficient de proportionnalité qui ne dépend que de l'ensemble $\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}$, et où l'ensemble de $\bar{\nu}$ indices $\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\omega$ est ainsi défini :

$$\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\omega = \mathcal{E}_{\bar{\nu}+1} - \{\omega\}.$$

Nous avons donc :

$$\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\alpha = \{\lambda\mu \dots \rho\}, \mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\lambda = \{\alpha\mu \dots \rho\}, \text{ etc.} \quad (7.6)$$

le déterminant qui définit ξ_ω est construit sur l'ensemble d'indices $\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\omega$. On reconnaît dans l'ensemble $\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^\omega$ les indices qui constituent le second groupe dans l'écriture (7.4) du coefficient ξ_ω .

Appelons $c(\mathcal{F})$ la valeur du déterminant construit sur \mathcal{F} qui intervient dans (7.5).

$$c(\mathcal{F}) = \det \left| -e^{ik_j L} \delta_{j\ell} + \frac{\bar{Y}_\ell(\mathcal{F})}{u_j - u_\ell + 1} \right|_{\mathcal{F}} \quad (7.7)$$

Ce coefficient $c(\mathcal{F})$ dépend symétriquement des indices de \mathcal{F} , puisque permuter deux indices, c'est permuter simultanément lignes et colonnes correspondantes dans le déterminant (7.5). Rapprochant (7.4) et (7.5) nous pouvons écrire les $\bar{\nu}$ égalités suivantes

$$\begin{aligned} (\dots \alpha \dots | \lambda\mu \dots \rho) &= - B(\alpha\lambda\mu \dots \rho) c(\lambda\mu \dots \rho) \\ (\dots \lambda \dots | \alpha\mu \dots \rho) &= B(\alpha\lambda\mu \dots \rho) c(\alpha\mu \dots \rho) \\ (\dots \mu \dots | \lambda\alpha \dots \rho) &= B(\alpha\lambda\mu \dots \rho) c(\lambda\alpha \dots \rho) \\ &\dots\dots\dots \\ (\dots \rho \dots | \lambda\mu \dots \alpha) &= B(\alpha\lambda\mu \dots \rho) c(\lambda\mu \dots \alpha) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Or, ces égalités doivent être vérifiées pour tous les choix possibles d'indices puisque la permutation P et l'indice b qui définissent $\mathcal{E}_{\bar{\nu}+1}$ sont arbitraires. Nous allons en déduire que les

coefficients B sont tous égaux à une même constante que multiplie le signe de la permutation P . Ceci résulte des deux remarques suivantes :

a) il résulte de (7.8) que B est antisymétrique dans l'ensemble de ses indices, puisque c est complètement symétrique et les coefficients $(\dots|\dots)$ antisymétriques dans chacun des groupes.

b) il résulte de la première égalité (7.8) et de l'antisymétrie du premier membre dans les indices du premier groupe que $B(\alpha\lambda \dots \rho)$ est invariant au signe près si l'on substitue à α n'importe quel indice β distincts des autres. On peut donc de proche substituer dans B tout indice à un autre en changeant au plus le signe. On vérifie aisément que la solution du système (7.8) est la suivante, compte tenu du signe

$$(\alpha\beta\gamma \dots \delta|\lambda\mu \dots \rho) = BI(P)c(\lambda\mu \dots \rho) \tag{7.9}$$

où P est la permutation

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots & \lambda & \mu & \dots & \rho \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \nu + 1 & \nu + 2 & \dots & N \end{pmatrix}$$

et où B est une constante.

On peut encore écrire la relation (7.9) sous la forme

$$A_0\{P\} = BI(P)c(P(\nu + 1), P(\nu + 2), \dots, P_N), \tag{7.10}$$

sur laquelle on vérifie immédiatement la proposition (7.5).

La conclusion de ce paragraphe est la compatibilité complète des équations de périodicité (5.15) qui résultent des conditions (5.3). Ces conditions expriment l'invariance de la fonction d'onde lorsque une particule du premier groupe subit une translation $+L$ à travers les particules du second groupe. Rappelons que la relation (5.2) n'exprime que "la moitié" de la condition de périodicité.

7.2. FORME DÉVELOPPÉE DES COEFFICIENTS $A_0\{P\}$. — D'après le résultat (7.10) du paragraphe précédent, nous avons

$$A_0\{P\} = BI(P)c(\mathcal{F}), \tag{7.11}$$

avec

$$\mathcal{F} \equiv \{P(\nu + 1), P(\nu + 2), \dots, P_N\},$$

et

$$c(\mathcal{F}) = \det \left| -e^{ik_j L} \delta_{j\ell} + \frac{\bar{Y}_j(\mathcal{F})}{u_j - u_\ell + 1} \right|_{\mathcal{F}} \tag{7.12}$$

Or, on a obtenu, formule (G.3) en appendice, un développement de ce déterminant lorsque les nombres k_j vérifient les conditions (6.5) ou (6.7) : celles-ci expriment que les systèmes homogènes partiels avec lesquels on a construit les coefficients $c(\mathcal{F})$ ont justement une solution non triviale.

Dans les notations de l'appendice G, pour le choix d'indices $\mathcal{F} = \{123 \dots \bar{\nu}\}$, nous avons le développement suivant de $c(\mathcal{F})$:

$$c(\mathcal{F}) = c(k_1 k_2 \dots k_{\bar{\nu}}) = \sum_R \frac{1}{\bar{\nu}_1 + u_{R1}} \frac{1}{\bar{\nu}_2 + u_{R2}} \dots \frac{1}{\bar{\nu}_{\bar{\nu}} + u_{R\bar{\nu}}} \prod_{1 \leq j < a \leq \bar{\nu}} \left(1 - \frac{1}{\bar{\nu}_a + u_{Rj}} \right) \prod_{1 \leq j < \ell \leq \bar{\nu}} \left(1 + \frac{1}{u_{Rj} - u_{R\ell}} \right). \tag{7.13}$$

Exprimant les u et les v en fonction des k et des q (définition (6.8))

$$u_j = \frac{i}{V} k_j \quad \bar{v}_a = \frac{1}{2} - \frac{i}{V} q_a$$

et choisissant le coefficient B égal à $\left(\frac{i}{V}\right)^{\bar{\nu}}$, nous obtenons dans une notation indicielle un peu rapide, mais suggestive :

$$c(\mathcal{F}) \equiv c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = \sum_R \left\{ \frac{1}{k_{R\alpha} - q_1 - \frac{iV}{2}} \frac{1}{k_{R\beta} - q_2 - \frac{iV}{2}} \dots \frac{1}{k_{R\delta} - q_{\bar{\nu}} - \frac{iV}{2}} \prod_{\alpha < a} \frac{k_{R\alpha} - q_a + \frac{iV}{2}}{k_{Ra} - q_a - \frac{iV}{2}} \prod_{\alpha < \beta} \left(1 + \frac{iV}{k_{R\beta} - k_{R\alpha}} \right) \right\} \quad (7.14)$$

La somme (7.14) porte sur les permutations R d'ordre $\bar{\nu}$, et les produits portent sur tous les indices, a variant de 1 à $\bar{\nu}$ et α, β, \dots parcourant la suite d'indices $\mathcal{F} = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$.

Il est important de remarquer que la fonction d'onde s'annule identiquement dans le secteur σ_0 si deux nombres k sont égaux. En effet, d'une part, le coefficient $c(\mathcal{F})$ donné par (7.14) a une limite lorsque deux k tendent l'un vers l'autre ; d'autre part, on vérifie que dans la somme (3.6) qui définit φ les termes se compensent deux à deux (si $k_1 = k_2$, $A_0\{P\} = -A_0\{(12)P\}$, d'après (7.14)). Nous ferons donc l'hypothèse que pour $V \neq 0$, la fonction d'onde est nécessairement construite à partir d'un ensemble de N nombres k distincts. Cependant à la limite $V = 0$, il se pourra que des nombres k soient égaux par paires.

7.3. REMARQUE SUR LA MÉTHODE. — On peut se demander pourquoi nous avons choisi de déterminer les coefficients A_0 à partir des matrices \bar{M} (5.15) plutôt que des matrices M (5.14), d'autant plus qu'il existe un lien étroit entre les conditions aux limites (5.12) et les conditions de symétrie (4.16) encore inexploitées qui font intervenir les mêmes combinaisons d'inconnues. En effet, la première condition de périodicité (5.2) qui donne lieu aux équations (5.12), de matrice M (5.14), est associée à la translation d'une particule de la première colonne. De même, l'expression de la condition de symétrie (2.4) est associée à la permutation d'une variable de la première colonne avec celles de la seconde.

Cependant la méthode adoptée se justifie ainsi : si nous avons choisi le système des matrices M , par une application analogue de la proposition III, nous aurions construit les coefficients A_0 comme des déterminants d'ordre ν du type

$$\det \left| -e^{-ik_j L} \delta_{j\ell} + \frac{Y_\ell(\mathcal{F}_\nu)}{u_\ell - u_j + 1} \right|_{\mathcal{F}_\nu} \quad (7.15)$$

Mais d'après le choix des $\{k\}$, solutions de l'équation (6.7),

$$e^{-ik_j L} = \prod_{a=1}^{\bar{\nu}} \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right), \quad (7.16)$$

le nombre de facteurs du second membre est $\bar{\nu} = N - \nu$. D'après la proposition IV montrée en appendice, le déterminant (7.15), compte-tenu des relations (7.16) est identiquement nul en u

et ν , si $\bar{\nu}$ est inférieur à ν . Donc, à l'exception du cas $\bar{\nu} = \nu$, c'est-à-dire du cas de spin total $S = 0$, la solution (7.15) disparaît.

Le cas du spin 0 est particulier puisqu'il établit une symétrie entre le rôle des deux colonnes du tableau T . Aussi allons nous donc le traiter maintenant. D'après une remarque antérieure, il sera aisé d'exprimer simultanément les conditions de symétrie et "la moitié" des conditions aux limites. On en déduira un ensemble de relations entre les k et les q , qui par chance seront aussi suffisantes pour les déterminer, amenant ainsi à la solution du problème pour le cas $S = 0$. Continuant à procéder par induction, nous généraliserons simplement au spin quelconque les formules obtenues dans le cas de spin 0, et démontrerons enfin complètement par un calcul direct, la compatibilité de l'ensemble des équations aux limites (5.14) et (5.15) et les conditions de symétrie (4.16) pour toutes les valeurs du spin.

8. Le cas du spin $S = 0$

D'après la remarque finale de la section précédente, le cas du spin 0 nous permet d'exploiter dès maintenant les conditions de symétrie (4.16) conjointement avec les conditions de périodicité (5.12).

Une permutation P étant donnée, ainsi qu'un indice a de la seconde colonne $\nu < a \leq N$, les coefficients

$$\xi_{Pa} = -A_0\{P\}, \quad \xi_{P1} = A_0\{P(a1)\}, \quad \dots, \quad \xi_{P\nu} = A_0\{P(a\nu)\},$$

sont solutions du système homogène (5.12)

$$\sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\nu+1}} M_{j\ell}(\mathcal{E}_{\nu+1}) \xi_\ell = 0, \quad j \in \mathcal{E}_{\nu+1}. \quad (8.1)$$

$$\mathcal{E}_{\nu+1} \equiv \{Pa, P1, P2, \dots, P\nu\}. \quad (8.2)$$

Avec cette notation, la condition de symétrie (4.16) s'écrit :

$$\sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\nu+1}} Y_\ell(\mathcal{E}_{\nu+1}) \xi_\ell = 0. \quad (8.3)$$

la compatibilité des $(\nu + 2)$ équations (8.1) et (8.3) relatives à un ensemble $\mathcal{E}_{\nu+1}$ s'exprime en annulant un certain déterminant bordé d'ordre $\nu + 2$.

La proposition (E.6) de l'appendice nous dit que cette condition est équivalente à

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_{\nu+1}} z_j \frac{\partial M(\mathcal{E}_{\nu+1})}{\partial z_j} = 0, \quad z_j = e^{-ik_j L}, \quad (8.4)$$

avec

$$M(\mathcal{E}_{\nu+1}) = \det \left| -z_j \delta_{j\ell} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_{\nu+1})}{u_j - u_\ell + 1} \right|_{\mathcal{E}_{\nu+1}}$$

Si l'on définit la fonction d'une variable ζ , obtenue en remplaçant dans M les quantités z_j par ζz_j

$$m(\zeta) = M(\mathcal{E}_{\nu+1})|_{z_j \rightarrow \zeta z_j}, \quad j \in \mathcal{E}_{\nu+1}, \quad (8.5)$$

il est curieux que les conditions aux limites (5.12) et les conditions de symétrie (8.4) donnent lieu aux relations

$$m(\zeta)|_{\zeta=1} = 0, \quad (8.6)$$

$$\left. \frac{d}{d\zeta} m(\zeta) \right|_{\zeta=1} = 0, \tag{8.7}$$

relativement à chaque ensemble d'indices $\mathcal{E}_{\nu+1}$.

La proposition VI, formule (E.1) nous dit que la condition (8.7) est équivalente à l'existence d'une solution non triviale pour le système aux $(\nu + 1)$ indéterminées $w_a, 1 \leq a \leq \nu$, et w :

$$\sum_{a=1}^{\nu} \frac{w_a}{(u_i - v_a)(u_i - v_a + 1)} - w = 0. \tag{8.8}$$

C'est ici que se réalise un découplage entre les différents u_i tout à fait semblable à celui qui a été obtenu par les équations (6.3) ou (6.7) pour exprimer la compatibilité des systèmes

$$\det |M(\mathcal{E}_{\nu+1})| = 0.$$

c'est-à-dire, d'après (8.5)

$$m(\zeta) = 0 \quad \text{si} \quad \zeta = 1 \quad (\text{pour chaque } \mathcal{E}_{\nu+1})$$

Les équations (8.8), elles, sont équivalentes à

$$\frac{d}{d\zeta} m(\zeta) = 0 \quad \text{si} \quad \zeta = 1$$

Enfin, par la proposition VIII, l'élimination des indéterminées w_a et w de (8.8) nous donne les conditions

$$\prod_{j=1}^N \frac{u_j - v_a}{u_j - v_a + 1} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\bar{\nu}} \frac{v_a - v_b + 1}{v_a - v_b - 1} \quad \text{avec ici } \bar{\nu} = \nu. \tag{8.9}$$

Nous écrivons celles-ci en terme des nombres d'onde k et des paramètres q sous la forme

$$\prod_{j=1}^N \frac{k_j - q_a + \frac{iV}{2}}{k_j - q_a - \frac{iV}{2}} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\bar{\nu}} \frac{q_b - q_a + iV}{q_b - q_a - iV} \tag{8.10}$$

où l'indice a prend toute valeur de 1 à $\bar{\nu}$.

En conclusion, pour le système de spin 0, nous avons obtenu autant d'équations que de paramètres inconnus : N équations telles que (6.9) pour chaque k_j , et $\bar{\nu}$ équations (8.10), pour les N nombres d'onde k et les $\bar{\nu}$ paramètres q , avec la condition particulière à cette section $N = 2\nu, \nu = \bar{\nu}$.

L'intérêt de cette section a été de nous fournir les relations (8.10), grâce à la solution particulière du spin 0 et de nous permettre ainsi d'aborder maintenant le cas général de spin quelconque, en reprenant la suite de la section 7.

9. Le cas général de spin S

Dans la section 7, nous avons établi que les coefficients $A_0\{P\}$ s'écrivent sous la forme

$$A_0\{P\} = I(P)c(\mathcal{F}) \tag{9.1}$$

avec

$$\mathcal{F} = \{P(\nu + 1), P(\nu + 2), \dots, P_N\} \quad (9.2)$$

et

$$c(\mathcal{F}) = \det \left[-e^{ik_j L} \delta_{j\ell} + \frac{\bar{Y}_\ell(\mathcal{F})}{u_\ell - u_j + 1} \right]_{\mathcal{F}} \quad (9.3)$$

Si les nombres k sont solutions de l'équation (6.9) dépendant d'un ensemble de $\bar{\nu}$ paramètres q , il résulte alors de la section 7 que toute équation du système (5.15) est vérifiée. La "seconde moitié" des conditions aux limites est donc ainsi remplie.

Il reste à établir le résultat suivant pour affirmer que les coefficients (9.1) déterminent une fonction d'onde solution du problème posé :

Si les nombres k et q sont liés par les relations (8.10) avec $N = \nu + \bar{\nu}$, $\bar{\nu} \leq \nu$ alors chaque équation de périodicité (5.12) et chaque équation de symétrie (4.16) est vérifiée. Ceci achèvera de démontrer la compatibilité globale des systèmes M (5.12), \bar{M} (5.15) et du système (4.16).

Ecrivons à nouveau les équations à vérifier, pour toute permutation P et tout indice a de la seconde colonne :

Equation (5.12) aux limites :

$$(Y_{Pa}(\mathcal{E}_{\nu+1}) - e^{-ik_{Pa}L}) A_0\{P\} - \sum_{\mu=1}^{\nu} A_0\{P(a\mu)\} \frac{Y_{P\mu}(\mathcal{E}_{\nu+1})}{P\mu - Pa + 1} = 0 \quad (9.4)$$

Equation (4.16) de symétrie :

$$Y_{Pa}(\mathcal{E}_{\nu+1}) A_0\{P\} - \sum_{\mu=1}^{\nu} Y_{P\mu}(\mathcal{E}_{\nu+1}) A_0\{P(a\mu)\} = 0 \quad (9.5)$$

avec

$$\mathcal{E}_{\nu+1} = \{Pa, P_1, P_2, \dots, P_\nu\}.$$

Dans la notation (4.6), nous aurons

$$\begin{aligned} A_0\{P\} &\equiv (\dots \lambda \dots | \alpha\beta\gamma \dots \delta) \\ &= I(P)c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) \end{aligned} \quad (9.6)$$

avec

$$\lambda = P_a, \alpha = P(\nu + 1), \beta = P(\nu + 2), \dots, \delta = PN$$

on appellera μ, σ, \dots, ρ les indices P_1, P_2, \dots, P_ν .

L'équation aux limites (9.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} &c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) (Y_\alpha(\mathcal{E}_{\nu+1}) - z_\alpha) \\ &+ c(\lambda\beta\gamma \dots \delta) \frac{Y_\lambda}{u_\lambda - u_\alpha + 1} + c(\mu\beta\gamma \dots \delta) \frac{Y_\mu}{u_\mu - u_\alpha + 1} \\ &+ \dots + c(\rho\beta\gamma \dots \delta) \frac{Y_\rho}{u_\rho - u_\alpha + 1} = 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

et l'équation de symétrie (9.5)

$$c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) Y_\alpha + c(\lambda\beta\gamma \dots \delta) Y_\lambda + \dots + c(\rho\beta\gamma \dots \delta) Y_\rho = 0 \quad (9.8)$$

avec toujours la référence implicite des Y à l'ensemble :

$$\mathcal{E}_{\nu+1} = \{\lambda\mu\sigma \dots \rho\}.$$

On remarque dans ces deux équations (9.7) et (9.8) que les coefficients c sont sommés sur leur premier indice, le groupe des autres $\beta, \gamma, \dots, \delta$ restant fixe. Nous avons donc besoin de connaître la dépendance de ce coefficient c par rapport à l'un de ses indices et c'est l'objet de la proposition IX, qui nous donne la décomposition en éléments simples par rapport à u_α :

$$c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) \equiv \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \frac{R_a}{u_\alpha + \bar{v}_a} \tag{9.9}$$

Commençons par vérifier la relation (9.7). Pour cela nous calculons la somme :

$$S = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}_{\nu+1}} c(\lambda\beta\gamma \dots \delta) \frac{Y_\lambda}{u_\lambda - u_\alpha + 1}, \tag{9.10}$$

qui doit être égale à

$$z_\alpha c(\alpha\beta\gamma \dots \delta).$$

Or, chaque pôle $\frac{1}{u_\alpha + \bar{v}_a}$ contribue à la somme (9.10) de la façon suivante :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{E}_{\nu+1}} \frac{1}{u_\lambda + \bar{v}_a} \frac{Y_\lambda(\mathcal{E})}{u_\lambda - u_\alpha + 1} \equiv \frac{1}{u_\alpha + \bar{v}_a + 1} \prod_{\lambda \in \mathcal{E}_{\nu+1}} \left(1 - \frac{1}{u_\lambda + \bar{v}_a} \right). \tag{9.11}$$

L'expression (9.10) vaut donc :

$$S = \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \frac{R_a}{u_\alpha + \bar{v}_a - 1} \prod_{\lambda \in \mathcal{E}_{\nu+1}} \left(1 - \frac{1}{u_\lambda - \bar{v}_a} \right). \tag{9.12}$$

Reportons dans (9.12) l'expression de R_a donnée par la proposition IX, on obtient pour la somme S

$$S = \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \left\{ \frac{1}{u_\alpha + \bar{v}_a - 1} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{1}{u_j + \bar{v}_a} \right) \prod_{b \neq a} \left(1 - \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) c(\beta\gamma \dots \delta) \Big|_{\bar{v}_a = \infty} \right\} \tag{9.13}$$

C'est à ce point qu'intervient l'hypothèse de la section 8 : formule (8.9). Celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{1}{u_j + \bar{v}_a} \right) \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\bar{\nu}} \left(1 - \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) = \prod_{b=1}^{\bar{\nu}} \left(1 + \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) \tag{9.14}$$

où l'on a tenu compte des égalités $v_a + \bar{v}_a = 1$. On en déduit pour la somme S , après avoir porté (9.14) dans (9.13)

$$S = \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \frac{1}{u_\alpha - v_a} \prod_{b \neq a} \left(1 + \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) c(\beta\gamma \dots \delta) \Big|_{\bar{v}_a = \infty} \tag{9.15}$$

Or, d'après la proposition X démontrée en appendice J, on reconnaît dans cette dernière somme la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$z_\alpha c(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$$

considérée comme fonction de u_α . Ce qui démontre les égalités (9.7) et (9.4).

Pour démontrer la condition de symétrie (9.8), le calcul est analogue : on considère la somme

$$S' = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}_{\nu+1}} c(\lambda\beta\gamma \dots \delta) Y_\lambda(\mathcal{E}_{\nu+1}) \quad (9.16)$$

Chaque pôle $\frac{R_a}{u_\alpha + \bar{v}_a}$ contribue à la somme S' de la façon suivante :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{E}} \frac{1}{u_\lambda + \bar{v}_a} Y_\lambda(\mathcal{E}) \equiv 1 - \prod_{\lambda \in \mathcal{E}} \left(1 - \frac{1}{u_\lambda + \bar{v}_a} \right). \quad (9.17)$$

On en déduit par un calcul identique au précédent, compte-tenu de l'hypothèse (8.9)

$$S' = [u_\alpha c(\alpha\beta\gamma \dots \delta)]_{u_\alpha=\infty} - \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\bar{\nu}} \left(1 + \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) c(\beta\gamma \dots \delta) |_{\bar{v}_a=\infty}. \quad (9.18)$$

D'après le corollaire de la proposition X, appendice J, cette somme est nulle. La condition de symétrie est donc remplie.

10. Caractère complet de la solution

10.1. QUESTIONS PRÉLIMINAIRES. — Nous venons d'exposer dans les sections précédentes la méthode de solution purement algébrique par laquelle nous avons obtenu un système d'équations pour la détermination d'états discrets du système de fermions considéré. Une fois écrites les conditions de périodicité et de symétrie de la fonction d'onde, nous avons suivi une méthode inductive qui ne permet pas de conclure que nous avons la solution complète, c'est-à-dire un système d'équations dont les solutions déterminent tous les niveaux. Nous allons maintenant étudier ce système et montrer qu'il est suffisant pour donner la suite complète des états, en suivant ceux-ci par continuité lorsque l'intensité V de l'interaction varie d'une valeur finie à la valeur 0. Nous suivrons ainsi l'ensemble des nombres d'onde $\{k\}$ et les coefficients de la fonction d'onde, tout au moins dans le secteur initial où elle est donnée explicitement.

Ecrivons donc à nouveau les systèmes d'équations (6.9) et (8.10) pour les N nombres k_j et les $\bar{\nu} = \frac{1}{2}N - S$ paramètres auxiliaires q_a .

$$e^{ik_j L} = \prod_{a=1}^{\bar{\nu}} \frac{k_j - q_a + \frac{iV}{2}}{k_j - q_a - \frac{iV}{2}} \quad 1 \leq j \leq N \quad (10.1)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{k_j - q_a + \frac{iV}{2}}{k_j - q_a - \frac{iV}{2}} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\bar{\nu}} \frac{q_b - q_a + iV}{q_b - q_a - iV} \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu}. \quad (10.2)$$

La première conséquence à noter est la quantification de l'impulsion totale K , qui est une constante du mouvement d'après l'invariance par translation de l'Hamiltonien et des conditions de périodicité. On trouverait aisément, par examen de la fonction d'onde,

$$K = \sum_{j=1}^N k_j$$

A l'aide de (10.1) et (10.2) on obtient :

$$e^{iKL} = 1,$$

c'est-à-dire

$$K = \frac{2\pi n}{L}, \quad n \text{ entier} \tag{10.3}$$

Nous abordons maintenant l'étude du système (10.1) (10.2), et de la fonction d'onde dont les coefficients sont donnés section 7.2, grâce aux formules (7.12) et (7.14).

La première question est celle-ci : toute solution des équations (10.1) (10.2) détermine-t-elle un état du système de fermion ?

La réponse est contenue dans les sections précédentes. La méthode utilisée pour obtenir les équations (10.1) et (10.2) et la fonction d'onde (7.14), est purement algébrique. Elle est basée sur un certain nombre d'identités entre fonctions rationnelles. Dans les démonstrations cependant, nous avons dû faire les hypothèses implicites du genre "les pôles sont tous simples", impliquant par exemple que les k , ou les q , soient distincts. il est évident que les identités subsistent à la limite où deux pôles se confondent pourvu que l'on puisse définir par continuité l'identité limite. C'est par exemple le cas pour le coefficient (7.14), identique au déterminant (7.12), qui garde un sens lorsque deux nombres k sont égaux.

Une solution du système (10.1)-(10.2) conviendra donc, pourvu que la fonction d'onde, convenablement normalisée, soit définie. Cependant, nous ne connaissons celle-ci que dans un seul secteur, mais comme les k sont tous distincts, les formules de passage (3.8) nous montrent que la fonction d'onde est définie dans tout le domaine, si elle l'est dans σ_0 . Les solutions convenables du système (10.1) et (10.2) sont donc celles pour lesquelles la fonction d'onde est définie dans σ_0 .

La deuxième question est celle-ci : les solutions convenables du système (10.1)-(10.2) nous donnent-elles toutes les solutions du problème ?

La réponse est positive s'il existe une correspondance biunivoque entre les états du système en interaction et ceux du système sans interaction. Cette correspondance est fournie par la continuité des états et du spectre en fonction de V . A la limite $V = 0$, nous devons obtenir un ensemble de fonctions d'onde spatiales de particules indépendantes formant une base complète et possédant le type de symétrie du tableau T .

Pour simplifier l'étude de ces questions, nous allons dissocier conditions de symétrie et conditions de périodicité et oublier provisoirement ces dernières. D'ailleurs ces conditions sont indépendantes ; cependant ce sont les conditions de périodicité qui, en discrétisant la suite des états, ont du même coup séparé les états appartenant à des tableaux différents, permettant ainsi la solution des équations de symétrie. Nous pouvons maintenant reconnaître que, si les coefficients de la fonction d'onde dans σ_0 sont donnés par (7.11) et (7.14), la relation (10.2) suffit pour que les conditions de symétrie (4.15) ou (4.16) soient remplies : ceci à la suite du calcul direct effectué section 9, formules (9.16) et suivantes. C'est pourquoi il est justifié d'appeler les relations (10.1) équations aux limites et les relations (10.2), équations de symétrie.

Si l'on oublie les équations aux limites, les paramètres k qui déterminent une solution élémentaire sont arbitraires. Les relations (10.2) servent à déterminer en fonction des k les paramètres q , c'est-à-dire permettent de construire une solution élémentaire de l'équation de Schrödinger. Cette solution élémentaire est une fonction d'onde dans le cas où sont imposées les conditions aux limites adéquates : conditions de périodicités (10.1) ou bien encore états asymptotiques de diffusion : dans ce dernier cas, il suffit de choisir tous les nombres k réels.

10.2. DÉGÉNÉRESCENCE. — Nous calculons d'abord la dimension du sous-espace des fonctions d'ondes de symétrie T relatives à un ensemble $\{k\}$ donné, abstraction faite des conditions aux

limites.

Montrons d'abord que cette dimension g est donnée par

$$g = C_{\bar{\nu}}^N - C_{\bar{\nu}-1}^N \quad \bar{\nu} = \frac{1}{2}N - S \quad (10.4)$$

comme pour le système sans interaction.

Nous savons en effet que la fonction d'onde est déterminée par sa valeur dans un seul secteur σ_0 : dans ce secteur nous avons *a priori* $C_{\bar{\nu}}^N$ coefficients $A_0\{P\}$; d'après la condition d'antisymétrie dans chaque colonne que traduit la relation (4.5) et l'écriture (4.6). Entre ces coefficients existent autant de relations de symétrie (4.17) qu'il y a d'ensembles $\mathcal{E}_{\nu+1}$. Ces relations dépendent continûment de V et sont donc indépendantes puisqu'elles le sont à la limite $V = 0$. Le nombre de "solutions linéairement indépendantes" des équations de symétrie est donc

$$C_{\bar{\nu}}^N - C_{\bar{\nu}+1}^N \equiv g.$$

Nous vérifierons en effet que le nombre de solutions données par les relations (10.2) est précisément g .

Le fait que les k soient tous distincts d'après la remarque finale du paragraphe (7.2) simplifie le comptage. Nous savons *a priori* qu'à la limite $V = 0$, les k peuvent devenir égaux par paires. Examinons alors le cas où nous aurions à la limite r paires distinctes : ces paires symétriques d'espace sont nécessairement associées à des états singulets de spin : elles ne contribuent donc pas au comptage et le nombre de solutions est égal à la valeur de g pour $N - 2r$ particules

$$g_r = C_{\bar{\nu}-r}^{N-2r} - C_{\bar{\nu}-r-1}^{N-2r} ; \quad (10.5)$$

c'est ce qu'il nous faudra vérifier.

10.3. LIMITE DE LA FONCTION D'ONDE LORSQUE V TEND VERS ZÉRO. — Nous nous plaçons d'abord dans l'hypothèse restrictive suivante :

Hypothèse \mathcal{H} : les quantités $k_j^* = \lim k_j$ sont toutes distinctes.

Cette restriction est réalisée, soit que nous choisissons les nombres k indépendants et distincts en oubliant les conditions aux limites, soit que nous nous limitons provisoirement à la classe d'états sans "paires" — au sens du paragraphe 10.2 — tout en conservant les conditions de périodicité. On écrira k^* et q^* les valeurs limites (pour $V \rightarrow 0$) des quantités k et q .

$$k_j^* = \lim_{V \rightarrow 0} k_j, \quad q_a^* = \lim_{V \rightarrow 0} q_a.$$

On voit sur la forme explicite de la fonction d'onde (7.14) dans le vecteur initial σ_0 , que le coefficient $c(\mathcal{F})$ n'a de limite pour $V = 0$, que si les q^* sont tous distincts des k^* , dans l'hypothèse \mathcal{H} où ceux-ci sont distincts. Par là même, le comportement normal des relations (10.1) est assuré à la limite $V = 0$ et l'on obtient

$$e^{ik_j^* L} = 1.$$

Il existe donc des entiers n_j tels que

$$k_j^* = \frac{2\pi}{L} n_j.$$

Revenons aux coefficients $c(\mathcal{F})$ qui ont pour limite d'après (7.14)

$$c(\alpha\beta\gamma \dots \delta)|_{V=0} = \sum_R \frac{1}{k_{R\alpha}^* - q_1^*} \frac{1}{k_{R\beta}^* - q_2^*} \dots \frac{1}{k_{R\delta}^* - q_{\bar{\nu}}^*} \quad (10.6)$$

ou encore

$$\lim_{V \rightarrow 0} c(\mathcal{F}) = \text{permanent} \left| \begin{matrix} + & + \\ k_j^* - q_a^* \end{matrix} \right|_{\mathcal{F}} \quad j \in \mathcal{F} \equiv \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}, \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu}. \quad (10.7)$$

On aurait pu aussi obtenir la limite de $c(\mathcal{F})$ sous forme de déterminant d'après (9.3). Ceci donne lieu à une curieuse identité entre un permanent et un déterminant, démontrée directement appendice K.

10.4. LIMITE DES ÉQUATIONS DE SYMÉTRIE (10.2). — Pour étudier la limite du système (10.2), nous lui substituons la condition équivalente ci-dessous.

Soient $Q(z)$ le polynôme de degré N dont les racines sont les k_j , et $P(z)$ le polynôme de degré $\bar{\nu}$ dont les racines sont les q_a :

$$\begin{aligned} Q(z) &\equiv \prod_{j=1}^N (z - k_j), \\ P(z) &\equiv \prod_{a=1}^{\bar{\nu}} (z - q_a). \end{aligned} \quad (10.8)$$

le système (10.2) est équivalent aux $\bar{\nu}$ relations :

$$\frac{Q(q_a - \frac{iV}{2})}{Q(q_a + \frac{iV}{2})} = -\frac{P(q_a - iV)}{P(q_a + iV)} \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu} \quad (10.9)$$

Si le coefficient de la fonction d'onde donné par (7.14) est défini, on a $Q(q_a + \frac{iV}{2}) \neq 0$. Les équations (10.9) sont en général équivalentes aux suivantes

$$Q\left(q_a - \frac{iV}{2}\right) P(q_a + iV) + Q\left(q_a + \frac{iV}{2}\right) P(q_a - iV) = 0,$$

ou encore à la proposition :
le polynôme

$$Q\left(z + \frac{iV}{2}\right) P(z - iV) + Q\left(z - \frac{iV}{2}\right) P(z + iV)$$

est divisible par $P(z)$.

Résoudre les équations (10.2) revient donc à déterminer deux polynômes, P de degré $\bar{\nu}$ et R de degré N , tels que l'on ait :

$$Q\left(z + \frac{iV}{2}\right) P(z - iV) + Q\left(z - \frac{iV}{2}\right) P(z + iV) \equiv R(z)P(z). \quad (10.10)$$

La forme limite pour $V = 0$ de la condition de symétrie (10.2) ou (10.10) est la suivante :
Il existe un polynôme R_1 de degré $(N - 2)$ tel que l'équation différentielle du second ordre

$$QP'' - Q'P' - R_1P = 0 \quad (10.11)$$

ait une solution polynomiale de degré donné $\bar{\nu} \leq \frac{1}{2}N$.

Nous supposons qu'il y a une correspondance biunivoque entre les solutions de (10.11) et celles de (10.10) due à la continuité en V . Le problème se pose maintenant de rechercher, puis de dénombrer les solutions convenables de (10.11) dans l'hypothèse \mathcal{H} .

Première remarque

Si q^* est racine de P , sans l'être de Q , elle est simple. En effet, si elle était multiple, on aurait

$$P(q^*) = 0, \quad P'(q^*) = 0,$$

d'où l'on déduirait d'après (10.11) et l'hypothèse $Q(q^*) \neq 0$

$$P''(q^*) = 0, \quad P'''(q^*) = 0, \quad \text{etc.},$$

et par conséquent P serait identiquement nul, ce qui n'est pas ($d^0 P = \bar{\nu}$).

Deuxième remarque

Dans l'hypothèse \mathcal{H} , si q^* est racine commune de P et Q , elle est double pour P . En effet, il existe deux polynômes Q_1 et P_1 , et un entier positif s tels que

$$\begin{aligned} Q(z) &\equiv (z - q^*)Q_1 & Q_1(q^*) &\neq 0 \text{ d'après } \mathcal{H} \\ P(z) &\equiv (z - q^*)^s P_1 & P_1(q^*) &\neq 0. \end{aligned} \tag{10.12}$$

la relation (10.11) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (z - q^*)^{s+1} P_1'' Q_1 + (z - q^*)^s P_1' [(2s + 1)Q_1 - (z - q^*)Q_1'] \\ + s(s - 2)(z - q^*)^{s-1} P_1 Q_1 \equiv R_2 (z - q^*)^s P_1 \end{aligned} \tag{10.13}$$

où R_2 désigne un polynôme de degré $N - 1$.

Si l'exposant s était différent de 2 on déduirait de (10.13) où $P_1(q^*) = 0$, où $Q_1(q^*) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse (10.12). Donc $s = 2$.

Les seules racines multiples d'un polynôme P solution de (10.11) sont donc des racines doubles, qui sont aussi des racines simples de Q . Il en résulte que les solutions convenables de (10.11) dans l'hypothèse \mathcal{H} sont les polynômes P dont toutes les racines soient simples ; sinon la fonction d'onde limite dont les coefficients sont donnés par l'expression (10.6) ne serait pas définie, puisque certains q^* seraient égaux à certains k^* d'après la seconde remarque. Dans ces conditions le système limite auquel se réduit le système (10.2) pour $V = 0$ peut s'écrire ainsi :

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{k_j^* - q_a^*} = 2 \sum_{\substack{b=1 \\ (b \neq a)}}^{\bar{\nu}} \frac{1}{q_b^* - q_a^*} \tag{10.14}$$

puisque les nombres q^* sont distincts entre eux et distincts des k^* . Les relations limites (10.14) ne font que traduire l'identité (10.11) lorsque les polynômes P et Q ont toutes leurs racines simples.

Le dénombrement des solutions "convenables" de (10.11) c'est-à-dire des solutions $\{q\}$ des équations (10.14) est fait en appendice M proposition XIII en nous basant sur un résultat dû à Heine [16].

On trouve $C_{\bar{\nu}}^N - C_{\bar{\nu}-1}^N$ solutions distinctes, ce qui est exactement la dimension g du sous-espace des fonctions d'onde associées à un ensemble $\{k\}$, dimension obtenue formule (10.4) lorsque les k sont distincts.

Une fonction d'onde limite correspondant au tableau de symétrie T et à une solution $\{q\}$ admet donc le développement

$$\varphi_{T, \{q\}}(x_1 x_2 \dots x_N) = \sum_P I(P) c_{\{q\}}(P(\nu + 1), P(\nu + 2), \dots, P_N) \exp i(k_{P_1} x_1 + \dots + k_{P_N} x_N) \tag{10.15}$$

avec

$$c_{\{q\}}(P(\nu + 1), P(\nu + 2), \dots, P_N) = \text{perm} \begin{matrix} + & + \\ \left| \frac{1}{k_{P_j}^* - q_a^*} \right|_{\bar{\nu}} \end{matrix}$$

$$\nu + 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu}.$$

On a montré par un calcul direct effectué en appendice L que les coefficients ci-dessus satisfaisaient aux conditions de symétrie.

10.5. INDÉPENDANCE LINÉAIRE. — Il resterait à montrer l'indépendance linéaire des fonctions d'onde $\varphi_{T\{q\}}$ associées à tous les systèmes de nombres quantiques $\{q\}$ distincts. Nous ne l'avons pas fait en général, mais elle résulterait de la conjecture suivante que nous avons vérifiée dans les cas $\bar{\nu} = 1, 2$, proposition XIV : les coefficients $c_{\{q\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$ sont orthogonaux en ce sens :

$$\sum_{\alpha < \beta < \gamma < \dots} c_{\{q\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) c_{\{q'\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = 0$$

avec

$$\{q\} \neq \{q'\}. \tag{10.16}$$

L'indépendance linéaire en résulte

Une relation du type :

$$\sum_{\{q\}} \mathcal{A}_{\{q\}} \varphi_{\{q\}} \equiv 0 \tag{10.17}$$

entraîne d'après (10.15) et l'hypothèse \mathcal{H}

$$\sum_{\{q\}} \mathcal{A}_{\{q\}} c_{\{q\}}(\alpha\beta \dots \delta) = 0 \tag{10.18}$$

pour tout ensemble $\mathcal{F} = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$ de $\bar{\nu}$ indices distincts. On déduit de (10.16) et (10.18)

$$\mathcal{A}_{\{q\}} = 0 \quad \text{pour tout } \{q\},$$

puisque $c_{\{q\}}^2$ est positif.

10.6. L'ADJONCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES. — La conclusion de cette section est que le système d'équation (10.2) est complet, c'est-à-dire qu'il nous permet de construire toutes les solutions élémentaires de l'équation de Schrödinger qui sont en correspondance avec les solutions limites du cas sans interaction et qui, elles sont complètes. Nous allons voir que l'adjonction des équations aux limites (10.1), c'est-à-dire des conditions de périodicité, ne modifie pas cette conclusion. Les k^* limites sont alors de la forme :

$$k_j^* = \frac{2\pi n_j}{L}$$

Si les n_j sont tous distincts, il n'y a pas de difficulté. Par contre, si deux entiers n_j sont égaux, l'argument à développer est le suivant.

Le nombre d'onde limite $k^* = \frac{2\pi n}{L}$ est alors racine double du polynôme Q introduit au paragraphe 10.4 ; dans ce cas, il existe des solutions P de l'équation (10.11) telles que k^* soit aussi racine de P : un des paramètres

q^* est donc égal au nombre d'onde k^* de la paire. En effet, posons :

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z - k^*)^2 & Q_1(z) & \quad d^0 Q_1 = N - 2 \\ P(z) &= (z - k^*) & P_1(z) & \quad d^0 P_1 = \bar{\nu} - 1 \end{aligned} \quad (10.19)$$

on obtient pour la condition (10.11) :

$$Q_1 P_1'' - Q_1' P_1' \text{ est divisible par } P_1. \quad (10.20)$$

On est donc exactement ramené au problème analogue à (10.11) pour $(N - 2)$ particules, le spin restant inchangé :

$$\begin{aligned} N &\rightarrow N - 2, \\ \bar{\nu} &\rightarrow \bar{\nu} - 1. \end{aligned}$$

la paire k^* est supprimée et il reste $\bar{\nu} - 1$ paramètres q^* .

De même, s'il existe r paires de nombres k^* limites il existe des polynômes P solution de (10.11) qui ont pour racines les racines doubles de Q . Après élimination de ces racines communes, on est ramené au problème (10.11) pour $(N - 2r)$ nombres k^* distincts et $(\bar{\nu} - r)$ nombres q^* distincts. On obtient alors les équations analogues à (10.14) :

$$\sum_{\substack{\text{(paires exclues)}}} \frac{1}{k_j^* - q_a^*} = \sum_{b \neq a} \frac{2}{q_b^* - q_a^*} \quad (10.21)$$

qui résulte au fond de (10.14) par confluence de r nombres q^* avec r paires de k^* . Le dénombrement des solutions de (10.21) nous donne alors :

$$C_{\bar{\nu}-r}^{N-2r} - C_{\bar{\nu}-r-1}^{N-2r} = g_r$$

solutions distinctes (par la même méthode que pour (10.14)). Ce nombre est identique à la dégénérescence correspondante pour le système sans interaction donnée formule (10.5).

Nous montrerons seulement à la fin de la section 11 quelle est la forme limite des coefficients de la fonction d'onde dans le cas de l'existence de paires. Les résultats sont donnés par les expressions (11.8). Ces résultats nous permettent de conclure cette section en disant que l'ensemble des fonctions d'onde limites $\varphi_{\{n\}\{q\}}$ forme une base complète de l'espace de représentation des états du système de fermions en interaction évanescence. Lorsque l'intensité de celle-ci augmente, on peut suivre par continuité chaque état en fonction de V à partir d'une fonction $\varphi_{\{n\}\{q\}}$. Les nombres quantiques repérant chaque état sont par définition ceux de l'état limite. Ce seront donc :

- a) Les N nombres entiers n_j , pouvant être égaux par paires.
- b) Pour un choix de n_j , les g_r systèmes de nombres q ; chaque système $\{q\}$ étant solution des équations (10.21) où les "paires" n'interviennent pas.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ÉTAT FONDAMENTAL

11. Etude des équations couplées

Le but de cette section est de présenter le système des relations (10.1) et (10.2) sous une forme plus maniable pour le traitement ultérieur et mieux adaptée à l'étude des propriétés extensives du système de fermions. Il s'agit ici d'écrire les relations (10.1)-(10.2) sous forme "réelle", d'y mettre en évidence les nombres quantiques de chaque état, et d'indiquer sommairement leur classification. Un principe variationnel permettra, grâce à une analogie statique, la description des nombres quantiques de certaines classes d'états.

11.1. NOUVELLE FORME DES ÉQUATIONS COUPLÉES. — Transformons les équations (10.2) qui imposent le type de symétrie, en nous plaçant dans l'hypothèse \mathcal{H} (déjà formulée 10.3) où les k sont distincts. Utilisons les angles θ_{ja} introduits section 6 par la définition (6.10) :

$$\frac{2}{V} (k_j - q_a) = \cotg \frac{1}{2} \theta_{ja}.$$

Définissons les angles auxiliaires ψ_{ab} par les relations :

$$\frac{1}{V} (q_a - q_b) = \cotg \frac{1}{2} \psi_{ab}, \tag{11.1}$$

$$\psi_{ab} = -\psi_{ba} \tag{11.2}$$

les angles θ et ψ sont jusqu'ici définis *modulo* 2π .

Les équations (10.2) sont alors équivalentes aux suivantes :

$$\sum_{j=1}^N \theta_{ja} - \sum_{b=1}^{\bar{\nu}} \psi_{ba} = \text{multiple de } 2\pi \tag{11.3}$$

Nous allons maintenant choisir une détermination des angles θ et ψ en utilisant les nombres quantiques limites $\{q^*\}$. Dans l'hypothèse \mathcal{H} , lorsque V tend vers zéro, les q tendent vers des valeurs limites distinctes des k^* et, on l'a vu, distinctes entre elles, valeurs limites qui sont les racines des équations (10.14) et sont par définition les nombres quantiques $\{q^*\}$. Dans ces conditions, les définitions (6.10) et (11.1) montrent que les θ et les ψ tendent vers des multiples de 2π .

Nous choisissons alors la détermination continue des angles θ et ψ , telle que leur limite soit précisément zéro lorsque V tend vers zéro.

Pour V petit, nous avons donc les équivalences :

$$\theta_{ja} \propto \frac{V}{k_j - q_a^*} \quad \text{et} \quad \psi_{ab} \propto \frac{V}{q_a^* - q_b^*} \tag{11.4}$$

Pour toute valeur de V , le système (10.2) s'écrit, d'après (11.3)

$$\sum_{j=1}^N \theta_{ja} - \sum_{b=1}^{\bar{\nu}} \psi_{ba} = 0 \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu}. \tag{11.5}$$

Ce système (11.5) a pour limite le système (10.14), les déterminations continues des angles étant définies par les équivalences (11.4) au voisinage de $V = 0$.

Il résulte du principe de continuité que, dans tout le domaine de variation de la constante de couplage, on a :

- $|\theta_{ja}| < 2\pi$
- $\text{Signe } \theta_{ja} = \text{Signe } V \times \text{signe } (k_j^* - q_a^*)$.

En effet, lorsque V augmente à partir de 0, k_j peut croiser un certain nombre de q_a , c'est-à-dire les θ_{ja} correspondants passent continûment par la valeur $+\pi$ (si $k_j^* - q_a^* > 0$). Le nombre k ne peut devenir infini puisqu'il est borné d'après la dernière équation (11.6), la détermination continue d'un θ_{ja} ne peut donc dépasser 2π . Un tel angle garde donc le même signe, lorsque V varie en gardant un signe donné.

Nous ferons de plus l'hypothèse que les nombres q^* ne se croisent jamais entre eux, ce qui entraîne :

$$\psi_{ab} = -\psi_{ba}, \quad |\psi_{ab}| < \pi.$$

Le système des équations de périodicité (10.1) s'écrit sous la forme déjà donnée en (6.11), mais maintenant, la détermination des angles θ est précisée, de telle sorte que les entiers n_j qui figurent dans l'expression (6.11) définissent directement les nombres d'onde limites ($V \rightarrow 0$).

Récapitulons ci-dessous les équations couplées qui déterminent les ensembles de nombres k par l'intermédiaire des angles θ et ψ et des nombres q :

Equations couplées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{V} (k_j - q_a) = \cotg \frac{1}{2} \theta_{ja} \\ \frac{1}{V} (q_b - q_a) = \cotg \frac{1}{2} \psi_{ba} \\ \sum_{j=1}^N \theta_{ja} - \sum_{b=1}^{\bar{\nu}} \psi_{ba} = 0, \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu} \\ Lk_j = 2\pi n_j + \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} \theta_{ja}, \quad 1 \leq j \leq N. \end{array} \right. \quad (11.6)$$

Les nombres quantiques n_j sont les nombres d'onde limites définissant un état du système sans interaction.

Pour un ensemble donné d'entiers n_j distincts, les états sont repérés par les systèmes de nombre $\{q^*\}$ déjà définis et qui figurent seulement implicitement dans (11.6) grâce aux équivalences (11.4), où V est voisin de zéro :

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\theta_{ja}}{V} &= \frac{1}{\frac{L}{2\pi n_j} - q_a^*} \\ \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\psi_{ab}}{V} &= \frac{1}{q_a^* - q_b^*} \end{aligned} \quad (11.7)$$

On a vu section 10 que les nombres q^* étaient solutions des équations (10.14) :

$$\sum_j \frac{1}{(2\pi n_j / L) - q_a^*} = \sum_b \frac{2}{q_b^* - q_a^*} \quad (11.8)$$

L'impulsion totale d'un état de nombres quantiques $\{n_j\}$ est alors donnée par l'expression

$$K = \frac{2\pi}{L} \sum_{j=1}^N n_j$$

et l'énergie par la somme

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2. \tag{11.9}$$

11.2. CAS OÙ IL EXISTE DES PAIRES. — Le système (11.6) et les relations qui le précisent (11.7) et (11.8) ont été établies dans l'hypothèse \mathcal{H} où tous les nombres n_j sont distincts, puisque les valeurs limites des k_j sont justement les nombres d'onde $(2\pi n_j/L)$. Il nous faut maintenant étudier le cas où les valeurs limites de deux nombres k puissent être égales, puisqu'à la limite d'une interaction nulle deux fermions peuvent occuper le même état d'impulsion dans un état singulet de spin.

Nous supposons que les nombres $(2\pi n_j/L)$ sont encore les valeurs limites des k_j en faisant l'hypothèse que les angles θ tendent encore vers zéro avec V . Dans ces conditions, nous allons justifier la confluence d'un nombre q avec une paire k , (que nous avons observée au paragraphe 10.6 sur les équations limites 10.11) en montrant l'existence de la fonction d'onde limite dans le cas où nous avons une seule "paire".

Par hypothèse nous avons :

$$\lim k_1 = \lim k_2 = \frac{2\pi n_1}{L},$$

et il existe un q_a , par exemple q_1 tel que

$$q_1^* = \lim q_1^* = \frac{2\pi n_1}{L}$$

Nous obtenons alors d'après les équations (11.6)

$$\begin{aligned} \psi_{ab} &= O(V) && \text{pour tout } a, b \\ \theta_{ja} &= O(V) && \text{sauf pour } j = 1, 2 \text{ et } a = 1 \end{aligned} \tag{11.10}$$

$$\theta_{11} + \theta_{21} = O(V) \tag{11.11}$$

$$\begin{aligned} Lk_1 &= 2\pi n_1 + \theta_{11} + O(V) \\ Lk_2 &= 2\pi n_1 + \theta_{21} + O(V) \end{aligned} \tag{11.12}$$

Reportant ces valeurs de k_1 et k_2 dans les premières équations (11.6) pour $j = 1, 2$ et $a = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2}{V} \left(\frac{2\pi n_1}{L} - q_1 + \frac{\theta_{11}}{L} + O(V) \right) &= \cotg \frac{1}{2} \theta_{11} \\ \frac{2}{V} \left(\frac{2\pi n_1}{L} - q_1 + \frac{\theta_{21}}{L} + O(V) \right) &= \cotg \frac{1}{2} \theta_{21} \end{aligned} \tag{11.13}$$

or puisque

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi n_1}{L} - q_1 \right) = 0,$$

θ_{11} et θ_{21} ne peuvent être de l'ordre de V d'après (11.13) ; supposons-les de l'ordre de V^α , $0 < \alpha < 1$.

On a donc d'après (11.11)

$$\theta_{11} \propto \theta V^\alpha, \quad \theta_{21} \propto -\theta V^\alpha$$

Les deux équations (11.13) s'écrivent à l'ordre le plus bas

$$\begin{aligned} \frac{2}{V} \left(\frac{2\pi n_1}{L} - q_1 + \frac{\theta}{L} V^\alpha \right) &= \frac{2}{\theta} V^{-\alpha}, \\ \frac{2}{V} \left(\frac{2\pi n_1}{L} - q_1 - \frac{\theta}{L} V^\alpha \right) &= -\frac{2}{\theta} V^{-\alpha}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

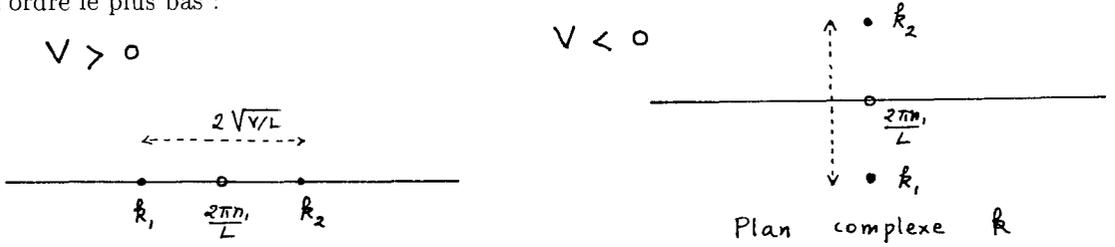
$$q_1^* = \frac{2\pi n_1}{L}; \tag{11.14}$$

ce qui détermine α et θ : et

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \theta = \sqrt{L}, \text{ d'où} \tag{11.15}$$

$$\theta_{11} \propto \sqrt{LV}, \quad \theta_{21} = -\sqrt{LV}.$$

Ceci nous donne la disposition des nombres d'ondes de la paire au voisinage de $V = 0$, à l'ordre le plus bas :



$$k_1 = q_1 + \sqrt{\frac{V}{L}} + O(V), \quad k_2 = q_1 - \sqrt{\frac{V}{L}} + O(V). \tag{11.16}$$

Nous vérifierons section 13 que ces résultats restent les mêmes lorsqu'il existe un nombre quelconque de paires (évidemment distinctes) entre elles.

Il reste maintenant à montrer qu'il existe une fonction d'onde limite en trouvant le coefficient convenable devant l'expression (7.14) du coefficient de la fonction d'onde. On voit aisément qu'il faut un facteur \sqrt{V} par paire devant l'expression du coefficient (7.14). Dans ces conditions, appelons k'_1, k''_1 la paire relative à q_1 , etc... il suffit d'étudier la limite de la fonction d'onde sur l'expression

$$c(\mathcal{F}) = \left(\sqrt{V}\right)^r \text{ perm } \left| \frac{1}{k_j - q_a} \right| \tag{11.17}$$

$$j \in \mathcal{F}, \quad 1 \leq a \leq \nu$$

obtenue en ayant déjà négligé toutes les quantités $O(V)$. On obtient alors :

- $\lim_{V \rightarrow 0} c(\mathcal{F}) = 0$, si l'ensemble \mathcal{F} contient deux indices relatifs à une même paire.
- $\lim_{V \rightarrow 0} c(\mathcal{F}) = \text{perm } \left| \frac{1}{k_j^* - q_a^*} \right|_{\bar{\nu}-r}$ si l'ensemble \mathcal{F} ne contient aucun indice $\tag{11.18}$

de paires.

Le permanent ci-dessus est formé sur les k^* et les q^* non associés, c'est-à-dire d'indices tels que

$$2r < j \leq N \quad \text{et} \quad r < a \leq \bar{\nu}.$$

Le tableau suivant des k et des q montre comment ils sont associés :

$$\left| \begin{array}{cc} k'_1 & k''_1 \\ q_1 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} k'_2 & k''_2 \\ q_2 & \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{cc} k'_r & k''_r \\ q_r & \end{array} \right| \begin{array}{c} k_{2r+1} \dots k_N \\ q_{r+1} \dots q_{\bar{\nu}} \end{array}$$

A la limite $V = 0$, on a :

$$\lim k'_i = \lim k''_i = \lim q_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Dans les coefficients de la fonction d'onde limite ne figurent donc pas les paires. Le dénombrement effectué au paragraphe 10.6 est donc justifié et l'on obtient exactement le nombre de solutions limites voulu ; autant qu'il existe de solutions du système d'équations (10.21), c'est-à-dire :

$$g_r = C_{\bar{\nu}-r}^{N-2r} - C_{\bar{\nu}-r-1}^{N-2r}.$$

11.3. PRINCIPE VARIATIONNEL ET ANALOGIE STATIQUE. — Le système d'équations (11.6) étant établi, nous montrons ici comment il résulte d'un principe variationnel. Considérons les N nombres k et les $\bar{\nu}$ nombres q comme des variables complexes indépendantes, les θ et les ψ étant fonctions de celles-ci par les équations des deux premières lignes de (11.6) avec les déterminations continues précédemment définies. Il est aisé de vérifier que les équations (11.5) sont équivalentes aux suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial q_a} = 0, \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu}, \tag{11.19}$$

où la fonction W des variables k et q est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} W = & - \sum_{j, a} \frac{V}{2} \log \left[(k_j - q_a)^2 + \frac{1}{4} V^2 \right] + (k_j - q_a) \theta_{ja} \\ & + \sum_{a < b} V \log \left[(q_a - q_b)^2 + V^2 \right] + (q_a - q_b) \psi_{ab}. \end{aligned} \tag{11.20}$$

Dans ces conditions les N équations restantes du système (11.6) s'écrivent :

$$Lk_j = 2\pi n_j - \frac{\partial W}{\partial k_j}, \quad 1 \leq j \leq N. \tag{11.21}$$

On en déduit que la quantité

$$Z = W + \frac{1}{2} L \sum_j \left(k_j - \frac{2\pi n_j}{L} \right)^2 \tag{11.22}$$

est stationnaire pour les variations des k et des q autour des solutions du système (11.6).

Nous pouvons interpréter la quantité Z comme le potentiel des forces d'un système de $N + \bar{\nu}$ points en statique à deux dimensions. Dans le plan complexe correspondant, considérons N points k , d'affixes k_1, \dots, k_N et $\bar{\nu}$ points q d'affixes $q_1, \dots, q_{\bar{\nu}}$.

D'une part, chaque point k_j est lié harmoniquement au centre fixe de l'axe réel de coordonnée $k_j^* = (2\pi n_j/L)$ (Il faut noter que le potentiel est complexe : si $k_j - k_j^*$ est réel, il y a attraction, si $k_j - k_j^*$ est imaginaire pur, il y a répulsion).

D'autre part, deux points q_a et q_b , sont soumis mutuellement à une force dépendant du potentiel

$$\tilde{W}(q_a - q_b) V$$

et deux points k_j et q_a sont soumis au potentiel mutuel

$$-\tilde{W} \left(k_j - q_a ; \frac{V}{2} \right),$$

avec la définition

$$\tilde{W}(x ; V) = V \log (x^2 + V^2) + 2x \operatorname{Arcotg} \frac{x}{V}, \tag{11.23}$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} = \frac{2}{V} \operatorname{Arccotg} \frac{x}{V},$$

les solutions du système (11.6) correspondent donc aux configurations d'équilibre stable ou instable des $N + \bar{\nu}$ points du plan soumis aux forces décrites ci-dessus. On peut noter que le potentiel $\tilde{W}(x ; V)$ à l'interprétation suivante en électrostatique à deux dimensions : c'est le potentiel complexe créé en un point d'affixe x par un segment uniformément chargé de charge totale $+2V$, dont les extrémités ont pour affixes $\pm iV$.

Si donc nous avons à faire à un système de fermions répulsif $V > 0$, les points q s'attirent entre eux et repoussent les points k . Dans le cas contraire $V < 0$, les points q se repoussent entre eux mais sont attirés par les points k , ces derniers étant toujours attirés ou repoussés harmoniquement par les centres fixes de l'axe réel. A la limite $V = 0$, la situation se simplifie : il faut prendre comme potentiel des forces la quantité Z/V et passer à la limite. Les points k_j coïncident alors avec les points fixes k_j^* et portent des charges $+\frac{1}{2}$: il s'agit de trouver les configurations d'équilibre des $\bar{\nu}$ points q^* de charge -1 : c'est l'analogie électrostatique du système d'équations limites (10.14) ou (11.8). Cette analogie a été utilisée par Stieljes [17] pour caractériser et dénombrer les solutions polynomiales d'équations de type (10.11) c'est-à-dire pour résoudre le problème de Heine [16] (voir appendice M) dans le cas particulier où toutes les charges sont de même signe, ce qui n'est pas notre cas.

D'après la discussion de la section 10, toutes les configurations d'équilibre de notre système de points ne sont pas admissibles : les charges q ne doivent pas se confondre et si deux charges k sont confondues en une paire de charge totale -1 l'un des q doit se confondre avec cette paire à la limite $V = 0$.

Si l'on oublie les conditions de périodicité, on peut se donner l'ensemble des k arbitrairement pourvu qu'ils soient tous réels de façon que la solution élémentaire construite sur cet ensemble soit bien une fonction d'onde. Il s'agit alors de chercher les configurations de potentiel stationnaire pour $\bar{\nu}$ charges $+1$ d'affixe q_a attirées par les N charges $-\frac{1}{2}$ d'abscisses k_j^* .

On obtient aisément une classe particulière de telles configurations en cherchant les points de potentiel maximum lorsque les q_a^* sont tous réels. Pour cela numérotions les k^* selon les abscisses croissantes $k_1^* < k_2^* < \dots < k_N^*$ et considérons les domaines D où un seul q^* est entre deux k^* voisins, et où deux q^* sont séparés au moins par deux k^* .

$$D : k_j^* < q_a^* < k_{j+1}^*, \quad k_\ell^* < q_b^* < k_{\ell+1}^*, \quad \dots \quad j+1 < \ell, \quad \dots \text{ etc.}$$

Montrons que dans le domaine D le potentiel admet un point stationnaire où il est maximum. Le potentiel est une fonction continue et réelle des variables q^* dans l'intérieur de D . Sur la frontière de D , des points q^* coïncident avec des points k^* mais sans que deux points q^* puissent se confondre sur le même k^* . Il s'ensuit que le potentiel vaut $-\infty$ sur la frontière D . Il atteint donc sa borne supérieure dans D où il est stationnaire puisque dérivable.

Nous n'avons pas réussi à utiliser ce principe variationnel pour démontrer que les nombres quantiques de l'état fondamental sont toujours ceux de l'état fondamental du système sans interaction.

12. Nature du gaz attractif

Dans le cas attractif, on s'attend à l'existence de paires de fermions liés au sein du gaz unidimensionnel, puisque le potentiel δ donne lieu à un état lié dans l'état singulet. S'il en est ainsi, la fonction d'onde décroît exponentiellement avec la distance des deux particules de la paire, pourvu que cette distance reste bien inférieure à la longueur de périodicité. Il existe alors des

solutions du système (10.1)-(10.2) telles que certains nombres k aient une partie imaginaire non nulle. Etant donné le caractère "réel" du système — évident sous la forme (11.6) — les k complexes interviennent par paires conjuguées. Nous nous plaçons dès le début à la limite du grand volume de façon à négliger les queues exponentielles de la fonction d'onde aux limites de ce volume.

12.1. LES ÉQUATIONS COUPLÉES À LA LIMITE DU GRAND VOLUME. — Supposons donc que, pour un certain indice j nous ayons une solution de (10.1) telle que :

$$\text{Im } k_j > 0$$

Alors le premier membre de l'équation (10.1) d'indice j est de l'ordre de $\exp\{-L \text{Im } k_j\}$, quantité extrêmement petite à la limite du grand volume, et il existe un indice a tel que

$$k_j = q_a - \frac{iV}{2} + O(\exp - L \text{Im } k_j). \tag{12.1}$$

Ceci nous permet d'écrire à l'approximation exponentielle

$$k_j = q_a - \frac{iV}{2} \quad \text{Im } q_a > \frac{V}{2} \tag{12.2}$$

De même, s'il existait un k_ℓ avec $\text{Im } k_\ell < 0$, on en déduirait un indice b tel que

$$k_\ell = q_b + \frac{iV}{2} \quad \text{Im } q_b < -\frac{V}{2}$$

Examinons alors l'équation (10.2) relative à l'indice a . Le numérateur du premier membre s'annule et sous réserve qu'aucune différence $q_c - q_a$ ne soit égale à iV , le dénominateur s'annule. Il existe donc un indice tel que

$$k_\ell = q_a - \frac{iV}{2}. \tag{12.3}$$

A un même q_a sont donc associés deux nombres k que nous noterons désormais par k_a et $k_{\bar{a}}$ (au lieu de k_j et k_ℓ) tels que

$$\begin{aligned} k_a &= q_a - \frac{iV}{2} \\ k_{\bar{a}} &= q_a + \frac{iV}{2} \end{aligned} \tag{12.4}$$

avec les inégalités

$$V < \text{Im } q_a < -V$$

et avec les restrictions déjà énoncées : toutes conditions qui sont remplies si les q sont tous réels, ce que nous supposons dans un but de simplicité en nous restreignant à la classe de telles solutions. S'il existe r "paires complexes" relatives aux nombres q_1, q_2, \dots, q_r , on obtient aisément la forme des $\bar{\nu} - r$ équations (10.2) pour les nombres q restant :

$$\prod_{j=2r+1}^N \frac{k_j - q_a + \frac{iV}{2}}{k_j - q_a - \frac{iV}{2}} = \prod_{b>r} \frac{q_b - q_a + iV}{q_b - q_a - iV} \tag{12.5}$$

où sont éliminées les quantités relatives aux paires complexes. En terme des angles θ et ψ , on obtient :

$$\sum_{j>2r} \theta_{ja} = \sum_{b>r} \psi_{ba}, \quad r < a \leq \bar{\nu}. \tag{12.6}$$

Nous allons maintenant étudier les équations restantes sous la forme (11.6). Des premières équations (11.6) et de (12.3) on déduit, pour $1 \leq a \leq r$

$$q_a - q_b - \frac{iV}{2} = \frac{V}{2} \cotg \frac{1}{2} \theta_{ab}$$

$$\bar{\theta}_{ab} = \theta_{\bar{a}b},$$

ou encore

$$e^{-i\theta_{ab}} = 1 - \frac{iV}{q_a - q_b}$$

d'où l'on obtient, d'après la définition des ψ :

$$\operatorname{Re} \theta_{ab} = \frac{1}{2} \psi_{ab} = \operatorname{Re} \theta_{\bar{a}b}, \quad b \neq a. \quad (12.7)$$

Pour $a = b$, $a \leq r$, on obtient simplement à l'approximation exponentielle

$$\operatorname{Im} \theta_{aa} = -\operatorname{Im} \theta_{\bar{a}a} = \text{ordre du volume}, \quad (12.8)$$

la partie réelle de θ_{aa} étant encore indéterminée.

Examinons ensuite les équations de périodicité. Pour $j > 2r$, elles demeurent inchangées. Par contre, elles nous donnent pour la paire relative à q_a :

$$n_a = n_{\bar{a}}$$

$$Lq_a = 2\pi n_a + \sum_b \operatorname{Re} \theta_{ab} \quad (12.9)$$

$$-L\frac{V}{2} = \sum_b \operatorname{Im} \theta_{ab} \quad (12.10)$$

les équations (12.10) précisent (12.8) de la façon suivante :

$$\operatorname{Im} \theta_{aa} \propto \frac{1}{2} L|V|, \quad \text{pour } L \text{ grand.}$$

Si nous rassemblons les équations utiles nous obtenons :

$$\frac{2}{V} (k_j - q_a) = \cotg \frac{1}{2} \theta_{ja}, \quad j > 2r \quad (12.11)$$

$$\frac{1}{V} (q_a - q_b) = \cotg \frac{1}{2} \psi_{ab} \quad (12.12)$$

$$\sum_{j>2r} \theta_{ja} = \sum_{b>r} \psi_{ba}, \quad r < a \leq \bar{v}$$

$$\sum_{j>2r} \theta_{ja} + 2 \operatorname{Re} \theta_{aa} = \sum_{b>r} \psi_{ba}, \quad 1 \leq a \leq r. \quad (12.13)$$

L'élimination des quantités $\text{Re } \theta_{ab}$, grâce aux relations (12.7), et $\text{Re } \theta_{aa}$, grâce à (12.13), nous donne enfin le système complet

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j>2r} \theta_{ja} = \sum_{b>r} \psi_{ba}, \quad r < a \leq \bar{\nu} \\ Lk_j = 2\pi n_j + \sum_b \theta_{jb}, \quad j > 2r \\ Lq_a = 2\pi n_a + \frac{1}{2} \sum_{b \leq r} \psi_{ab} - \frac{1}{2} \sum_{j>2r} \theta_{ja}, \quad a \leq r. \end{array} \right. \quad (12.14)$$

Nous avons $(N - 2r) + r + (\bar{\nu} - r)$ équations pour $N - 2r$ quantités k et $\bar{\nu}$ quantités q .

Lorsque le nombre de paires complexes est maximum, c'est-à-dire pour $r = \bar{\nu}$, la dernière équation (12.14) disparaît.

Dans le cas du spin 0, les angles θ ne figurent plus et l'on obtient :

$$\frac{1}{V} (q_a - q_b) = \cotg \frac{1}{2} \psi_{ab} \quad 1 \leq a, b \leq \bar{\nu}.$$

$$Lq_a = 2\pi n_a + \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{\bar{\nu}} \psi_{ab} \quad (12.15)$$

Les entiers n_a sont tous distincts.

L'impulsion totale s'écrit :

$$K = 2 \sum_a q_a = \frac{4\pi}{L} \sum_a n_a$$

et l'énergie :

$$E = \sum_a \left(q_a - \frac{iV}{2} \right)^2 + \left(q_a + \frac{iV}{2} \right)^2 = 2 \sum_a q_a^2 - N \frac{V^2}{4}. \quad (12.16)$$

12.2. LA FONCTION D'ONDE. — Il nous faudrait vérifier qu'il existe bien une fonction d'onde correspondant à chaque ensemble de k et de q , solution du système (12.13)-(12.14) relatif au cas infini attractif. Nous allons montrer l'existence de celle-ci pour le cas particulier du spin 0 et du nombre maximum de paires conjuguées. Pour cela nous construisons la fonction d'onde comme limite de la fonction d'onde générale dont les coefficients dans le secteur σ_0 sont donnés par l'expression (7.14).

Dans ce secteur nous avons les inégalités :

$$\sigma_0 : x_i < x_j, \quad 1 \leq j \leq \nu, \quad \nu < i \leq N \quad (12.17)$$

La fonction d'onde est la somme suivante :

$$\varphi = \sum_{[\mathcal{F}]} c(k_\alpha k_\beta \dots k_\delta) I(\alpha\beta \dots \delta \lambda \mu \dots \rho)$$

$$\times \exp \{ i(k_\alpha x_{\nu+1} + k_\beta x_{\nu+2} + \dots + k_\delta x_N) + i(k_\lambda x_1 + \dots + k_\rho x_\nu) \}. \quad (12.18)$$

$\mathcal{F} = \{\alpha\beta \dots \delta\}$ est un ensemble quelconque de $\bar{\nu}$ indices distincts ; les indices λ, \dots, ρ forment l'ensemble complémentaire de \mathcal{F} . I est le signe de la permutation des indices.

D'après notre hypothèse, nous avons $N = 2\nu$ et tous les k sont complexes. Pour que la fonction φ reste bornée lorsqu'une variable augmente indéfiniment en respectant les inégalités (12.17), il est nécessaire que l'on ait les conditions suivantes pour chaque ensemble d'indices :

- ou bien

$$c(k_\alpha k_\beta \dots k_\delta) = 0$$

- ou bien

$$c(k_\alpha k_\beta \dots k_\delta) \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im} k_\alpha < 0, \operatorname{Im} k_\beta < 0, \dots, \operatorname{Im} k_\lambda > 0, \operatorname{Im} k_\mu > 0, \dots \quad (12.19)$$

L'ensemble des k indexés par \mathcal{F} est donc identique à l'ensemble des k_a tels que :

$$k_a = q_a + \frac{iV}{2} \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu},$$

et l'ensemble complémentaire est identique à l'ensemble :

$$\bar{k}_a = q_a - \frac{iV}{2}$$

Aux permutations près des $\bar{\nu}$ indices, il ne doit donc exister qu'un seul coefficient non nul : $c(k_1 k_2 \dots k_{\bar{\nu}})$.

Dans le secteur σ_0 et à la limite du volume infini, la fonction d'onde doit donc se réduire au produit de deux déterminants : dans l'un ce sont les variables de la seconde colonne qui sont associés aux nombres d'onde $q_a + \frac{iV}{2}$ dans l'autre celles de la première colonne sont associées aux nombres d'onde $q_a - \frac{iV}{2}$; d'où la fonction d'onde dans σ_0 à la limite du volume infini :

$$\varphi|_{\sigma_0} = \det |\exp \{iq_a x_j\}|_{j \leq \nu} \det |\exp \{iq_a x_\ell\}|_{\ell > \nu} \times \exp \left\{ \frac{V}{2} \left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j - \sum_{\ell=\nu+1}^N x_\ell \right) \right\} \quad (12.20)$$

Il reste à montrer comment obtenir la fonction d'onde (12.10) à la limite $L = \infty$ à partir de l'expression (7.14) ou (7.12) pour le coefficient $c(\mathcal{F})$.

Il suffit de choisir une normalisation convenable pour passer à la limite du grand volume. Nous remarquons en effet que le coefficient $c(k_\alpha \dots k_\delta)$ donné par (7.14) augmente indéfiniment lorsque l'un des k tend vers une des quantités $q + \frac{iV}{2}$: c'est justement ce qui arrive dans le cas attractif d'après les égalités limites (12.1) et (12.4). On le voit aussi directement sur la forme (7.12) du coefficient. Nous redéfinissons les coefficients de la fonction d'onde en multipliant leur expression déterminantale (7.12) par un même facteur ; nous choisissons comme nouveaux coefficients les quantités

$$e(k_\alpha k_\beta \dots k_\delta) = c(k_\alpha \dots k_\delta) \exp -i(k_1 + \dots + k_{\bar{\nu}}) L, \quad (12.21)$$

avec

$$k_a = q_a + \frac{iV}{2} \quad \text{pour } 1 \leq a \leq \bar{\nu}$$

(à l'approximation exponentielle).

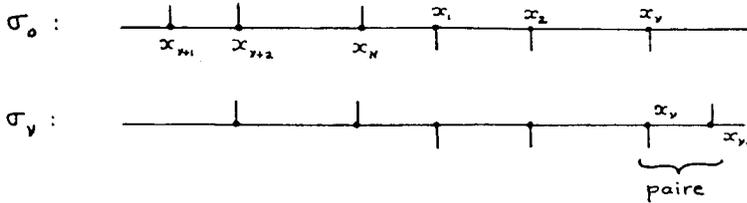
On voit tout de suite d'après (7.12) que le seul coefficient $e(k_\alpha \dots k_\delta)$ qui soit non nul est le suivant (aux permutations près des $\bar{\nu}$ nombre k_α)

$$e(k_1 k_2 \dots k_{\bar{\nu}}) = 1. \quad (12.22)$$

La fonction d'onde de spin 0 où les états d'impulsion sont tous occupés par paires a donc la forme (12.20). La limite $V = 0$ nous donne clairement la seule fonction de symétrie convenable

lorsque les états individuels de nombre d'onde $n_1, n_2, \dots, n_{\bar{\nu}}$ sont occupés par paires. En se basant sur le principe de continuité en fonction de V , on peut donc penser que la fonction d'onde de l'état fondamental dans le cas attractif est du type (12.20) pour la solution du système (12.15) qui minimise E .

Nous voudrions pouvoir interpréter cette classe d'états comme ceux d'un gaz de paires de fermions liés. Cependant nous ne connaissons la fonction d'onde de ces états que dans le seul secteur σ_0 , où il n'est pas possible d'envoyer une paire symétrique à l'infini. Il est curieux, à ce propos, de constater que la fonction d'onde nous soit explicitement donnée seulement dans le secteur représentant la configuration de particules la plus improbable de toutes, puisqu'elle correspond à la séparation complète des fermions de chaque espèce (ou des deux spins). Il est cependant possible de montrer l'existence des paires liées au sein du système en les "séparant" une à une de celui-ci. Il suffit pour cela de connaître la fonction d'onde dans les secteurs où une paire symétrique d'espace peut s'éloigner de toutes les autres : c'est-à-dire justement dans le type de secteur que nous avons appelé σ_{ν} .



Dans σ_{ν} une variable de la première colonne, par exemple $x_{\nu+1}$, et une variable quelconque de la seconde colonne peuvent augmenter indéfiniment. Or nous connaissons les coefficients de la fonction d'onde dans σ_{ν} d'après la formule (5.2) :

$$A_{\nu}\{P\} = A_0\{P\} e^{-ik_{P_a}L} \text{ avec ici, } a \equiv (\nu + 1).$$

Les coefficients $e_{\nu}(k_{\alpha} \dots k_{\delta})$ définis dans σ_{ν} sont donc donnés d'après (12.21) par

$$e_{\nu}(k_{\alpha} \dots k_{\delta}) = e^{-ik_{\alpha}L} e(k_{\alpha} \dots k_{\delta}). \tag{12.23}$$

On voit aisément d'après (7.12) que, à la limite L infini, les seuls coefficients non nuls dans σ_{ν} sont :

$$e_{\nu}(\bar{k}_1 k_2 \dots k_{\bar{\nu}}), e_{\nu}(k_1 \bar{k}_2 k_3 \dots k_{\bar{\nu}}), \text{ etc.}$$

(et ceux obtenus par permutations)

On trouve par exemple :

$$\begin{aligned} e_{\nu}(\bar{k}_1 k_2 \dots k_{\bar{\nu}}) &= \bar{Y}_{\bar{k}_1}(\mathcal{F}) = \prod_{a=2}^{\bar{\nu}} \left(1 + \frac{iV}{\bar{k}_1 - k_a} \right) \\ &= \prod_{a \neq 1} \frac{q_1 - q_a}{q_1 - q_a - iV} \end{aligned} \tag{12.24}$$

La fonction d'onde dans σ_{ν} admet donc le développement

$$\begin{aligned} \varphi|_{\sigma_{\nu}} &= \sum_1 e_{\nu}(\bar{k}_1 k_2 \dots k_{\bar{\nu}}) \times e^{i\bar{k}_1 x_{\nu+1}} |x_{\nu+2}, \dots, x_N|_{k_2 \dots k_{\bar{\nu}}} \\ &\times \sum_{\mu=1}^{\nu} e^{ik_1 x_{\mu}} |x_1, \dots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \dots, x_{\nu}|_{\bar{k}_2 \dots \bar{k}_{\bar{\nu}}} \end{aligned} \tag{12.25}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_1 \sum_{\mu=1}^{\nu} e_{\nu}(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_{\bar{\nu}}) \exp \left\{ i q_1 (x_{\mu} + x_{\nu+1}) + \frac{V}{2} (x_{\nu+1} - x_{\mu}) \right\} \\
&\times \varphi_{\bar{k}_2 \dots \bar{k}_{\bar{\nu}}}^{(N-2)}(x_1 x_2 \dots x_{\mu-1} x_{\mu+1} \dots x_{\nu} x_{\nu+2} \dots x_N).
\end{aligned}$$

Chaque terme de cette somme correspond à une paire de particules de coordonnées x_{μ} et $x_{\nu+1}$, associée à l'un des pseudo-moments q_1, \dots . Le terme relatif à q_1 est le produit de la fonction d'onde de l'état lié à deux particules de moment total $2q_1$, par la fonction d'onde totale à $(N-2)$ particules $\varphi^{(N-2)}$ définis par les moments $k_2, \bar{k}_2, \dots, k_{\nu}, \bar{k}_{\nu}$. Il est alors évident (12.25) d'après les propriétés asymptotiques de $\varphi^{(N-2)}$ dans le secteur σ_0 à $(N-2)$ particules, que si la paire $x_{\mu}, x_{\nu+1}$, s'éloigne indéfiniment avec l'impulsion $2q_1$, la fonction d'onde totale admet la factorisation asymptotique

$$e_{\nu}(\bar{k}_1 \dots) \varphi_{q_1}^{(2)}(x_{\mu} x_{\nu+1}) \varphi_{q_2 \dots q_{\bar{\nu}}}^{(N-2)}(x_1 \dots x_{\mu-1} x_{\mu+1} \dots x_N). \quad (12.26)$$

Nous appuyant sur le résultat précédent qui concerne simplement la séparation d'une seule paire, nous interpréterons cependant la classe d'états dont les fonctions d'onde sont du type (12.20) dans le secteur σ_0 , comme les états d'un système de fermions liés par paires, où le potentiel δ attractif à une dimension associée dans un état lié unique deux fermions d'espèce différente. Les nombres q qui déterminent fonction d'onde et niveaux d'énergie sont donnés par les équations (12.15), ce qui nous amène à la remarque suivante :

Les niveaux d'énergie du gaz de paires de fermions constituent une classe particulière de niveaux d'un gaz linéaire attractif de bosons.

En effet, les équations (12.15) et (12.16) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
2q_a - 2q_b &= 2V \cotg \frac{1}{2} \psi_{ab}, \\
2q_a L &= 2\pi \cdot 2n_a + \sum_b \psi_{ab}
\end{aligned} \quad (12.27)$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_a (2q_a)^2 - \bar{\nu} \frac{V^2}{2} \quad (12.28)$$

On reconnaît ci-dessus les équations pour les pseudo-impulsions $2q_a$ du système de bosons en interaction sur une droite, déjà considéré par Lieb et Liniger [8] dans le cas répulsif seulement ; le cas des bosons attractifs dans une boîte est en effet sans intérêt faute de propriétés extensives. Nous voyons cependant comment le système d'équations correspondant au cas attractif admet une interprétation nouvelle quand il détermine les niveaux du système de fermions liés par paires. Nous étudierons un tel système dans la section 14 dans le cas du spin total 0, cas où les équations (12.15) sont plus simples que les équations (12.13) et (12.14) relatives à une valeur quelconque du spin. De ce fait, il s'agira de l'état fondamental du système attractif.

13. Voisinage de $V = 0$ à volume fini

Nous nous proposons de calculer à partir des équations couplées le développement limité au second ordre dans la constante de couplage de l'énergie d'un état de nombre quantiques $\{n\}$ $\{q\}$, afin d'en comparer les termes à ceux que fournit la méthode de perturbation usuelle. Le calcul a été fait dans les seuls cas particuliers extrêmes où

- 1) les entiers n sont tous appariés
- 2) les entiers n sont tous distincts.

Les cas intermédiaires participent des deux cas extrêmes et conduisent à des complications sans intérêt.

13.1. LES ENTIERS n SONT TOUS APPARIÉS. — Il s'agit donc d'un état de spin 0 avec $N = 2\nu$. Il est naturel de simplifier l'écriture en associant k_a, k'_a au même indice a qui est celui du nombre quantique limite n_a de la paire. Le système (11.6) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{2}{V}(k_b - q_a) &= \cotg \frac{1}{2}\theta_{ba}, \\ \frac{2}{V}(k'_b - q_a) &= \cotg \frac{1}{2}\theta'_{ba} \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\frac{1}{V}(q_b - q_a) = \cotg \frac{1}{2}\psi_{ba} \quad (13.2)$$

$$\sum_b \theta_{ba} + \theta'_{ba} = \sum_b \psi_{ba} \quad (13.3)$$

$$Lk_b = 2\pi n_b + \sum_a \theta_{ba} \quad (13.4)$$

$$Lk'_b = 2\pi n_b + \sum_a \theta'_{ba}.$$

Il est commode de considérer les quantités

$$\begin{aligned} k_a^+ &= \frac{1}{2}(k_a + k'_a), \\ k_a^- &= \frac{1}{2}(k_a - k'_a), \text{ etc.} \end{aligned} \quad (13.5)$$

On vérifie alors que les diverses quantités admettent les développements limités suivants où le paramètre de développement est en réalité LV :

$$\left\{ \begin{aligned} k_b^+ &= \frac{2\pi}{L}n_b + \frac{V}{2\pi} \sum'_c \frac{1}{n_b - n_c} + O(V^3) \\ q_b &= \frac{2\pi}{L}n_b + \frac{V}{2\pi} \sum'_c \frac{1}{n_b - n_c} - \frac{LV^2}{(2\pi)^3} \sum'_c \frac{1}{(n_b - n_c)^3} + O(V^3) \\ k_b^- &= \left(\frac{V}{L}\right)^{1/2} - \frac{L^{1/2}V^{3/2}}{8\pi^2} \left(\sum'_c \frac{1}{(n_b - n_c)^2} + \frac{\pi^2}{3} \right) + O(V^{5/2}) \end{aligned} \right. \quad (13.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{aa}^- &= (LV)^{1/2} + \frac{(LV)^{3/2}}{8\pi^2} \left(\sum'_c \frac{1}{(n_c - n_a)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right) + O(V^{5/2}) \\ \theta_{ba}^- &= -\frac{(LV)^{3/2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{(n_b - n_a)^2} + O(V^{5/2}) \quad b \neq a \end{aligned} \right. \quad (13.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{aa}^+ &= -\frac{(LV)^2}{(2\pi)^3} \sum'_c \frac{1}{(n_c - n_a)^3} + O(V^3) \\ \theta_{ba}^+ &= \frac{LV}{2\pi} \frac{1}{n_b - n_a} \\ &+ \frac{(LV)^2}{(2\pi)^3} \left[\sum'_c \frac{1}{(n_b - n_a)(n_b - n_c)(n_a - n_c)} - \frac{1}{(n_b - n_a)^3} \right] + O(V^3) \end{aligned} \right. \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_{ba} &= \frac{LV}{\pi} \frac{1}{n_b - n_a} \\ &- 2 \frac{(LV)^2}{(2\pi)^3} \left[\sum'_c \frac{1}{(n_b - n_a)(n_b - n_c)(n_a - n_c)} - \frac{2}{(n_b - n_a)^3} \right] + O(V^3) \end{aligned} \quad (13.9)$$

On en déduit le développement de l'énergie par particule à volume fini au troisième ordre près pour la classe des états totalement appariés :

$$\frac{E}{N} = \frac{E_0}{N} + \frac{1}{2} \rho V - \frac{1}{12} V^2 + O(V^3) \quad (13.10)$$

avec

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{b=1}^{\nu} \left(\frac{2\pi n_b}{L} \right)^2, \\ \rho &= \frac{N}{L}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

On notera qu'au troisième ordre près le déplacement en énergie par rapport à l'état non perturbé est indépendant des nombres quantiques de celui-ci. Le développement (13.10) coïncide avec le développement perturbatif de l'énergie du fondamental de spin 0 tout au moins à la limite du volume infini.

En effet la correction du second ordre est donnée par la formule classique :

$$E^{(2)} = -\frac{4V^2}{L^2} \sum \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2}, \quad (13.12)$$

où la somme sur les nombres d'ondes $p = \frac{2\pi n}{L}$ est restreinte au domaine :

$$|p_1| > p_0 \quad |p_2| > p_0, \quad |p_3| < p_0, \quad |p_4| < p_0,$$

où l'on a défini le moment de Fermi p_0 par $\rho = \frac{2p_0}{\pi}$.

A la limite $L \rightarrow \infty$, la somme (13.12) devient une intégrale qui a la valeur $-\frac{1}{12}V^2$. En fait la somme (13.12) devrait avoir cette valeur quelque soit L . Nous l'avons vérifié après un calcul pénible de la série multiple (13.12) dans le cas particulier $p_0 = \frac{3\pi}{L}$ puis nous avons trouvé enfin une preuve générale.

13.2. LES ENTIERS n SONT TOUS DISTINCTS. — Développons les quantités k , q , θ et ψ relatives à un état de nombre quantiques $\{n\}$, $\{q^*\}$.

D'après l'étude effectuée section 11 nous pouvons écrire :

$$\theta_{ja} = \frac{V}{k_j^* - q_a^*} + V^2 \Theta_{ja} + O(V^3) \quad (13.13)$$

$$\psi_{ba} = \frac{2V}{q_b^* - q_a^*} + V^2 \Psi_{ba} + O(V^3) \quad (13.14)$$

$$k_j = k_j^* + V\chi_j + \frac{V^2}{L} \sum_a \Theta_{ja} + O(V^3) \quad (13.15)$$

$$q_a = q_a^* + V\mu_a + O(V^2). \quad (13.16)$$

Les coefficients inconnus Θ, Ψ, χ, μ sont déterminés par les relations (11.6) ; on obtient ainsi, outre les relations connues entre k^* et q^* :

$$\chi_j = \frac{1}{L} \sum_a \frac{1}{k_j^* - q_a^*} \tag{13.17}$$

$$\Theta_{ja} = \frac{\mu_a - X_j}{(k_j^* - q_a^*)^2} \tag{13.18}$$

$$\Psi_{ba} = -2 \frac{\mu_b - \mu_a}{(q_b^* - q_a^*)^2} \tag{13.19}$$

Enfin, le système homogène pour les coefficients μ déduit de la relation (11.5) :

$$\sum_j \frac{\chi_j - \mu_a}{(k_j^* - q_a^*)^2} = 2 \sum_b \frac{\mu_b - \mu_a}{(q_b^* - q_a^*)^2} \tag{13.20}$$

Pour résoudre ce système nous le rapprochons du système de définition des nombres q^* :

$$\sum_j \frac{1}{k_j^* - q_a^*} = 2 \sum_b \frac{1}{q_b^* - q_a^*}. \tag{13.21}$$

Nous y substituons aux k_j^* des variables λ_j dépendant d'un paramètre t , avec $\lambda_j(t = 0) = k_j^*$. Ce système en λ et q^* nous définit $\bar{\nu}$ fonctions $q_a^*(\lambda)$ des

variables λ . Dérivons les deux membres de (13.21) par rapport à t , pour $t = 0$. Nous obtenons :

$$\sum_j \frac{\frac{d\lambda_j}{dt}(0) - \frac{dq_a}{dt}(0)}{(k_j^* - q_a^*)^2} = 2 \sum_b \frac{\frac{dq_b}{dt} - \frac{dq_a^*}{dt}(0)}{(q_b^* - q_a^*)^2} \tag{13.22}$$

Si donc nous considérons le système différentiel compatible suivant :

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{1}{L} \sum_a \frac{1}{\lambda_j - q_a^*(\lambda)} \tag{13.23}$$

avec les conditions initiales

$$\frac{d\lambda_j}{dt}(0) = \chi_j, \tag{13.24}$$

Nous aurons en comparant (13.22) à (13.20)

$$\frac{dq_a^*}{dt}(0) = \mu_a, \tag{13.25}$$

puisque la solution du problème de Cauchy (13.23) (13.24) est unique, si l'on choisit naturellement la branche convenable de chaque fonction $q_a^*(\lambda)$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} q_a^*(\lambda) = q_a^*$.

Nous obtenons alors pour l'énergie le développement suivant :

$$E = \sum_j k_j^{*2} + 2V \sum_j k_j^* \chi_j + V^2 \left\{ \frac{2}{L} \sum_{ja} \lambda_j \Theta_{ja} + \sum_j \chi_j^2 \right\} + O(V^3) \tag{13.26}$$

ou encore

$$E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)} + O(V^3), \tag{13.27}$$

avec

$$E^{(0)} = \sum_j \left(\frac{2\pi n_j}{L} \right)^2,$$

$$E^{(1)} = \frac{2V}{L} \sum_{ja} \frac{k_j^*}{k_j^* - q_a^*} = \frac{2V}{L} \bar{\nu}(\nu + 1),$$

où l'on a utilisé les relations (10.14) ou (11.8).

On peut encore écrire $E^{(1)}$ sous la forme

$$E^{(1)} = \frac{V}{2L} [N(N + 2) - 4S(S + 1)] \quad (13.28)$$

L'expression pour $E^{(2)}$ s'écrit :

$$E^{(2)} = V^2 \left\{ 2 \sum_{ja} \lambda_j \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\lambda_j - q_a^*} \right)_{t=0} + \sum_j \chi_j^2 \right\},$$

c'est-à-dire, compte tenu des relations (13.23) et (13.24),

$$E^{(2)} = -V^2 \sum_j \chi_j^2. \quad (13.29)$$

On notera que l'expression (13.28) de $E^{(1)}$ découle d'un résultat classique [22] pour l'énergie au premier ordre d'un système de fermions de spin 1/2 dont l'interaction est indépendante du spin. Dans notre cas, on a

$$E^{(1)} = \frac{\text{Intensité de l'interaction}}{\text{nombre de paires}} \times \frac{\text{nombre de paires}}{\text{symétries d'espace}}.$$

En l'absence de "paires" au sens défini dans cette étude, on retrouve le résultat (13.28). S'il existe r "paires", on obtient un terme supplémentaire $-\frac{2rV}{L}$ on retrouve ainsi le terme du premier ordre de la formule (13.10) dans le cas $S = 0$ et $r = \frac{1}{2}N$.

Quant à la correction du second ordre, on peut l'interpréter en reprenant l'analogie électrostatique de la section 11. La quantité χ_j définie par l'expression (13.17) est proportionnelle au champ électrique créé par les charges q^* au point k_j^* ; et $E^{(2)}$ représente la valeur quadratique moyenne des forces électriques agissant sur les centres fixes k_j^* ;

14. Énergie de l'état fondamental de spin donné : cas attractif

14.1. LES NOMBRES QUANTIQUES. — Quels sont les nombres quantiques $\{n\}$ et $\{q\}$ du niveau d'énergie le plus bas ayant un spin et une impulsion totale donnée ? Quel est le spin et l'énergie de l'état fondamental ?

Pour répondre à ces questions, il faudrait savoir utiliser l'analogie statique décrite section 11, c'est-à-dire déterminer la configuration d'équilibre du système des points k et q pour laquelle la somme

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2$$

serait minimum, considérée comme fonction des divers nombres quantiques. Mais cette analogie statique est complexe et semble difficile à utiliser. La complexité vient de l'existence des forces à deux corps répulsives et attractives auxquelles sont soumis les points k et q ; elle vient aussi du fait que ces forces sont discontinues (comme les forces entre une charge et un feuillet chargé à la traversée de celui-ci).

Nous ferons l'hypothèse que l'état de base, de spin S donné, est à chercher parmi les états d'appariement maximal, c'est-à-dire les états où existent le nombre maximum de "paires" compatible avec la valeur S . D'après les conclusions de la section 11 et leur application au cas attractif (paragraphe 12.1) le nombre r de paires est alors exactement égal à $\bar{\nu}$. Cette hypothèse est évidemment vérifiée pour le système de fermions sans interaction où l'on réalise l'état d'énergie minimum en remplissant les états individuels par paires de singulets jusqu'au niveau de Fermi.

Moyennant cette hypothèse notre analogie statique se simplifie légèrement et conduit à un système de points en interaction purement attractive. En effet les équations couplées du système apparié sont les équations (12.14) avec $r = \bar{\nu}$. Elles dérivent du principe variationnel suivant :

$$\delta Z = 0$$

avec

$$Z = \sum_{a=1}^{\bar{\nu}} L \left(q_a - \frac{2\pi n_a}{L} \right)^2 + \sum_{j>2\bar{\nu}} \frac{1}{2} L \left(k_j - \frac{2\pi n_j}{L} \right)^2 - \sum_{a<b} \tilde{W} (q_a - q_b, V) - \sum_{a, j>2\bar{\nu}} \tilde{W} \left(k_j - q_a, \frac{V}{2} \right) \tag{14.1}$$

L'énergie est donnée par la somme :

$$E = \sum_{j>2\bar{\nu}} k_j^2 + 2 \sum_a q_a^2 - \bar{\nu} \frac{V^2}{2}. \tag{14.2}$$

Cependant, il faut achever de définir l'expression du potentiel des forces (14.1) en précisant la détermination des angles qui figurent dans les fonctions W . Pour le potentiel entre points q , nous avons

$$\tilde{W} (q_a - q_b, V) = V \log \left[(q_a - q_b)^2 + V^2 \right] + (q_a - q_b) \psi_{ab} \tag{14.3}$$

avec

$$-\pi < \psi_{ab} < \pi, \text{ signe } \psi_{ab} = - \text{signe } (q_a - q_b),$$

d'après l'hypothèse de non-croisement des points q .

Quant au potentiel entre k_j et q_a , il est défini de façon analogue à (14.3) en fonction de la détermination continue de l'angle θ_{ja} , qui doit garder toujours le même signe lorsque V varie sur $[-\infty, 0]$ d'après le paragraphe (11.1). Il suffit pour connaître celui-ci d'étudier le voisinage de $V = 0$. Nous aurons donc

$$\text{signe } \theta_{ja} = -\text{signe } (n_j - n_a)$$

c'est-à-dire

$$\theta_{ja} = 2 \text{Arctg} \frac{2(k_j - q_a)}{|V|} - \pi \in (n_j - n_a)$$

Les équations couplées (12.14) s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
 Lk_j &= \pi \left\{ 2n_j - \sum_b \in (n_j - n_b) \right\} + 2 \sum_b \operatorname{Arctg} 2 \frac{k_j - q_b}{|V|} \\
 Lq_a &= \pi \left\{ 2n_a + \frac{1}{2} \sum_j \in (n_j - n_a) \right\} + \frac{1}{2} \sum_b \psi_{ab} - \sum_j \operatorname{Arctg} \frac{2(k_j - q_a)}{|V|}
 \end{aligned}
 \tag{14.4}$$

Ces équations dérivent alors d'un principe d'extrémum analogue à (14.1) où, cette fois-ci, les forces entre les points k, q , et les centres fixes – dont les coordonnées sont entre parenthèses dans l'expression (14.4) – sont toutes attractives. Nous pensons alors intuitivement que la somme (14.2) sera la plus petite possible pour la configuration la plus "serrée" de centres fixes.

Prenons pour simplifier l'état de base de moment total $K = 0$ ce qui implique :

$$\begin{aligned}
 N &\equiv 2 \pmod{4} && \text{si } S \text{ est pair} \\
 N &\equiv 0 \pmod{4} && \text{si } S \text{ est impair,}
 \end{aligned}$$

Nous poserons

$$\bar{\nu} = 2p + 1, \nu = 2t + 1, N = 2(p + t + 1), S = t - p.
 \tag{14.5}$$

Nous avons alors le remplissage suivant pour le système sans interaction :

– Etats occupés par paires :

$$n_a = a, \quad -p \leq a \leq +p.$$

– Etats non appariés

$$n_j = j, \quad p < |j| \leq t.
 \tag{14.6}$$

Les nombres quantiques n suffisent à définir complètement les états d'appariement maximal d'après les résultats des paragraphes 10.6 et 11.



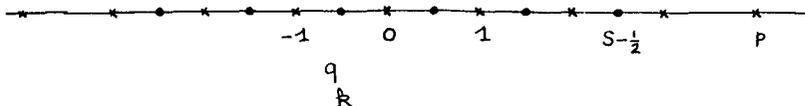
Remplissage de la mer de Fermi :

- × Etats appariés en nombre égal à $\bar{\nu} = 2p + 1$
- Etats non appariés en nombre égal à $2S$.

Ce remplissage donne lieu à la configuration suivante des centres fixes que nous pensons être la plus serrée possible, d'après les équations (14.4) qui s'écrivent en ce cas d'après le choix (14.6) :

$$\begin{aligned}
 Lk_j &= \pi(2j - 2p - 1) + \dots && j > p \\
 Lk_j &= \pi(2j + 2p + 1) + \dots && j < -p \\
 Lq_a &= 2\pi a + \dots, && |a| \leq p
 \end{aligned}
 \tag{14.7}$$

d'où la configuration des centres attracteurs fixes de l'analogie statique :



× centre attracteur de q

- centre attracteur de k

Après un léger changement de notation d'indice, on peut écrire le système pour les k et q de l'état qui correspond continûment à l'état fondamental non perturbé de spin S et d'impulsion $K = 0$:

$$\begin{cases} Lk_\lambda &= 2\pi\lambda + 2 \sum_{-p < b < p} \text{Arctg} \frac{2}{|V|} (k_\lambda - q_b) \\ Lq_a &= 2\pi a + \frac{1}{2} \sum_b \psi_{ab} - \sum_\lambda \text{Arctg} \frac{2}{|V|} (k_\lambda - q_a) \end{cases} \quad (14.8)$$

où a prend les valeurs entières de $-p$ à $+p$, et λ les valeurs demi-entières entre $-\left(S - \frac{1}{2}\right)$ et $S - \frac{1}{2}$.

Lorsque V devient très grand on notera les équivalences :

$$\begin{aligned} k_\lambda &\propto \frac{2\pi\lambda}{L} & q_a &\propto \frac{\pi a}{L} \\ E &\propto \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left\{ \sum_1^p a^2 + 2 \sum_{\lambda=\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}} \lambda^2 \right\} - \bar{v} \frac{V^2}{2} \end{aligned} \quad (14.9)$$

A la limite d'une très forte attraction, l'énergie de liaison des "paires" est prépondérante et favorise le spin 0 pour l'état de base. Il n'est pas évident sur le système d'équations (14.8) que ce soit le cas quelque soit V .

14.2. LA LIMITE "THERMODYNAMIQUE". — Nous nous intéressons aux propriétés limites — dites thermodynamiques — de notre système de fermions attractifs lorsque le volume L augmentant indéfiniment avec le nombre de particules, la densité reste constante et le spin total garde une valeur macroscopique donnée.

- $\lim \frac{N}{L} = \rho = \frac{2k_0}{\pi}$
 - $\lim \frac{2S}{N} = \sigma = \text{magnétisation}$.
- (14.10)

Les équations (14.8) prennent une forme limite aisée à obtenir en supposant que les points k_λ et q_a se densifient sur des segments $[-k_1, +k_1]$ et $[-q_0, +q_0]$ avec

$$k_1 = \lim_{L \rightarrow \infty} k_{S-\frac{1}{2}}, \quad q_0 = \lim_{L \rightarrow \infty} q_p. \quad (14.11)$$

avec les densités respectives :

$$\frac{1}{2\pi} f_1(k) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} f(q). \quad (14.12)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \rho(1 - \sigma) &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} f(q) \, dq \\ 2\rho\sigma &= \frac{1}{\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} f_1(k) \, dk. \end{aligned} \quad (14.13)$$

et l'énergie par particule :

$$\frac{E}{N} = \varepsilon - \frac{V^2}{4}(1 - \sigma) \quad (14.14)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \int_{-k_1}^{+k_1} k^2 f_1(k) dk + 2 \int_{-q_0}^{+q_0} q^2 f(q) dq \right\}. \quad (14.15)$$

Les équations (14.8) nous donnent à la limite le système intégral :

$$1 = f_1(k) + \frac{|V|}{2\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{f(q') dq'}{(k - q')^2 + \frac{V^2}{4}}, \quad -k_1 < k < k_1 \quad (14.16)$$

$$1 = \frac{1}{2}f(q) + \frac{|V|}{2\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{f(q') dq'}{(q - q') + V^2} + \frac{|V|}{4\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} \frac{f_1(k) dk}{(k - q)^2 + \frac{V^2}{4}}, \quad -q_0 < q < q_0. \quad (14.17)$$

L'élimination de la fonction f_1 entre (14.16) et (14.17) conduit à l'équation de Fredholm inhomogène pour f :

$$f(q) + \int_{-q_0}^{+q_0} K(q, q')f(q') dq' = 2 - \frac{|V|}{2\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} \frac{dk}{(k - q)^2 + \frac{V^2}{4}} \quad (14.18)$$

avec le noyau :

$$K(q, q') = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^2 \int_{|k|>k_1} \frac{dk}{[(k - q)^2 + \frac{V^2}{4}] [(k - q')^2 + \frac{V^2}{4}]}. \quad (14.19)$$

Si l'on considère k_1, q_0 , comme des paramètres, la solution unique de (14.18) détermine la fonction f .

La densité et le spin sont alors donnés paramétriquement par les relations

$$\sigma\rho = \frac{1}{\pi}k_1 - \frac{1}{\pi^2} \int_{-q_0}^{+q_0} f(q) \operatorname{Arctg} \frac{2}{|V|} (k_1 - q) dq, \quad (14.20)$$

$$\rho(1 - \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} f(q) dq, \quad (14.21)$$

et l'énergie par les formules (14.14) et (14.15).

La forme du noyau K ne laisse espérer qu'une solution numérique pour l'équation (14.18). Le calcul a été entrepris et nous donne un réseau de courbes représentant l'énergie par particule E en fonction de la magnétisation σ pour diverses valeurs de la densité ρ . A la précision du calcul, il apparaît que la fonction $E(\sigma)$ est croissante et que l'état fondamental du gaz attractif a probablement toujours le spin 0. C'est ce que montre la figure 1.

15. Energie de l'état fondamental (spin 0) : cas attractif

15.1. L'ÉQUATION INTÉGRALE DU SYSTÈME INFINI. — Nous n'avons pas démontré que l'état fondamental du système de fermions attractifs avait le spin total 0. Cependant, ce fait est presque sûr pour deux raisons :

D'une part, le calcul numérique effectué pour la classe d'états étudiée dans la section 14 montre un minimum de l'énergie E en fonction de la magnétisation. D'autre part, si les propriétés extensives d'un système linéaire sont indépendantes de la nature particulière des conditions aux limites, le théorème [10] de Mattis et Lieb s'étend au système étudié, et l'on peut conclure que l'état fondamental n'est pas magnétisé.

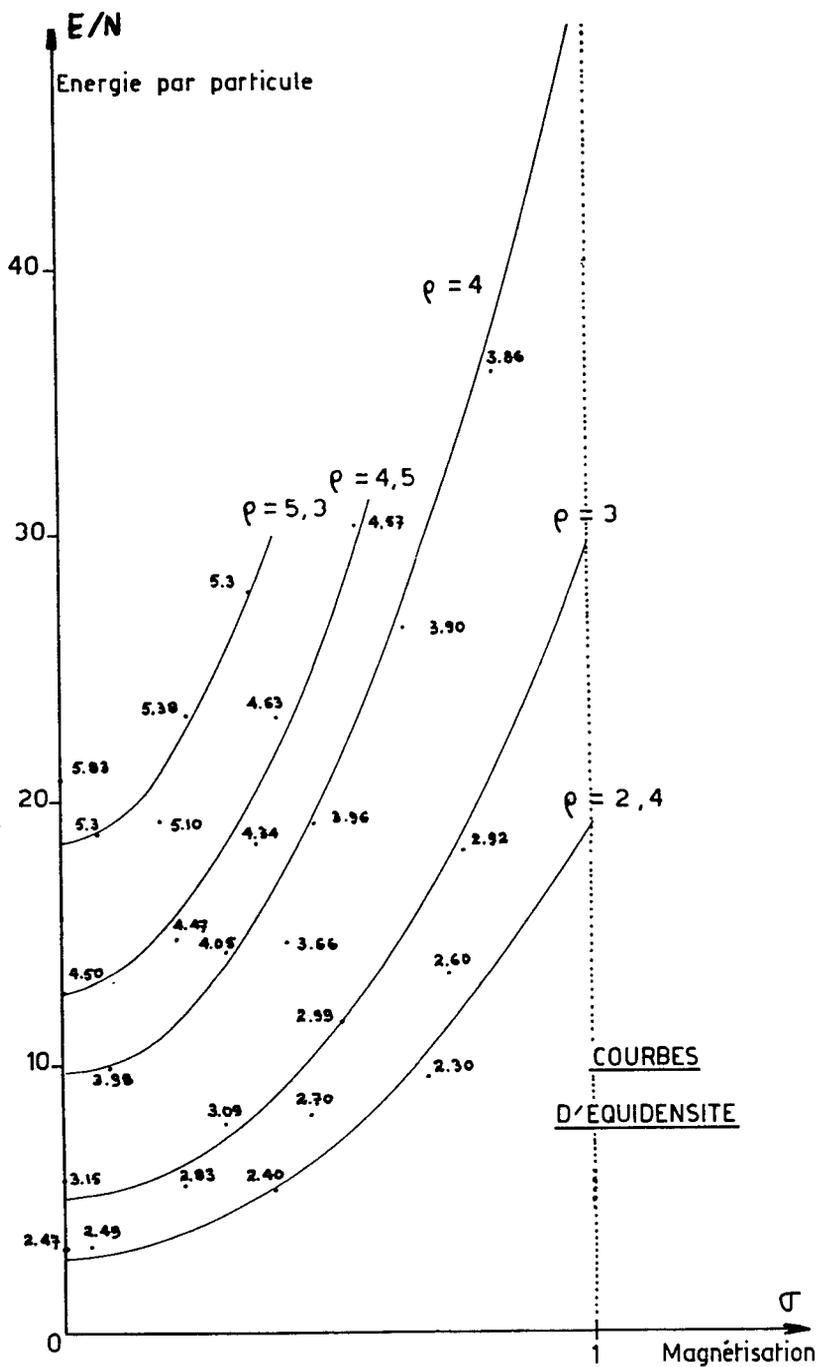


Fig. 1. — Courbes d'équidensité.

Nous ferons là encore l'hypothèse d'appariement maximum :

$$r = \bar{\nu} = \frac{1}{2}N \Rightarrow S = 0.$$

Les nombres quantiques $\{n\}$, au nombre d'onde limites des paires, étant donnés, les équations couplées (12.15) s'écrivent simplement :

$$\frac{\partial W}{\partial q_a} = 0, \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu} = \nu \quad (15.1)$$

avec la définition de W :

$$W = \frac{1}{2}L \sum_a \left(q_a - \frac{2\pi n_a}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{a < b} W(q_a - q_b, V) \quad (15.2)$$

Cette fonction des ν variables q peut être considérée comme la fonction potentielle d'un système de points d'abscisses q_a , supposés glisser sur l'axe réel, attirés chacun harmoniquement par un centre fixe de coordonnée $q_a^* = \frac{2\pi n_a}{L}$, et s'attirant aussi deux à deux. Pour montrer l'existence d'une solution au système d'équations (15.1) ou (12.15), il suffirait de prouver que W atteint son minimum absolu à l'intérieur du domaine

$$q_1 < q_2 < \dots < q_\nu, \quad (15.3)$$

en supposant le classement suivant des entiers distincts

$$n_1 < n_2 < \dots < n_\nu.$$

On verrait aisément que le minimum absolu de W n'est pas atteint sur les arêtes d'ordre 1 du domaine (15.3), par exemple pour

$$q_1 < q_2 = q_3 < q_4 < \dots;$$

mais cela semble plus difficile à prouver pour les arêtes d'ordre supérieur.

Il s'agirait ensuite de trouver l'ensemble $\{n\}$ qui rende le plus petit possible la somme

$$\sum_1^\nu q_a^2.$$

Guidé par l'analogie statique, il semble qu'il faille choisir le système d'entiers $\{n\}$ le plus "serré" possible. Si nous nous restreignons à la valeur $K = 0$ du moment total, il existe un entier p tel que

$$N = 4p + 2, \quad \nu = \bar{\nu} = 2p + 1, \quad (15.4)$$

et par conséquent le choix suivant des entiers n s'en déduit (après une translation sur l'indice).

$$n_a = a, \quad -p \leq a \leq p. \quad (15.5)$$

Ce choix intuitif correspond au remplissage normal du fondamental non perturbé. L'énergie par particules est donnée par l'expression

$$\frac{E}{N} = \varepsilon - \frac{V^2}{4}, \quad (15.6)$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{1}{\nu} \sum_a q_a^2. \tag{15.7}$$

Comme au paragraphe (13.2), nous cherchons à calculer ε à la limite “thermodynamique” :

$$N \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{L} = \rho. \tag{15.8}$$

Si les points q se densifient sur un segment $[-q_0, +q_0]$ avec la densité $\frac{L}{2\pi} f(q)$, nous obtenons la limite des équations (12.15) :

$$\cotg \frac{1}{2} \psi(q - q') = \frac{1}{V}(q - q'), \tag{15.9}$$

$$1 = f(q) + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dq} \int_{-q_0}^{+q_0} \psi(q - q') f(q') dq' \tag{15.10}$$

Le nombre q_0 peut être appelé un pseudo-moment de Fermi.

La fonction paire positive $f(q)$ est déterminée par l'équation intégrale inhomogène

$$f(q) - \frac{V}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{f(q') dq'}{(q - q')^2 + V^2} = 2 \tag{15.11}$$

d'où l'on déduit, en fonction du paramètre q_0 , la densité ρ et l'énergie :

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} f(q) dq \tag{15.12}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi\rho} \int_{-q_0}^{+q_0} q^2 f(q) dq. \tag{15.13}$$

De fait, le seul paramètre qui intervienne dans l'équation (15.11) est le rapport

$$-\frac{V}{q_0} = \kappa > 0 \tag{15.14}$$

et d'après le changement de fonction

$$f(q) = F\left(\frac{q}{q_0}\right), \tag{15.15}$$

nous obtenons le système :

$$F(x) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{F(y) dy}{(x - y)^2 + \kappa^2} = 2, \quad -1 < x < 1 \tag{15.16}$$

$$k_0 = q_0 \int_0^1 F(x) dx, \tag{15.17}$$

$$\varepsilon = \frac{q_0^3}{k_0} \int_0^1 x^2 F(x) dx. \tag{15.18}$$

L'élimination de q_0 entre les équations (15.17) et (15.18) nous donne l'énergie en fonction du vrai moment de Fermi et de la constante de couplage V .

Pour des raisons de dimension, il existe une fonction \mathcal{E} telle que l'on ait

$$\varepsilon = V^2 \mathcal{E} \left(\frac{k_0}{|V|} \right) \quad (15.19)$$

et qui résulte de l'élimination de κ entre (15.17) et (15.18), pour $|V| = 1$ ou $q_0 = \frac{1}{\kappa}$.

Avant d'étudier la solution de ce système, une remarque s'impose.

L'équation linéaire inhomogène (15.11) diffère de celle qu'ont obtenue Lieb et Liniger pour le gaz de bosons [8], uniquement par le signe de la constante de couplage. Sous la forme (15.16). Nous avons un signe + devant la quantité κ et les auteurs cités ont un signe -. Il s'agissait pour ceux-ci de calculer l'énergie du fondamental du gaz linéaire de bosons répulsifs. Il s'agit ici d'un gaz de fermions attractifs. Notre système présenterait-il quelque analogie avec un système de bosons attractifs ? Il suffit de considérer les formules (12.27) pour répondre et énoncer qu'il y a identité entre la distribution des pseudo-impulsions des paires de fermions attractifs dans l'état fondamental et la distribution des pseudo-impulsions des bosons attractifs dans un état excité bien défini. Cet état d'excitation du gaz de bosons attractif est nécessaire pour empêcher l'agglutination du gaz de Bose qui ne possède pas de propriétés extensives dans le fondamental. Tout se passe comme si chaque paire liée de fermions dans un état singulet correspondait à un boson du point de vue de la dynamique. Mais du point de vue de la statistique, ces bosons se souviennent qu'ils sont formés de deux fermions pour ce qui est de l'occupation des états individuels (cette expression prenant son sens du fait de la correspondance continue avec les états d'un système libre).

Il existe peut-être une analogie entre les fonctions d'onde de deux systèmes mais nous l'ignorons, car nous ne connaissons notre fonction d'onde que dans un seul secteur, alors qu'il serait utile pour la comparaison de reconnaître les paires pour toutes les imbrications possibles de celles-ci entre elles.

15.2. RECHERCHE D'UN DÉVELOPPEMENT DE HAUTE DENSITÉ. — Il s'agit maintenant d'étudier la solution de l'équation intégrale (15.16) afin d'obtenir la fonction \mathcal{E} définie en (15.19). Or cette équation a déjà une histoire et possède une position centrale dans un problème classique d'électrostatique à trois dimensions [18]. Ce problème est celui des deux disques conducteurs circulaires de rayon 1, coaxiaux et séparés par une distance $|\kappa|$. Si κ est négatif, il s'agit du condensateur proprement dit, où les deux disques sont portés à des potentiels opposés. Si κ est positif il s'agit du "conducteur unique" où les disques sont au même potentiel. Le condensateur correspond donc au système de bosons répulsifs et le "conducteur unique" correspond au système de fermions attractifs que nous étudions. Pour préciser la correspondance il est commode d'effectuer un changement d'échelle et de considérer des disques distants de l'unité, mais de rayon variable q_0 (c'est-à-dire on considère le système (15.11) avec $|V| = 1$) on obtient alors la correspondance

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^{q_0} f(q) dq = \text{charge totale sur un disque} \\ k_0 \mathcal{E}(k_0) &= \int_0^{q_0} q^2 f(q) dq = \text{second moment des charges, par rapport à l'axe du disque} \\ \text{avec} \quad f(q) + \frac{1}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{f(q') dq'}{(q - q')^2 + 1} &= 2. \end{aligned} \quad (15.20)$$

La quantité réduite $\mathcal{E}(k_0)$ représente donc le rayon carré moyen de la distribution de charge en fonction de la charge totale d'un disque.

Notons enfin que la réduction du problème électrostatique à l'équation intégrale (15.16) ou (15.20) a été effectué en 1949 par Love (voir [18], chapitre VIII).

Cette nouvelle analogie dans le problème que nous traitons est utile pour la raison suivante. Pour les valeurs de κ qui ne sont pas trop petites il est aisé de calculer numériquement la fonction F et d'obtenir des courbes $k_0(\kappa)$ et $\varepsilon(\kappa)$. Cependant au voisinage de $\kappa = 0$, l'opérateur intégral qui figure dans (15.16) tend vers l'opérateur unité et l'inversion numérique est rendue difficile par la mauvaise convergence de la série de Liouville-Neumann. Il semble évident que les fonctions analytiques k_0 et ε de la variable complexe κ possèdent une singularité pour $\kappa = 0$ étant donné la nature très différente des phénomènes électrostatiques correspondant aux valeurs réelles positives ou négatives de κ . De fait il est difficile d'obtenir une approximation de $F(x)$ pour $\kappa \rightarrow 0$, directement sur l'équation (15.16) et l'analogie électrique permet une autre approche.

Il semble donc naturel d'étudier le voisinage de $\kappa = 0$, qui correspond donc à une singularité de k_0 et ε , en fonction du rapport $\frac{|V|}{q_0}$. Puis ensuite l'élimination du pseudo-moment de Fermi q_0 , donne $\varepsilon(V)$ au voisinage de $V = 0$, fournissant ainsi un développement de l'énergie par les petites valeurs de la constante de couplage, ou de façon équivalente pour les grandes valeurs de la densité. La question se pose alors de savoir si la fonction $\mathcal{E}(k_0)$ ainsi obtenue possède une singularité pour $k_0 = \infty$. C'est un problème mathématiquement bien posé, mais malgré de nombreux efforts nous n'avons pu conclure.

L'intérêt d'une telle étude vient de la théorie des systèmes superconducteurs. On sait que dans certains modèles, l'énergie par particule possède un point singulier du type $\exp\left\{\frac{1}{V}\right\}$. Ce résultat [19] vaut rigoureusement quelque soit la dimension, pour des fermions attractifs en interaction par paires d'impulsion totale nulle. On l'obtiendrait aussi si l'on appliquait brutalement la méthode de Gorkov [23] pour les fermions en interaction δ à une dimension, ce qui serait équivalent à la méthode variationnelle de Hartree-Bogoliubov. Cependant d'après l'étude de Bychkov déjà citée [2] le cas à une dimension est singulier et finalement les auteurs ne peuvent rien conclure sur la forme de l'énergie de l'état fondamental. On conçoit donc l'intérêt d'une comparaison avec un système exactement résolu, quant à la validité des méthodes variationnelles [23] et quant à celle des resommations partielles de la théorie des perturbations [2].

Revenons donc à l'équation qui détermine l'énergie, par exemple sous la forme (15.16). La difficulté est d'extraire le comportement de $F(x)$ au voisinage de $\kappa = 0$, uniformément par rapport à x sur l'intervalle $[-1, +1]$. En effet la fonction $F(x)$ est liée simplement à la densité de charge $\sigma(r)$ sur un disque par la relation

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sigma(r)r \, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Les comportements de $\sigma(r)$ dans la zone centrale du disque et sur les bords sont tout à fait différents ; l'effet de bord est important aussi petit que soit κ l'écartement des disques, car il garde la même structure par un changement d'échelle. Une approximation due à Kirchhoff (1877) dont la validité a été montrée par Hutson [20] (1963), appliquée au cas du condensateur ($\kappa < 0$, problème des bosons) repose sur cette séparation entre les bords et la partie centrale. Il est intuitif que l'effet de bord à la limite $\kappa \rightarrow 0$, se ramène à un problème d'électrostatique à deux dimensions (résolu par Maxwell). Il reste à calculer la réaction de la distribution au bord des disques sur celle de la partie centrale. Ceci est possible dans le cas du condensateur, $\kappa < 0$,

car il existe une formule due à Kac et Pollard [21] qui permet de trouver une solution approchée de (15.16) loin des bords. Mais dans le cas du conducteur unique ($\kappa < 0$), nous n'avons pas une telle solution approchée et nous n'avons pu obtenir une approximation équivalente à celle de Kirchhoff et Hutson.

Citons l'approximation de Kirchhoff pour la capacité du condensateur (ou la densité du gaz de Bose)

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = \frac{\pi}{2|\kappa|} + \frac{1}{2} \log \frac{16\pi}{e|\kappa|} + o(1) \quad (15.21)$$

Pour $\kappa > 0$, nous avons seulement obtenu pour les deux premiers moments de F :

$$k_0 = q_0 \left[1 + \frac{\kappa}{2\pi} \log \frac{C}{\kappa} + o(\kappa) \right], \quad (15.22)$$

$$\epsilon = \frac{q_0^3}{k_0} \left[\frac{1}{3} + \frac{\kappa}{2\pi} \left(\log \frac{C}{\kappa} - 2 \right) + o(\kappa) \right], \quad (15.23)$$

ce qui correspond à l'approximation suivante de F loin des bornes $x = \pm 1$:

$$F(x) \propto 1 + \frac{\kappa}{\pi} \frac{1}{1-x^2} + o(\kappa). \quad (15.24)$$

Cette approximation se raccorde, à cet ordre, à la solution asymptotiquement exacte du problème des bords. La constante C n'est pas déterminée et la nature du développement (15.21) est inconnue.

Pour obtenir le développement de $\mathcal{E}(y)$ définie en (15.19), il faudrait éliminer κ entre les deux expressions

$$y = \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{2\pi} \log \frac{C}{\kappa} + o(1) \quad (15.25)$$

$$y\mathcal{E}(y) = \frac{1}{3\kappa^3} + \frac{1}{2\pi\kappa^2} \left(\log \frac{C}{\kappa} - 2 \right) + o\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) \quad (15.26)$$

Ces développements ne peuvent nous donner plus que les deux premiers termes de $\mathcal{E}(y)$ pour les grandes valeurs de y

$$\mathcal{E}(y) = \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{\pi}y(1 + o(1)). \quad (15.27)$$

Il semble qu'apparaissent en $o(1)$, diverses puissances du terme logarithmique, mais les coefficients pourraient très bien être compensés grâce aux termes suivants du développement (15.25). Bien que nous ayons sans doute obtenus en (15.24) et (15.25) les termes dominants de la singularité et nous ne pouvons obtenir en (15.26) davantage que le terme de perturbation du premier ordre ! En effet l'expression (15.26) nous donne :

$$\epsilon(V) = \frac{1}{3}k_0^2 - \frac{1}{\pi}k_0|V| + \dots$$

Nous présentons dans le tableau ci-dessous, les valeurs calculées numériquement de k_0 et $\mathcal{E}(k_0)$ ainsi qu'une détermination approchée de la constante $\log C$ qui figure dans (15.24). De la comparaison avec les valeurs calculées par perturbation au second ordre, section 13, on peut penser qu'il ne serait pas impossible que la fonction $\epsilon(V)$ soit analytique pour $V = 0$

q_0	k_0	$\mathcal{E}(k_0)$	Perturbation au second ordre	Détermination de $\log C$
0,5	0,7817			
1	1,3824			
1,5	1,9398			
2	2,4806			
4	4,5807	5,699	5,71	2,264
6	6,6407	12,750	12,75	2,255
8	8,684	22,535	22,54	2,217
10	10,72	35,037	35,06	2,220

Les valeurs extraites du tableau ci-dessus permettent de représenter la courbe $\mathcal{E}(y)$ sur la figure 2 et de la comparer avec la fonction correspondante du gaz parfait : $\frac{1}{3}y^2$. Pour calculer \mathcal{E} , et k_0 , il a fallu déterminer numériquement un réseau de courbes $F_\kappa(x)$ pour diverses valeurs du paramètre $\kappa = |V|/q_0$, réseau représenté sur la figure 3. On notera la valeur limite : $\lim_{V \rightarrow 0} F(1) = \sqrt{2}$.

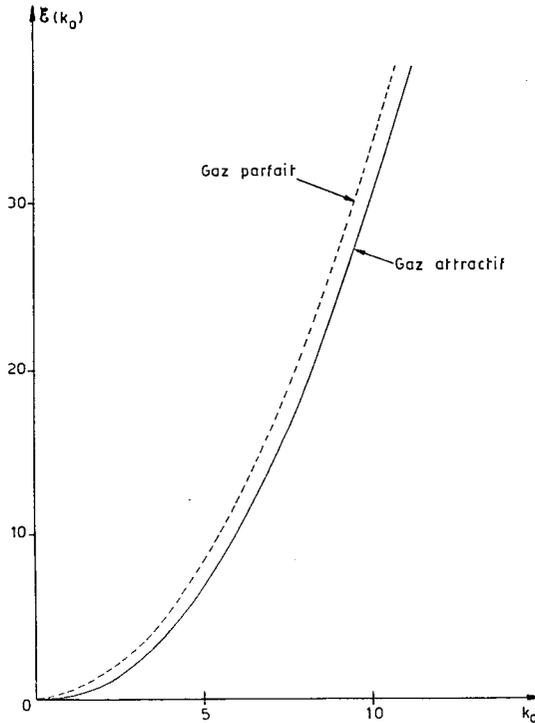


Fig. 2. — Energie de l'état fondamental du gaz attractif.

16. Energie de l'état fondamental (spin 0) : cas répulsif

Nous faisons ici les mêmes hypothèses que dans la section précédente pour le cas attractif : l'état fondamental dépend continûment de la constante de couplage V sur $[0, \infty]$. C'est donc un état défini par le nombre maximum de "paires", de spin 0 comme l'état fondamental non

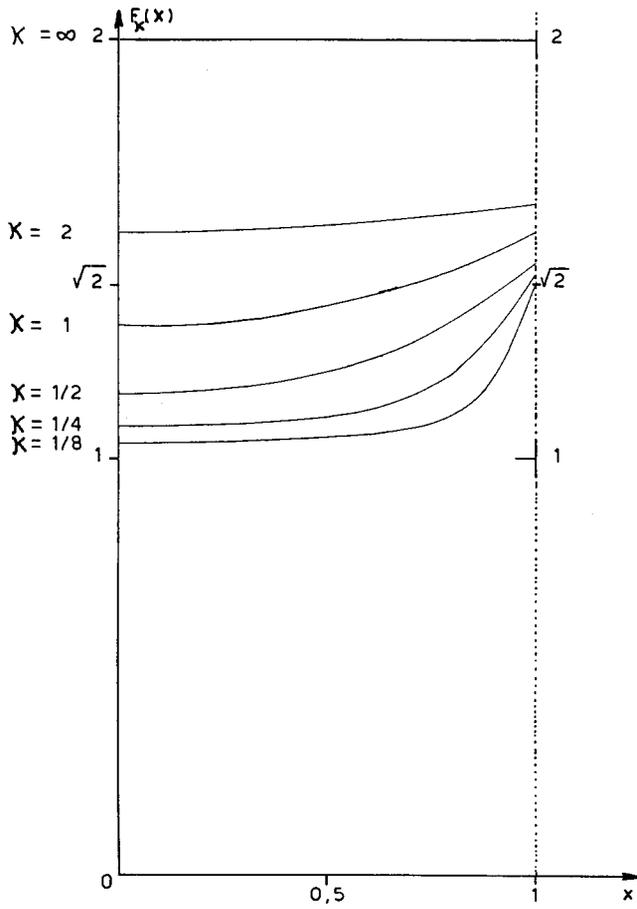


Fig. 3. — Distribution des pseudo-moments pour diverses valeurs de $\kappa = \frac{|V|}{k_0}$.

perturbé. Les nombres quantiques de cet état sont donc, pour un nombre de particules N

$$K = 0, S = 0, r = \bar{\nu} = \nu = \frac{N}{2} = 2p + 1$$

$$n_a = a, \quad -p \leq a \leq +p. \tag{16.1}$$

Les nombres entiers n_a sont donc les nombres d'ondes limites de "paires" au sens défini au paragraphe 10.6. Comme le nombre de paires est maximum, les nombres quantiques q^* n'existent pas.

Les équations couplées (11.6) peuvent donc s'écrire de la façon suivante dans une notation indicielle qui met en évidence la paire k'_a, k''_a , associée au nombre limite $n_a = a$:

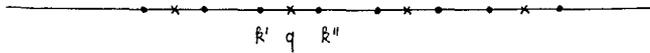
$$\sum_{b=-p}^{+p} \theta'_{ba} + \theta''_{ba} = \sum_b \psi_{ba},$$

$$\begin{aligned} Lk'_a &= 2\pi a + \sum_{b=-p}^{+p} \theta'_{ab}, \\ Lk''_a &= 2\pi a + \sum_b \theta''_{ab}, \end{aligned} \tag{16.2}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{2}{V} (k'_a - q_b) &= \cotg \frac{1}{2} \theta'_{ab}, \\ \frac{2}{V} (k''_a - q_b) &= \cotg \frac{1}{2} \theta''_{ab} \end{aligned} \tag{16.3}$$

Il nous faut regarder en détail la détermination des angles θ' et θ'' . D'après la remarque du paragraphe 11.1, l'angle θ_{ja} varie continûment et garde un signe constant quand V varie sur l'axe réel positif. Il suffit donc de regarder les choses dans le voisinage de $V = 0$. Cette étude est faite dans la région $0 \leq VL \ll 1$ au paragraphe 11.2 pour une seule paire, et dans le cas plus général qui nous concerne, section 13. On obtient la disposition suivante des k et des q :



avec

$$\begin{aligned} q_a &\propto \frac{2\pi}{L} a \\ k'_a &\propto \frac{2\pi}{L} a - \sqrt{\frac{V}{L}} \\ k''_a &\propto \frac{2\pi}{L} a + \sqrt{\frac{V}{L}} \quad VL \ll 1 \end{aligned} \tag{16.4}$$

On en déduit les déterminations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta'_{ba} &= -2 \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k'_b - q_a) + \pi \varepsilon \left(b - a - \frac{1}{2} \right), \\ \theta''_{ba} &= -2 \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k''_b - q_a) + \pi \varepsilon \left(b - a + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \tag{16.5}$$

la détermination de l'Arctg étant continue à l'origine. Les premières équations (16.2) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} Lk'_a &= 2\pi \left(2a - \frac{1}{2} \right) - 2 \sum_b \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k'_a - q_b) \\ Lk''_a &= 2\pi \left(2a + \frac{1}{2} \right) - 2 \sum_b \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k''_a - q_b). \end{aligned} \tag{16.6}$$

Si les nombres q sont tous réels on voit graphiquement que les deux suites de nombres k' et k'' alternent et leur réunion forme une suite de N nombres notés k_λ solution du système

$$Lk_\lambda = 2\pi \lambda - 2 \sum_{a=-p}^{+p} \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k_\lambda - q_a), \tag{16.7}$$

où λ prend toutes les valeurs demi-entières de $-\left(2p + \frac{1}{2}\right)$ à $+\left(2p + \frac{1}{2}\right)$. On voit aisément que les k_λ sont ordonnés comme les λ . Enfin, la dernière équation (16.2) s'écrit :

$$-2 \sum_\lambda \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k_\lambda - q_a) = \sum_b \psi_{ba} + 4\pi a. \tag{16.8}$$

Après avoir élucidé ce point préalable important sur la disposition des nombres k , nous sommes en mesure de considérer la limite thermodynamique, et par une méthode analogue à celle de la section précédente nous obtenons les formes limites des équations (16.7) et (16.8).

Les points k_λ et q_a ont la densités respectives $\frac{1}{2\pi} f_1(k)$ et $\frac{1}{2\pi} f(q)$ sur les segments $[-k_1, +k_1]$ et $[-q_0, +q_0]$.

Nous obtenons pour l'équation (16.7) :

$$1 = f_1(k) - \frac{1}{\pi} \frac{d}{dk} \int_{-q_0}^{+q_0} \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k - q) f(q) dq, \quad (16.9)$$

et pour l'équation (16.8) :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dq} \int_{-k_1}^{+k_1} \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k - q) f_1(k) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dq} \int_{-q_0}^{+q_0} \psi(q', q) f(q') dq' + 2f(q). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Nous avons les expressions suivantes de la densité et de l'énergie par particules

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} f(q) dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} f_1(k) dk. \quad (16.11)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-k_1}^{+k_1} k^2 f_1(k) dk. \quad (16.12)$$

La relation suivante entre k_1 et q_0 est équivalente à l'équation (16.11)

$$k_1 = 2k_0 - \frac{1}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \operatorname{Arctg} \frac{2}{V} (k_1 - q) f(q) dq \quad (16.13)$$

qui est la forme limite de l'équation (16.7) pour $\lambda = 2p + \frac{1}{2}$.

Les équations (16.9) et (16.10) donnent lieu aux équations intégrales couplées par les fonctions f et f_1 :

$$f_1(k) - \frac{V}{2\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{f(q) dq}{(k - q)^2 + \frac{V^2}{4}} = 1, \quad |k| < k_1. \quad (16.14)$$

$$f(q) + \frac{V}{2\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{f(q') dq'}{(q - q')^2 + V^2} = \frac{V}{2\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} \frac{f_1(k) dk}{(k - q)^2 + \frac{V^2}{4}} \quad (16.15)$$

L'élimination de f_1 nous donne l'équation en f :

$$f(q) + \int_{-q_0}^{+q_0} K(q, q') f(q') dq' = \frac{V}{2\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} \frac{dk}{(k - q)^2 + \frac{V^2}{4}} \quad (16.16)$$

où le noyau K est exactement donné par la formule (14.19) ; on notera la ressemblance avec l'équation (14.18) obtenue dans le cas attractif dans un contexte tout différent, puisque l'équation (14.18) est relative au problème du fondamental de spin donné S , alors que l'équation (16.16) est relative au fondamental de spin 0.

L'ensemble des équations (16.16) et (16.13) déterminent la fonction $f(q)$ et la quantité k_1 , en terme du paramètre q_0 , et permettraient donc d'atteindre les fonctions ε et k_0 par des méthodes numériques. La grosse difficulté est ici que la quantité k_1 figurant comme paramètre dans le noyau K , est aussi fonctionnelle de f par la relation (16.13). La complexité des équations intégrales obtenues nous interdit de pousser plus loin l'analyse du cas répulsif. Il y aurait cependant quelque intérêt à comparer par exemple le comportement analytique de l'énergie au voisinage de $V = 0$ à celui du cas attractif.

17. Excitations élémentaires

Nous considérons dans cette section quelques excitations élémentaires du système de fermions attractifs. Ces excitations constituent une classe d'états d'énergie minimum pour des valeurs microscopiques données de l'impulsion K et du spin S voisines de celles de l'état fondamental. Pas plus que pour ce dernier, la détermination des nombres quantiques des premiers états excités n'a été faite rigoureusement. Bien que notre système attractif ne soit pas un système "normal" à cause de l'existence d'états liés à deux corps, nous avons utilisé la correspondance entre les excitations élémentaires du système réel et celles du système sans interaction, dans l'esprit de la théorie des systèmes de Fermi due à Landau [23]. Dans notre cas spécifique, cette correspondance est manifeste, à la suite de l'étude effectuée dans les sections 10 et 11 ; à volume fini, la continuité des états en fonction de la constante de couplage traduit le caractère adiabatique de l'établissement de l'interaction que postule Landau.

Nous nous sommes limités au gaz attractif dont l'état fondamental à une structure assez simple de gaz de "paires" analogue à un gaz de bosons excité.

On est amené naturellement à distinguer trois types d'excitation obtenue en excitant ou ne brisant une paire, à partir de l'état fondamental de nombres quantiques :

$$N = 4p + 2, \quad K = 0, \quad S = 0.$$

Type I : Excitation de spin 0 et d'impulsion K obtenue en excitant une "paire" au sens défini section 10, c'est-à-dire en créant dans la distribution de paires qui constitue l'état fondamental un trou de paire et une paire de particules liées, d'impulsion respectivement inférieure et supérieure au double du moment de Fermi.

Type II : Excitation de spin 0 d'impulsion K , obtenue en brisant une paire, c'est-à-dire en créant une particule et un trou dans la distribution de Fermi.

Type III : Excitation de spin 1 et d'impulsion K , obtenue nécessairement en brisant une paire.

Nous abordons maintenant les excitations de type I ; nous pourrions étudier de la même façon les types II et III, mais nous en dirons seulement quelques mots.

En effet, seuls des calculs numériques étendus permettraient d'exploiter les équations obtenues et de produire les courbes de dispersion intéressantes — comme aussi dans le cas répulsif — et ceci entraînerait trop loin.

17.1. PREMIER TYPE D'EXCITATION. — Nous restons ici dans la classe des états du gaz de paires liées, déterminée par les équations (12.15). Nous avons choisi $N = 4p + 2$ pour avoir une distribution de Fermi compacte et symétrique de moment total 0.

Les nombres quantiques de l'état fondamental sont : $n_a = a$, $-p \leq a \leq p$, a entier. L'état excité est défini en supprimant de la suite précédente le nombre $n_s = s$, et en le remplaçant par $n_t = t$, avec

$$|s| \leq p, \quad |t| > p. \tag{17.1}$$

Nous avons donc

$$\bar{\nu} = \nu = \frac{1}{2}N = 2p + 1 \quad (17.2)$$

$$K = \frac{4\pi}{L}(t - s). \quad (17.3)$$

Nous appellerons $\delta q_a = \bar{q}_a - q_a$, et $\delta\psi_{ab} = \bar{\psi}_{ab} - \psi_{ab}$, les différences des quantités q et ψ dans l'état excité et dans l'état fondamental. Après soustraction des équations couplées correspondantes, nous obtenons les équations exactes :

$$\delta q_a = \frac{1}{2L} \sum_{b=-p}^{b=+p} \delta\psi_{ab} + \frac{1}{2L} (\bar{\psi}_{at} - \psi_{as}), \quad -p \leq a \leq p, \quad a \neq s. \quad (17.4)$$

$$q_s = \frac{2\pi s}{L} + \frac{1}{2L} \sum_{b=-p}^{+p} \psi_{sb}, \quad |s| \leq p \quad (17.5)$$

$$\bar{q}_t = \frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{2L} \sum_{b=-p}^{+p} \bar{\psi}_{tb}, \quad t > p. \quad (17.6)$$

Nous allons vérifier maintenant que les équations précédentes possèdent une solution telle que $\delta q_a = O\left(\frac{1}{L}\right)$.

Nous définirons donc la quantité $g(q_a) = O(1)$

$$\delta q_a = \frac{1}{L} g(q_a). \quad (17.7)$$

Les équations (12.15), d'autre part, nous donnent exactement :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \delta\psi_{ab} \right) = \frac{-V(\delta q_a - \delta q_b)}{(q_a - q_b)(\bar{q}_a - \bar{q}_b) + V^2}. \quad (17.8)$$

Nous en déduisons

$$\frac{1}{2} \delta\psi_{ab} = -\frac{V}{L} \frac{g(q_a) - g(q_b)}{(q_a - q_b)^2 + V^2} + O\left(\frac{1}{L^2}\right). \quad (17.9)$$

Reportons ces dernières quantités dans les équations (17.4) pour obtenir à l'ordre $\frac{1}{L}$ près

$$g(q_a) = -\frac{V}{L} \sum_b \frac{g(q_a) - g(q_b)}{(q_a - q_b)^2 + V^2} + \frac{1}{2} (\psi_{at} - \psi_{as}) \quad (17.10)$$

Nous nous intéressons ici spécialement à la différence d'énergie qui sépare l'état excité de l'état de base. Cette différence ΔE s'écrit, d'après (12.15)

$$\Delta E = 2 \sum_a (\bar{q}_a^2 - q_a^2) + 2 (\bar{q}_t^2 - \bar{q}_s^2) \quad (17.11)$$

ou bien

$$\Delta E = \frac{4}{L} \sum_{a=-p}^{+p} q_a g(q_a) + 2 (q_t^2 - q_s^2) + O\left(\frac{1}{L}\right). \quad (17.12)$$

Il est alors aisé de passer à la limite $L \rightarrow \infty$, sachant que la densité des pseudo-moments q_a est $\frac{1}{2\pi}f(q)$, où f est solution de l'équation (15.11).

On obtient pour les équations (17.10) l'équation intégrale limite

$$g(q) + \frac{V}{2\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{g(q) - g(q')}{(q - q')^2 + V^2} f(q') dq' = \text{Arcotg} \frac{q - q_t}{V} - \text{Arcotg} \frac{q - q_s}{V} \quad (17.13)$$

où les déterminations discontinues à l'origine des Arcotg sont celles des ψ .

On obtient aussi pour la différence d'énergie ΔE la forme limite issue de (17.12) :

$$\Delta E = 2(q_t^2 - q_s^2) + \frac{2}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} q f(q) g(q) dq. \quad (17.14)$$

On peut transformer l'équation (17.13) en prenant comme fonction inconnue le produit $f(q)g(q)$ et en définissant deux fonctions inconnues $h_t(q)$ et $h_s(q)$ des paramètres q_t et q_s , qui vérifient les équations de Fredholm inhomogènes suivantes :

$$h_t(q) - \frac{V}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{h_t(q') dq'}{(q - q')^2 + V^2} = 2 \text{Arcotg} \frac{q - q_t}{V} \quad (17.15)$$

$$h_s(q) - \frac{V}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{h_s(q') dq'}{(q - q')^2 + V^2} = 2 \text{Arcotg} \frac{q - q_s}{V}. \quad (17.16)$$

Posant maintenant :

$$t^* = \frac{2\pi t}{L}, \quad s^* = \frac{2\pi s}{L}, \quad K = 2(t^* - s^*), \quad (17.17)$$

Les relations (17.5) et (17.6) qui relient t à q_t , s à q_s , s'écrivent

$$q_t = t^* + \frac{1}{2\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} dq f(q) \text{Arcotg} \frac{q_t - q}{V}, \quad (17.18)$$

et la même pour q_s . On aboutit alors à la décomposition de l'énergie ΔE donnée par (17.14) en deux termes positifs :

$$\Delta E = \Delta E_t + \Delta E_s, \quad (17.19)$$

avec les définitions

$$\Delta E_t = 2(q_t^2 - q_0^2) + \frac{2}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} q (h_t(q) - h_0(q)) dq. \quad (17.20)$$

et la définition analogue pour $-\Delta E_s$.

La fonction $h_0(q)$ est définie par

$$h_0(q) = h_t(q)|_{q_t=q_0} = h_s(q)|_{q_s=q_0}. \quad (17.21)$$

La relation (17.18) définit q_t en fonction de t^* . On a de même q_s en fonction de s^* . La fonction ΔE dépend donc de deux paramètres. On voit aisément, par intégration de l'équation (15.11) entre $-q_0$ et $+q_0$, que l'on a les égalités

$$\begin{aligned} t^* &= k_0 & \text{pour } q_t &= q_0 + 0 \\ s^* &= k_0 & \text{pour } q_s &= q_0 - 0 \end{aligned}$$

On montre aussi par dérivation de (17.18) que l'on a les expressions commodes

$$s^* = \int_0^{q_s} f(q) dq, \quad |q_s| < q_0 \quad (17.22)$$

$$t^* = \frac{1}{2} \int_{-q_0}^{q_t} f(q) dq, \quad q_t > q_0, \quad (17.23)$$

où la fonction f est prolongée naturellement en dehors de l'intervalle $[-q_0, +q_0]$, par l'équation de définition de f .

Cette analyse nous amène à la conclusion évidente suivante : le type I d'excitation dont l'énergie est donnée par l'expression (17.19) peut être considéré comme la superposition de deux excitations indépendantes appartenant aussi à ce type I.

L'une est du type paire de particules, l'autre du type paire de trous. Rassemblant les résultats (17.19), (17.20), (17.22) et (17.23), on obtient les spectres des excitations composantes sous forme paramétrique :

– Type paire de particules (avec une paire de trous à la surface de Fermi)

$$\begin{cases} K = \int_{q_0}^{q_t} f(q) dq & q_t > q_0 \\ \Delta E_t = 2(q_t^2 - q_0^2) + \frac{2}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} q (h_t(q) - h_0(q)) dq \end{cases} \quad (17.24)$$

– Type paire de trous (avec une paire de particules à la surface de Fermi)

$$\begin{cases} K = 2 \int_{q_s}^{q_0} f(q) dq, & -q_0 < q_s < q_0 \\ \Delta E_s = 2(q_0^2 - q_s^2) - \frac{2}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} q (h_s(q) - h_0(q)) dq. \end{cases} \quad (17.25)$$

Les fonctions h_t et h_s qui interviennent sont les solutions des équations inhomogènes (17.15) et (17.16), que l'on peut résoudre numériquement. L'élimination des paramètres, q_t ou q_s permet d'obtenir les courbes de dispersion $\Delta E_t(K)$ et $\Delta E_s(K)$.

Signalons que la quantité

$$2q_0^2 + \frac{2}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} h_0(q)q dq = 2\mu_0$$

qui intervient dans les expressions (17.24) et (17.25) est reliée simplement au potentiel chimique :

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \mu_0 - \frac{V^2}{4}. \quad (17.26)$$

La quantité $2\mu_0$ représente l'énergie de séparation entre une paire à la limite de la zone de Fermi et le reste du système. La quantité $-\frac{V^2}{4}$ est la moitié de l'énergie de liaison interne de la paire.

Les quantités ΔE_t et ΔE_s qui sont des énergies d'excitations proprement dites sont donc positives ou nulles ; d'autre part, pour $K = 0$ on a $\Delta E_t = 0$ (ou $\Delta E_s = 0$). Il est aisé de calculer les pentes

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\Delta E_s}{K} = c_s \quad \text{et} \quad \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\Delta E_t}{K} = c_t.$$

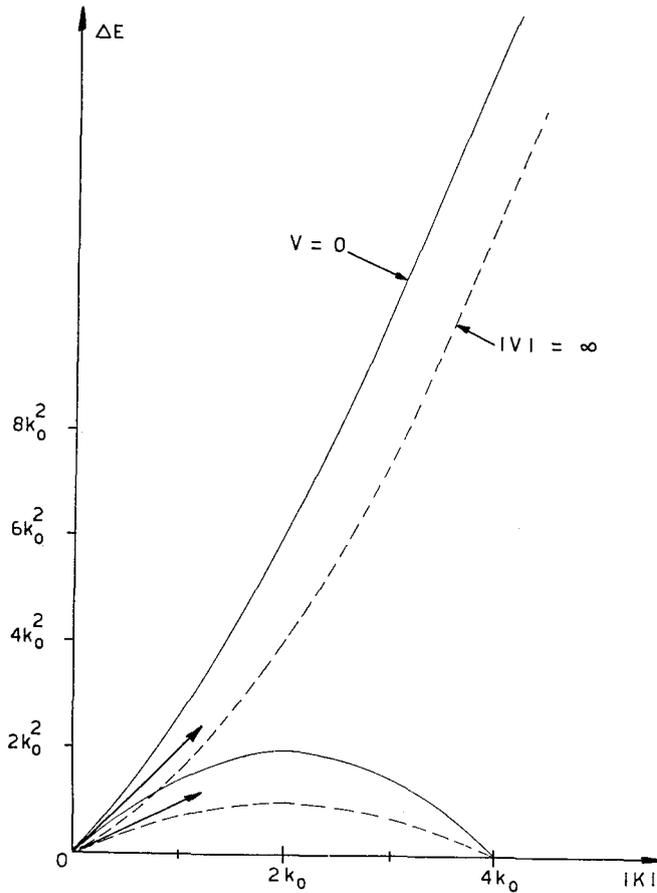


Fig. 4. — Spectres d'excitation du Type I pour les valeurs extrêmes de V .

On trouve qu'elles sont finies et égales. On a donc deux branches de type phonon pour les petites valeurs de l'impulsion, dont les pentes coïncident à l'origine. Un calcul numérique assez imprécis permet de représenter sur la figure 4 l'allure des deux branches du spectre d'excitation du gaz de paires.

Il semble presque sûr que l'on puisse superposer linéairement les phonons définis ci-dessus, pourvu qu'ils soient en nombre fini. Il suffit d'exciter à partir du fondamental un certain nombre de paires liées définies par des nombres quantiques entiers distincts. Cette dernière restriction est sans importance pour la statistique de ces phonons tant que l'énergie d'excitation totale est microscopique. On en déduirait une contribution à la chaleur spécifique linéaire à l'origine en fonction de la température.

Le spectre du type I est tout à fait analogue au spectre d'excitation dû aux fluctuations de densité dans un système de fermions indépendants d'une seule espèce. Ici, ce sont les paires de spin 0 qui se comportent comme des phonons indépendants.

On notera aussi l'analogie avec les excitations du gaz linéaire de boson étudiées par Lieb [24].

Remarquons pour terminer que la vitesse du son associée à ces phonons a pour valeur précise $c_s = c_t = c = 4k_0/f^2(q_0)$.

Cette valeur est comprise entre les deux valeurs limites représentées figure 4.

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} c &= 2k_0 = v_0 \quad (\text{vitesse d'une particule à la surface de Fermi}) \\ \lim_{V \rightarrow 0} c &= k_0 \end{aligned}$$

La preuve de l'égalité suivante :

$$\lim_{V \rightarrow 0} f(q_0) = \sqrt{2}$$

n'est pas donnée. Elle repose sur l'analogie électrostatique évoquée section 15 et demanderait de longs développements.

Nous avons trouvé ainsi que c est différent de la vitesse du son ordinaire déterminée par la compressibilité adiabatique.

17.2. NOUS N'AVONS FAIT QU'UNE ÉTUDE SOMMAIRE DES EXCITATIONS DE TYPE II ET III CARACTÉRISÉES PAR LA DISSOCIATION D'UNE SEULE PAIRE LIÉE. — Nous donnons les nombres quantiques qui les définissent et les équations couplées qui les déterminent, et nous indiquons les résultats qualitatifs.

Nous avons donc seulement deux possibilités de spin $S = 0$ ou $S = 1$. Considérons le cas $S = 0$, c'est-à-dire le type II. Nous avons donc :

$$\bar{\nu} = \nu = \frac{1}{2}N = 2p + 1.$$

Mais une paire est dissociée, le nombre de paires complexes r a diminué d'une unité par rapport à celui du fondamental

$$r = \bar{\nu} - 1 = 2p.$$

D'après l'étude faite section 12, le choix des nombres quantiques est simple. Ceux du fondamental, on l'a vu, forment la suite des nombres d'onde limites de paires :

$$n_a = a, \quad -p \leq a \leq p.$$

Ceux de l'état excité considéré s'obtiennent à partir de la suite précédente en dissociant par exemple la paire n_s , c'est-à-dire en occupant individuellement les cases $n_s = s$ et $n_t = t$, avec

$$|s| \leq p, \quad |t| > p.$$

Le moment total de cet état défini par les deux nombres s et t , est

$$K = \frac{2\pi}{L}(t - s).$$

En adaptant au cas spécifique traité ici la notation indicielle générale du système (12.14), nous obtenons les équations couplées suivantes en nombre exactement suffisant :

$$\begin{cases} Lk_t = 2\pi t + \sum_{b=-p}^{+p} \theta_{t,b} \\ Lk_s = 2\pi s + \sum_b \theta_{s,b} \\ Lq_a = 2\pi a + \frac{1}{2} \sum_{b=-p}^p \psi_{ab} - \frac{1}{2} (\theta_{s,a} + \theta_{t,a} - \psi_{s,a}), \quad -p \leq a \leq p, \quad a \neq s \\ \theta_{t,s} + \theta_{s,s} = 0 \end{cases} \quad (17.27)$$

(On déduit de cette dernière équation $q_s = \frac{1}{2}(k_s + k_t)$).

Considérons maintenant le cas de spin $S = 1$, c'est-à-dire le type III. Nous devons donc rendre

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2}N - 1 = 2p,$$

et nous choisirons le nombre maximum de paires compatibles avec le spin, c'est-à-dire

$$r = \bar{\nu} = 2p.$$

Les nombres quantiques sont les mêmes que pour le type II. Les équations couplées (12.14) font intervenir seulement $2p$ nombres q et 2 nombres k .

Nous obtenons

$$\begin{cases} Lk_t = 2\pi t + \sum_{b \neq s} \theta_{t,b} \\ Lk_s = 2\pi s + \sum_{b \neq s} \theta_{s,b} \\ Lq_a = 2\pi a + \frac{1}{2} \sum_{b \neq s} \psi_{ab} - \frac{1}{2} (\theta_{s,a} + \theta_{t,a}) \quad a \neq s \end{cases} \quad (17.28)$$

Dans ces deux cas, l'énergie de l'état excité s'écrit :

$$E + \Delta E = 2 \sum_{a \neq s} q_a^2 + k_t^2 + k_s^2 - p \frac{V^2}{2}. \quad (17.29)$$

Procédant alors, comme pour le type I, par soustraction entre les quantités relatives à l'état excité et au fondamental, on obtient à la limite $L \rightarrow \infty$, l'énergie d'excitation ΔE . Le fait important ici est la dégénérescence par rapport au spin de l'énergie d'excitation. On trouve, à la limite infinie,

$$\Delta E^{\text{II}} \equiv \Delta E^{\text{III}}, \quad (17.30)$$

avec la décomposition

$$\Delta E^{\text{II}} = (\Delta E_s^{\text{I}} - 2\mu_0) + \Delta E_s^{\text{II}} + \Delta E_t^{\text{II}} + \frac{V^2}{2} \quad (17.31)$$

La forme explicite de ΔE_s^{II} est la suivante :

$$\Delta E_s^{\text{II}} = k_s^2 + \frac{2}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} h_s^{\text{II}}(q) q \, dq, \quad (17.32)$$

où h_s^{II} fonction du paramètre k_s , est solution de l'équation inhomogène

$$h_s^{\text{II}}(q) - \frac{V}{\pi} \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{h_s^{\text{II}}(q') \, dq'}{(q - q')^2 + V^2} = -2 \operatorname{arctg} 2 \frac{k_s - q}{V} \quad (17.33)$$

avec la détermination continue. On a une définition identique pour ΔE_t^{II} .

$\Delta E_s^{\text{I}} - 2\mu_0$ est en quelque sorte l'énergie de séparation d'une paire de moment total

$$K_s^{\text{I}} = 2 \int_{q_s}^{q_0} f(q) \, dq. \quad (17.34)$$

ΔE_s^{II} est l'énergie d'une particule non appariée se propageant dans le milieu avec le moment total

$$K_s^{\text{II}} = -\frac{1}{2}K_s^{\text{I}}, \quad (17.35)$$

ce qui équivaut à la liaison suivante entre les paramètres k_s et q_s :

$$\int_0^{k_s} f_1(k) dk = -\int_{q_s}^{q_0} f(q) dq \quad (17.36)$$

(la fonction $f_1(k)$ est définie section 14).

ΔE_t^{II} est l'énergie d'une particule non appariée de moment total

$$K_t^{\text{II}} = \int_0^{k_t} f_1(k) dk. \quad (17.37)$$

Le moment total de notre excitation composée est donc :

$$\begin{aligned} K &= K_t^{\text{II}} + K_s^{\text{II}} + K_s^{\text{I}} = K_t^{\text{II}} - K_s^{\text{II}} \\ &= \int_{k_s}^{k_t} f_1(k) dk. \end{aligned} \quad (17.38)$$

Cette excitation composée est simplement la superposition d'une particule et d'un trou, l'un et l'autre indépendants et non appariés. Le trou non apparié peut lui-même être considéré comme résultant d'un trou de paire et d'une particule de moment total moitié de celui de la paire.

Nous n'avons pas effectué la résolution numérique des équations intégrales, qui permettrait seule de construire les courbes d'excitation et d'obtenir des conclusions nettes sur l'existence d'une lacune en énergie ou d'une excitation collective, en ce qui concerne les types II et III.

18. Conclusion

Cette étude d'un système de fermions comprend au fond deux grandes parties qui correspondent aux deux étapes du programme tracé dans l'introduction. La première partie décrit la recherche de la solution exacte du problème de valeurs propres posé par les conditions de périodicité et les conditions de symétrie, et montre que cette solution est complète. Ceci a été acquis avec une connaissance minimum de la fonction d'onde. Sa détermination explicite hors des quelques secteurs où elle est écrite, reste donc à faire et permettrait sans doute une meilleure description du système. Cette première partie aboutit principalement à un système d'équations couplées dont chaque solution associée à un ensemble de nombres quantiques bien défini, permet le calcul d'un niveau d'énergie et la construction de la fonction d'onde correspondante.

La forme non triviale des résultats ainsi obtenus semblait encourageante pour aborder la seconde partie, qui consiste en l'étude des propriétés du système directement déductibles du spectre d'énergie et des fonctions d'ondes. En fait, nous avons rencontré dès ce moment beaucoup d'obstacles que nous n'avons pas franchis. Le premier est lié au problème de la classification des états par énergie croissante. Comment déterminer les nombres quantiques de l'état fondamental et des premiers états excités ? Nous n'avons pour cela établi un principe variationnel qui ramène la question à un problème de statique pour un ensemble de points soumis à des forces mutuelles. L'exploitation de ce principe s'est révélée compliquée et nous nous sommes laissés guider par un principe de continuité permettant de suivre chaque état à partir de l'état non perturbé et aussi par des considérations intuitives.

Le second obstacle rencontré est un problème d'analyse simplement posé, mais à la difficulté duquel Lieb [8] fait allusion à propos du problème similaire pour le gaz linéaire de bosons. Il s'agit de savoir si la fonction énergie possède une singularité à l'origine en fonction de la constante de couplage et, si oui, quelle est sa nature. Cette difficulté vient de l'impossibilité d'inverser simplement un opérateur intégral qui intervient constamment dans cette étude. Elle constitue aussi un troisième obstacle pour le calcul explicite du spectre des diverses excitations élémentaires.

Malgré une certaine richesse de ce modèle linéaire de particules en interaction – où l'on peut atteindre diverses propriétés comme l'énergie du fondamental, les spectres des premières excitations, la courbe de magnétisation à température nulle, et ceci à la fois pour les gaz répulsifs et attractifs de structures très différentes – malgré donc une certaine diversité de propriétés, nous n'avons pu développer davantage cette seconde partie. Il est certain que la difficulté sur l'énergie du fondamental doit être surmontable et que l'inversion des opérateurs intégraux peut être effectuée numériquement, à grand peine cependant, pour le voisinage de $V = 0$, qui est justement la région intéressante.

Les quelques résultats obtenus nous permettent-ils de comprendre les propriétés "physiques" du gaz attractif (paradoxalement plus simple à étudier que le gaz répulsif) ? Nous savons que ce gaz peut contenir un nombre arbitraire de paires de fermions liés dans l'état singulet ; disons que nous avons un gaz de "deuterons" à une dimension, dont les états seraient classés avec le spin isotopique.

L'interaction résiduelle entre les paires est attractive, mais trop faible pour permettre des états liés à un plus grand nombre de particules. C'est le principe d'exclusion qui empêche alors le "collapse" du gaz de bosons attractifs ainsi formé. La dynamique est telle que ce boson à une dimension se souvient qu'il est constitué de deux fermions et en conséquence, les paires s'excluent encore dans l'espace des impulsions. A faible densité, ces états liés d'extension spatiale $1/V$ bien inférieure à la distance moyenne, forment des particules composées presque indépendantes. Mais à haute densité ($k_0 \gg V$) elles s'interpénètrent mutuellement et l'on ne peut plus parler de particules composées dans l'espace ordinaire.

Ces paires se manifestent clairement dans les premiers états excités où elles constituent le support d'excitations indépendantes du type trou ou du type particule, avec cependant une loi de dispersion, linéaire à l'origine comme celle de phonons, et tout à fait semblable au spectre d'excitation d'un système de fermions sans interaction.

On remarque évidemment que la liaison de chaque paire au sein du milieu est due uniquement au potentiel interparticule capable en effet d'un seul état lié. L'existence de ces paires n'a rien à voir avec un phénomène de Cooper. Avec l'information, réduite il est vrai, que nous donne la fonction d'onde, nous ne pouvons déduire aucune corrélation particulière entre particules de moment opposé. Certes nous ne pouvons rien conclure quant à l'existence d'un paramètre d'ordre sans connaître la fonction de corrélation à deux corps et son éventuelle factorisation pour une séparation infinie, fonction pour l'instant hors d'atteinte. Bien que les conclusions rigoureuses de Hohenberg [25], concernant en particulier ce modèle linéaire, ne s'appliquent qu'à température finie, l'existence de tels paramètres d'ordre associés à des symétries brisées (conservation du nombre de particules, invariance par translation) paraît improbable à cet auteur, et nous n'en soupçonnons aucune raison d'existence à partir de la description partielle ici obtenue.

Le seul signe indicatif d'une instabilité de la surface de Fermi H.F. serait donc la non-analyticité de l'énergie du fondamental qui doit pouvoir être démontrée. La distribution de Fermi, c'est-à-dire la distribution des impulsions vraies, ne peut être déduite de la seule distribution des pseudo-impulsions ; il y faudrait la connaissance de la fonction de corrélation à une particule qui semble très difficile à atteindre.

Appendice A

Proposition I

Les notations étant celles de la section 4.2, le coefficient $A_\lambda\{P\}$ de la fonction d'onde dans le secteur σ_λ est donné par l'expression suivante :

$$A_\lambda\{P\} = A_0\{P\}x_{P_a P_1}x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{\lambda} A_0\{P(a\mu)\}x_{P_\mu P_1}x_{P_\mu P_2} \dots x_{P_\mu P_\lambda} \frac{1}{P_a - P_\mu} \quad (\text{A.1})$$

Preuve

Celle-ci se fait par récurrence sur λ en utilisant la formule de passage (3.8) du secteur $\sigma_{\lambda-1}$ au secteur σ_λ :

$$A_\lambda\{P\} = A_{\lambda-1}\{P\} \left[1 + \frac{1}{P_a - P_\lambda} \right] + A_{\lambda-1}\{P(a\lambda)\} \frac{1}{P_a - P_\lambda} \quad (\text{A.2})$$

L'égalité (A.1) est vraie pour $\lambda = 1$, car à l'aide de la formule (A.2) on obtient :

$$A_1\{P\} = A_0\{P\}x_{P_a P_\lambda} + A_0\{P(a1)\} \frac{1}{P_a - P_1} ;$$

supposant l'égalité (A.1) vraie jusqu'à l'ordre $(\lambda - 1)$ pour toute permutation P , la formule de passage (A.2) nous donne $A_\lambda\{P\}$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_\lambda\{P\} &= A_0\{P\}x_{P_a P_1}x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_{\lambda-1}} \cdot x_{P_a P_\lambda} & (\text{A.3}) \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\lambda-1} A_0\{P(a\mu)\}x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_{\lambda-1}} \frac{1}{P_a - P_\mu} \cdot x_{P_a P_\lambda} \\ &+ A_0\{P(a\lambda)\}x_{P_\lambda P_1}x_{P_\lambda P_2} \dots x_{P_\lambda P_{\lambda-1}} \frac{1}{P_a - P_\lambda} \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\lambda-1} A_0\{P(a\lambda)(a\mu)\}x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_{\lambda-1}} \frac{1}{P_\lambda - P_\mu} \cdot \frac{1}{P_a - P_\lambda} \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne de l'expression (A.3) nous avons :

$$A_0\{P(a\lambda)(a\mu)\} = A_0\{P(a\mu)(\lambda\mu)\}, \quad (\text{A.4})$$

or $(\lambda\mu)$ est une transposition entre variables antisymétriques de la colonne 1 et l'identité (4.5) permet d'écrire :

$$A_0\{P(a\lambda)(a\mu)\} = -A_0\{P(a\mu)\} \quad (\text{A.5})$$

Effectuons alors la somme de la seconde et de la quatrième ligne de l'expression (A.3), nous obtenons pour ces seuls termes

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} A_0\{P(a\mu)\}x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_{\lambda-1}} \left[\left(1 + \frac{1}{P_a - P_\lambda} \right) \frac{1}{P_a - P_\mu} - \frac{1}{P_\lambda - P_\mu} \frac{1}{P_a - P_\lambda} \right]$$

ou encore

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} A_0\{P(a\mu)\}x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_{\lambda-1}} x_{P_\mu P_\lambda} \frac{1}{P_a - P_\mu}. \quad (\text{A.6})$$

Cette dernière expression (A.6) ajoutée à la troisième ligne de la formule (A.3) nous donne la somme :

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} A_0\{P(a\mu)\} x_{P_\mu P_1} x_{P_\mu P_2} \dots x_{P_\mu P_\lambda} \frac{1}{P_a - P_\mu}$$

qui figure dans l'expression (A.1) ; enfin la première ligne de (A.3) est identique au terme en $A_0\{P\}$ de (A.1). La formule (A.1) est donc vraie à l'ordre λ , si elle l'est à l'ordre $(\lambda - 1)$, ce qui achève la preuve de la proposition I.

Appendice B

Proposition II

Définissant la somme

$$S_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\lambda} A_\mu\{P(a\mu)\} - A_0\{P\}, \tag{B.1}$$

on a l'égalité

$$\begin{aligned} S_\lambda = & -A_0\{P\} x_{P_a P_1} x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\lambda} \\ & + A_0\{P(a1)\} x_{P_1 P_a} x_{P_1 P_2} x_{P_1 P_3} \dots x_{P_1 P_\lambda} \\ & + A_0\{P(a2)\} x_{P_2 P_1} x_{P_2 P_a} x_{P_2 P_3} \dots x_{P_2 P_\lambda} \\ & + \dots \\ & + A_0\{P(a\lambda)\} x_{P_\lambda P_1} x_{P_\lambda P_2} \dots x_{P_\lambda P_{\lambda-1}} x_{P_\lambda P_a}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Dans le produit des λ facteurs x qui multiplie le terme $A_0\{P(a\mu)\}$, le terme exceptionnel $x_{P_\mu P_a}$ est écrit entre $x_{P_\mu P_{\mu-1}}$ et $x_{P_\mu P_{\mu+1}}$.

Preuve

Nous montrons l'égalité (B.2) par récurrence sur l'entier λ .

L'égalité (B.2) est vraie pour $\lambda = 1$. En effet,

$$S_1 = A_1\{P(a1)\} - A_0\{P\}$$

et, d'après la formule de passage (3.8),

$$S_1 = A_0\{P(a1)\} x_{P_1 P_a} + A_0\{P\} \frac{1}{P_1 - P_a} - A_0\{P\}$$

on obtient donc pour S_1

$$S_1 = -A_0\{P\} x_{P_a P_1} + A_0\{P(a1)\} x_{P_1 P_a}. \tag{B.3}$$

ce qui démontre la formule (B.2) pour $\lambda = 1$.

Supposons que celle-ci soit vraie jusqu'à l'ordre λ ; à l'aide de la proposition I, nous calculons $S_{\lambda+1}$ qui par définition est donnée par

$$S_{\lambda+1} = S_\lambda + A_{\lambda+1}\{P(a, \lambda + 1)\}. \tag{B.4}$$

Pour calculer $S_{\lambda+1}$, nous utilisons d'une part la formule (B.2) supposée vraie à l'ordre λ , qui nous donne S_λ , et d'autre part la formule (A.1) qui nous donne $A_{\lambda+1}$ dans le secteur $\sigma_{\lambda+1}$ pour toute permutation ; en particulier on obtient

$$A_{\lambda+1}\{P(a, \lambda + 1)\} =$$

$$\begin{aligned}
& A_0\{P(a, \lambda + 1)\}x_{P_{\lambda+1}P_1} \dots x_{P_{\lambda+1}P_\lambda}x_{P_{\lambda+1}P_a} \\
& + \sum_{\mu=1}^{\lambda} A_0\{P(a, \lambda + 1)(a\mu)\}x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_\lambda}x_{P_\mu P_a} \frac{1}{P_{(\lambda+1)} - P_\mu} \\
& + A_0\{P\}x_{P_a P_1}x_{P_a P_2} \dots x_{P_a P_\lambda} \frac{1}{P_{(\lambda+1)} - P_a}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Cette formule résulte de la seule application de l'égalité (A.1) au secteur $\sigma_{\lambda+1}$ et à la permutation $P(a, \lambda + 1)$. L'échange des indices P_a et $P(\lambda + 1)$ nous a amené à distinguer le dernier terme de la somme.

D'après (4.5), on remarque encore

$$A_0\{P(a, \lambda + 1)(a\mu)\} = A_0\{P(a\mu)(\mu, \lambda + 1)\} = -A_0\{P(a\mu)\} \tag{B.6}$$

Comme l'indique (B.4) ajoutons les termes correspondant au même coefficient $A_0\{P\}$, $A_0\{P(a\mu)\}$, ... dans les expressions (B.2) de S_λ et (B.5) de $A_{\lambda+1}$.

Nous obtenons pour le terme en $A_0\{P\}$

$$-A_0\{P\}x_{P_a P_1} \dots x_{P_a P_\lambda} + A_0\{P\}x_{P_a P_1} \dots x_{P_a P_\lambda} \frac{1}{P_{(\lambda+1)} - P_a}$$

c'est-à-dire

$$-A_0\{P\}x_{P_a P_1} \dots x_{P_a P_\lambda}x_{P_a P_{\lambda+1}}, \tag{B.7}$$

qui est justement le terme donné par la formule (B.2) à l'ordre $\lambda + 1$.

Nous obtenons pour le terme général en $A_0\{P(a\mu)\}$, $1 \leq \mu \leq \lambda$ l'expression suivante

$$\begin{aligned}
& A_0\{P(a\mu)\} \left[x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_\lambda} - x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_\lambda} \frac{1}{P_{\lambda+1} - P_\mu} \right] x_{P_\mu P_a} \\
& = A_0\{P(a\mu)\}x_{P_\mu P_1} \dots x_{P_\mu P_a} \dots x_{P_\mu P_\lambda}x_{P_\mu P_{\lambda+1}};
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Enfin, le terme en $A_0\{P(a, \lambda + 1)\}$ intervient seulement dans la première ligne de la formule (B.5) tel que le donnerait la formule (B.2) appliquée à l'ordre $(\lambda + 1)$. On reconnaît donc en les expressions (B.7) et (B.8) pour $1 \leq \mu \leq \lambda + 1$ l'ensemble des termes de $S_{\lambda+1}$ donnés par (B.2). La récurrence est donc établie.

Appendice C

Soit \mathcal{E}_{p+1} un ensemble de $(p + 1)$ indices distincts. Considérons deux suites de nombres z_j et u_j , $j \in \mathcal{E}_{p+1}$, et définissons les quantités $Y_j(\mathcal{E})$

$$Y_j(\mathcal{E}) \equiv \prod_{i \in \mathcal{E}} x_{ji}, \tag{C.1}$$

avec

$$x_{ji} = 1 + \frac{1}{u_j - u_i}, \tag{C.2}$$

formons la matrice carrée $M(\mathcal{E})$:

$$M_{ji}(\mathcal{E}) = -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E})}{u_j - u_i + 1}, \quad i, j \in \mathcal{E} \tag{C.3}$$

Proposition III

La solution du système homogène supposé de rang p :

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} M_{ji} \xi_j = 0, \quad i \in \mathcal{E}_{p+1}, \tag{C.4}$$

est donnée par la proposition

$$\xi_\alpha :: \det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{F}^\alpha)}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{F}^\alpha}, \quad \alpha \in \mathcal{E}_{p+1}, \tag{C.5}$$

où \mathcal{F}^α est l'ensemble d'indices $\mathcal{E}_{p+1} - \{\alpha\}$, le déterminant étant formé sur les indices de \mathcal{F}^α .

Preuve

On peut prendre comme solution ξ_α du système (C.4) le déterminant de la matrice M^α où l'on a remplacé dans M la colonne n° α par une colonne d'éléments égaux à 1, déterminant précédé du signe $(-)^\alpha$.

Soustrayons alors de toutes les lignes, la ligne α , on obtient pour ξ_α le déterminant d'ordre p dont la ligne générale d'indice i est la suivante

$$\xi_\alpha :: \left| \begin{array}{cccc} \frac{Y_1(\mathcal{E})}{u_1 - u_i + 1} - \frac{Y_1(\mathcal{E})}{u_1 - u_\alpha + 1}, & \frac{Y_2(\mathcal{E})}{u_2 - u_i + 1} - \frac{Y_2(\mathcal{E})}{u_2 - u_\alpha + 1}, & \dots, & \\ Y_i(\mathcal{E}) - z_i - \frac{Y_i(\mathcal{E})}{u_i - u_\alpha + 1}, & \dots, & \frac{Y_{p+1}(\mathcal{E})}{u_{p+1} - u_i + 1} - \frac{Y_{p+1}(\mathcal{E})}{u_{p+1} - u_\alpha + 1} \end{array} \right|, \tag{C.6}$$

où ne figure pas la colonne relative à l'indice α .

Ecrivons (C.6) sous la forme

$$\xi_\alpha :: \left| \begin{array}{cccc} \frac{Y_1(\mathcal{E})(u_i - u_\alpha)}{(u_1 - u_i + 1)(u_1 - u_\alpha + 1)}, & \frac{Y_2(\mathcal{E})(u_i - u_\alpha)}{(u_2 - u_i + 1)(u_2 - u_\alpha + 1)}, & \dots, & \\ -z_i + \frac{Y_i(\mathcal{E})(u_i - u_\alpha)}{(u_i - u_\alpha + 1)}, & \dots, & \frac{Y_{p+1}(\mathcal{E})(u_i - u_\alpha)}{(u_{p+1} - u_i + 1)(u_{p+1} - u_\alpha + 1)} \end{array} \right| \tag{C.7}$$

On ne change pas le déterminant (C.7) en divisant chaque ligne i par $u_i - u_\alpha$ et en multipliant chaque colonne par $u_1 - u_\alpha, u_2 - u_\alpha, \dots, u_{p+1} - u_\alpha$, on obtient

$$\xi_\alpha :: \left| \begin{array}{cccc} \frac{1}{u_1 - u_i + 1} \cdot \frac{Y_1(\mathcal{E})}{x_{1\alpha}}, & \frac{1}{u_2 - u_i + 1} \cdot \frac{Y_2(\mathcal{E})}{x_{2\alpha}}, & \dots, & \\ -z_i + \frac{Y_i(\mathcal{E})}{(x_{i\alpha})}, & \dots, & \frac{1}{(u_{p+1} - u_i + 1)} \frac{Y_{p+1}(\mathcal{E})}{x_{p+1,\alpha}} \end{array} \right| \tag{C.8}$$

or d'après la définition (C.1) des quantités $Y_i(\mathcal{E})$ on obtient $Y_i(\mathcal{E}) = x_{i\alpha} Y_i(\mathcal{F}^\alpha)$, ce qui permet d'écrire la proportion

$$\xi_\alpha :: \det \left| -z_i \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{F}^\alpha)}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{F}^\alpha}.$$

Appendice D

Nous reprenons les définitions (C.1), (C.2) et (C.3), et nous introduisons de plus p quantités arbitraires $v_a, 1 \leq a \leq p$, avec lesquelles nous formons les expressions :

$$x'_{ia} = 1 + \frac{1}{u_i - v_a}, \quad i \in \mathcal{E}_{p+1}, \quad 1 \leq a \leq p, \tag{D.1}$$

\mathcal{E}_{p+1} désigne un ensemble de $(p + 1)$ indices distincts. Nous considérons le polynôme des $(p + 1)$ variables $z_j, j \in \mathcal{E}_{p+1}$, ainsi défini

$$M(z_1, \dots, z_{p+1}) \equiv \det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}_{p+1}} \tag{D.2}$$

Si l'on appelle $1, 2, \dots, p + 1$, les indices de \mathcal{E}_{p+1} , on a

$$M(z_1, \dots, z_{p+1}) \equiv \det |M(\mathcal{E}_{p+1})|$$

où M est la matrice définie en (C.3).

Proposition IV

Si $z_i = \prod_{a=1}^p x'_{ia}, \forall i \in \mathcal{E}_{p+1}$, alors $M(z_1, \dots, z_{p+1})$ s'annule.

L'égalité $M(z_1, \dots) = 0$ est en fait une identité dans les $(p + 1)$ variables z_i et les p variables v_a .

Premier lemme

Le polynôme $M(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$ s'annule si tous les z sont égaux à 1.

Preuve

Il faut montrer

$$\det \left| -\delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}} = 0 ; \tag{D.3}$$

or ceci résulte de l'identité suivante

$$\sum_{j \in \mathcal{E}} \frac{Y_j(\mathcal{E})}{u_j - u_i + 1} = 1, \quad \text{pour } i \in \mathcal{E}. \tag{D.4}$$

La quantité Y_i est une fraction rationnelle en u_i dont les pôles sont les $u_j, j \neq i, j \subseteq \mathcal{E}$. Ces pôles peuvent être supposés simples puisque les u_j sont arbitraires et indépendants. Compte tenu du comportement pour $u_i = \infty$, on a donc la décomposition

$$Y_i = 1 + \sum_{j \neq i} \frac{\text{Résidu en } u_j}{u_i - u_j} ;$$

or

$$Y_i = \left(1 + \frac{1}{(u_i - u_j)} \right) \prod_{\ell \neq j, i} x_{i\ell}.$$

Le résidu en u_j vaut donc $\prod_{l \neq j, i} x_{jl} = \frac{Y_j}{x_{ji}}$ c'est-à-dire que nous obtenons

$$Y_i = 1 + \sum_{j \neq i} \frac{Y_j}{(u_i - u_j) x_{ji}},$$

c'est-à-dire l'identité (D.5).

Second lemme

Le polynôme $M(z_1, \dots, z_{p+1})$ s'annule identiquement lorsque l'on a simultanément pour tout $i \in \mathcal{E}$:

$$z_i = x'_{ia} = 1 + \frac{1}{u_i - v_a}, \tag{D.5}$$

où v_a est une variable.

Preuve

$M(x_{1a}, x_{2a}, \dots, x_{p+1,a})$ est une fraction rationnelle en v_a , dont les pôles sont ceux de x_{1a}, x_{2a}, \dots c'est-à-dire les pôles supposés simples

$$v_a = u_1, v_a = u_2, \dots, v_a = u_{p+1}.$$

Lorsque $v_a = \infty, z_i = 1, i \in \mathcal{E}$, et $M(1, 1, \dots, 1) = 0$ d'après le premier lemme. On a donc la décomposition suivante :

$$M(x_{1a}, x_{2a}, \dots) \equiv \sum_{j \in \mathcal{E}} \frac{R_j}{v_a - u_j}. \tag{D.6}$$

Il suffit de calculer le résidu R_j relatif au pôle u_j . A cause de la symétrie dans l'ensemble des indices, calculons R_j relatif au pôle u_1 .

D'après la définition (D.2), le pôle intervient dans le terme $z_1 = 1 + \frac{1}{u_1 - v_a}$ le résidu est donc le coefficient de $-z_1$ pour la valeur $v_a = u_1$ c'est-à-dire le mineur principal d'ordre p obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne du déterminant de $M(\mathcal{E})$, pour la valeur $v_a = u_1$; il suffit de remplacer $z_2 = x'_{2a}$ pour x_{21} et d'une façon générale z_j par x_{j1} ; on obtient alors comme résidu le déterminant d'ordre p que nous écrivons

$$\begin{vmatrix} Y_2(\mathcal{E}) - x_{21} & \frac{Y_3(\mathcal{E})}{u_3 - u_2 + 1} & \frac{Y_4(\mathcal{E})}{u_4 - u_2 + 1} & \dots \\ \frac{Y_2(\mathcal{E})}{u_2 - u_3 + 1} & Y_3(\mathcal{E}) - x_{31} & \frac{Y_4(\mathcal{E})}{u_4 - u_3 + 1} & \dots \\ \frac{Y_2(\mathcal{E})}{u_2 - u_4 + 1} & \frac{Y_3(\mathcal{E})}{u_3 - u_4 + 1} & Y_4(\mathcal{E}) - x_{41} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{D.7}$$

Appelons \mathcal{F}^1 l'ensemble d'indices $(2, 3 \dots, p + 1)$, c'est-à-dire l'ensemble \mathcal{E} dont on a ôté l'indice 1.

Nous avons, d'après la définition des Y ,

$$Y_j(\mathcal{E}) = x_{j1} Y_j(\mathcal{F}^1) ; \tag{D.8}$$

on peut alors dans le déterminant (D.8) mettre en facteur x_{21} dans la première colonne, x_{31} dans la seconde, etc. et il nous reste un résidu proportionnel à

$$\det \left| -\delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{F}^1)}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{F}^1} \tag{D.9}$$

construit sur l'ensemble d'indices $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E} - \{1\}$.

Mais d'après le premier lemme, formule (D.4), ce déterminant est nul, donc aussi le résidu R_1 .

De même $R_j = 0$, pour tout $j \in \mathcal{E}$, et d'après (D.7) :

$$M(x_{1a}, x_{2a}, \dots, x_{p+1, a}) = 0. \tag{D.10}$$

Le second lemme est donc démontré et peut être interprété comme un cas particulier de la proposition générale IV ; M s'annule quel que soit v_1 pour $v_2 = v_3 = \dots = v_p = \infty$. Ceci suggère la démonstration par récurrence de la proposition IV.

Supposons que M s'annule quel que soit v_1, v_2, \dots, v_k et $v_{k+1} = \dots = v_p = \infty$ avec $k < p$, c'est-à-dire :

$$M_{p+1}(z_1, \dots, z_{p+1}) = 0 \quad \text{pour} \quad z_i = \prod_{i \leq a \leq k-1} \left(1 + \frac{1}{u_i - v_a}\right), \quad i \in \mathcal{E}_{p+1} \tag{D.11}$$

Il suffira de montrer que

$$M_{p+1}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{p+1}) = 0,$$

avec

$$\zeta_i = z_i \left(1 + \frac{1}{u_i - v}\right), \tag{D.12}$$

pour que l'on puisse remplacer le groupe v_1, \dots, v_{k-1} par le groupe $v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v$.

Le déterminant $M(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{p+1})$ est une fraction rationnelle en v dont les pôles simples sont les $u_i, i \in \mathcal{E}$, et qui s'annule pour $v = \infty$ d'après l'hypothèse (D.12). Montrons, comme pour le second lemme, que le résidu d'un pôle quelconque, par exemple u_1 , est nul. Un tel résidu est proportionnel au mineur principal coefficient de z_1 , où l'on a posé $v = u_1$. On remplace donc dans ce mineur ζ_i par

$$z_i \left(1 + \frac{1}{u_i - u_1}\right) = z_i x_{i1} \tag{D.13}$$

pour $i = 2, 3, \dots, p + 1$.

Ecrivons ce mineur qui est un déterminant d'ordre p

$$\begin{vmatrix} Y_2(\mathcal{E}) - z_2 x_{21} & \frac{Y_3(\mathcal{E})}{u_3 - u_2 + 1} & \frac{Y_4(\mathcal{E})}{u_4 - u_2 + 1} & \dots \\ \frac{Y_2(\mathcal{E})}{u_2 - u_3 + 1} & Y_3(\mathcal{E}) - z_3 x_{31} & \frac{Y_4(\mathcal{E})}{u_4 - u_3 + 1} & \dots \\ \frac{Y_2(\mathcal{E})}{u_2 - u_4 + 1} & \frac{Y_3(\mathcal{E})}{u_3 - u_4 + 1} & Y_4(\mathcal{E}) - z_4 x_{41} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{D.14}$$

Après mise en facteur de x_{j1} dans chaque colonne j , il reste un facteur

$$\det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{F}^1)}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{F}^1} \tag{D.15}$$

formé sur l'ensemble d'indices $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E} - \{1\}$.

Ce déterminant est le polynôme $M_p(z_2, z_3, \dots, z_{p+1})$ formé sur l'ensemble de p indices \mathcal{F}^1 avec

$$z_i = \prod_{1 \leq a \leq k-1} \left(1 + \frac{1}{u_i - v_a}\right) \tag{D.16}$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence (D.12), $M_p(z_2, \dots, z_{p+1})$ s'annule dès que les z_i sont un produit de k' facteurs x'_{ia} avec $k' < p - 1$ or ici nous avons $k' = k - 1$, il suffit donc que $k < p$, ce qui est l'hypothèse (D.12).

Le résidu du pôle u_1 est donc nul et il en est de même pour les autres. On en déduit que la fraction rationnelle en v ,

$M_{p+1}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{p+1})$ est nulle quel que soit v , ce qui entraîne que $M_{p+1}(z_1, \dots, z_{p+1})$ s'annule lorsque les z_i sont un produit de $k \leq p$ facteurs

$$z_i = \prod_{1 \leq a \leq k} \left(1 + \frac{1}{u_i - v_a} \right)$$

quels que soient les u et les v . La proposition IV est donc démontrée.

En général cependant la quantité $M(z_1, \dots, z_{p+1})$ ne sera pas identiquement nulle pour

$$z_i = \prod_{1 \leq a \leq p+1} x'_{ia}. \tag{D.17}$$

Une forme développée en est donnée dans l'appendice G.

Appendice E

Considérons le système homogène déjà défini pour la proposition III formules (C.3) et (C.4), avec

$$M_{ij}(\mathcal{E}) = -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E})}{u_j - u_i + 1}, \tag{E.1}$$

$$Y_j(\mathcal{E}) = \prod_{i \in \mathcal{E}} x_{ji}$$

Le système s'écrit

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} M_{ij} \xi_j, \quad \text{avec } i \in \mathcal{E}_{p+1}. \tag{E.2}$$

Supposons que l'on choisisse les z_j de sorte que

$$z_j = \prod_{i \leq a \leq p} x'_{ja} = \prod_a \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right). \tag{E.3}$$

D'après la proposition IV, le déterminant du système (E.2) est nul et en général, d'après la remarque (D.18), la solution du système est donnée par la proportion (C.5) :

$$\xi_\alpha \ :: \ \det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{F}^\alpha)}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{F}^\alpha}. \tag{E.4}$$

Définissons la fonction d'une variable ζ par l'égalité

$$m(\zeta) = M(\zeta z_1, \zeta z_2, \dots, \zeta z_{p+1}) \tag{E.5}$$

où M est le déterminant de la matrice (E.1) formé sur :

$$\mathcal{E}_{p+1} = \{1, 2, \dots, p + 1\}.$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition V

La condition

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} Y_j(\mathcal{E}_{p+1}) \xi_j = 0$$

est équivalente à la condition

$$\frac{dm}{d\zeta} = 0 \quad \text{pour } \zeta = 1. \quad (\text{E.6})$$

Preuve

Nous nous plaçons dans l'hypothèse générale où les déterminants d'ordre p qui interviennent dans la solution (C.5) ou (E.4) ne sont pas tous nuls. En ce cas, la condition $\sum_j Y_j(\mathcal{E}) \xi_j = 0$ équivaut à annuler le déterminant bordé d'ordre $(p+2)$

$$D(\mathcal{E}_{p+2}) = \begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & M(\mathcal{E}_{p+1}) & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{p+1} & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Définissons l'ensemble $\mathcal{E}_{p+2} = \mathcal{E}_{p+1} + \{p+2\}$.

Nous avons donc une variable u supplémentaire

$$u_{p+2} = u.$$

Nous définissons d'après (C.1)

$$Y_j(\mathcal{E}_{p+2}) = Y_j(\mathcal{E}_{p+1}) \left(1 + \frac{1}{u_j - u} \right), \quad 1 \leq j \leq p+1$$

$$Y_{p+2}(\mathcal{E}_{p+2}) = Y(\mathcal{E}_{p+2}) = \prod_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} \left(1 + \frac{1}{u - u_j} \right) \quad (\text{E.8})$$

et

$$z_{p+2} = \prod_{a=1}^p \left(1 + \frac{1}{u - v_a} \right) \quad (\text{E.9})$$

en gardant

$$z_j = \prod_{a=1}^p \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right) \quad 1 \leq j \leq p+1.$$

D'après la proposition IV on a

$$\det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_{p+2})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}_{p+2}} = 0 \quad (\text{E.10})$$

C'est une identité en u . Multiplions la dernière ligne et la dernière colonne par u et regardons le comportement des différents éléments au voisinage de $u = \infty$.

$$\begin{array}{lcl} Y_j(\mathcal{E}_{p+2}) & \rightarrow & Y_j(\mathcal{E}_{p+1}) \\ z_{p+2} & \rightarrow & 1 \\ & & Y_{p+2} \rightarrow 1 \end{array}$$

Les éléments de la dernière colonne tendent vers 1, les éléments de la dernière ligne vers les $Y_j(\mathcal{E}_{p+1})$ sauf l'élément $(p+2, p+2)$ qui tend vers l'infini ; à cet élément près, on retrouve les éléments du tableau (E.7). Développant alors le déterminant $D(\mathcal{E}_{p+2})$ par rapport aux éléments de la dernière ligne, on obtient

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} Y_j(\mathcal{E}_{p+1}) \xi_j = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 (z_{p+2} - Y_{p+2}) \det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_{p+2})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}_{p+1}} \tag{E.11}$$

où le déterminant qui figure au second membre est d'ordre $p+1$: c'est le mineur relatif à l'élément $(p+2, p+2)$ de $D(\mathcal{E}_{p+2})$.

Examinons l'égalité (E.11) :

D'après (E.9) et (E.8)

$$\begin{aligned} z_{p+2} &= 1 + \frac{p}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right), \\ Y_{p+2} &= 1 + \frac{p+1}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right); \end{aligned} \tag{E.12}$$

or nous savons, d'après la condition $\det M(\mathcal{E}_{p+1}) = 0$, que

$$\det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_{p+1})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}_{p+1}} = 0;$$

on a donc

$$\begin{aligned} &\det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_{p+2})}{u_j - u_i + 1} \right|_{\mathcal{E}_{p+1}} \\ &\equiv \det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_{p+1})}{u_j - u_i + 1} \left(1 + \frac{1}{u_j - u}\right) \right|_{\mathcal{E}_{p+1}} \\ &= O\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned} \tag{E.13}$$

Rassemblant les équivalences (E.11), (E.12) et (E.13), on a les égalités successives

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} Y_j(\mathcal{E}_{p+1}) \xi_j = \text{coefficient de } \frac{1}{u} \text{ du dterminant(E.13)}$$

$$\begin{aligned} \text{au voisinage de } u = \infty &= \sum_{j \in \mathcal{E}_{p+1}} z_j \times \text{Mineur principal } (j, j) \text{ de } M(\mathcal{E}_{p+1}) \\ &= \sum_j z_j \frac{\partial M}{\partial z_j} = \frac{dm}{d\zeta} |_{\zeta=1}. \end{aligned} \tag{E.14}$$

Appendice F

Proposition VI

La condition

$$\frac{dm}{d\zeta} = 0 \quad \text{pour } \zeta = 1, \tag{F.1}$$

est équivalente à l'existence d'une solution non triviale pour le système homogène aux $(p + 1)$ indéterminées w_a et w :

$$\sum_{1 \leq a \leq p} \frac{w_a}{(u_i - v_a)(u_i - v_a + 1)} - w = 0, \quad i \in \mathcal{E}_{p+1}. \tag{F.2}$$

Preuve

D'après la définition (E.5) de $m(\zeta)$, l'équation (F.1) est équivalente à

$$\sum_{i \in \mathcal{E}_{p+1}} z_i \frac{\partial M}{\partial z_i} = 0, \tag{F.3}$$

avec

$$z_i = \prod_{1 \leq a \leq p} x'_{ia}, \quad M(z_1, \dots, z_{p+1}) = 0. \tag{F.4}$$

Considérons l'équation (F.4) comme celle d'une hypersurface en coordonnées cartésiennes $(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$. La proposition IV nous donne la paramétrisation de cette hypersurface à p dimensions

$$z_j = \prod_{a=1}^p \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right), \quad j \in \mathcal{E}_{p+1} \tag{F.5}$$

L'équation (F.3) est celle du contour apparent de la surface $M = 0$, vu de l'origine des coordonnées $\{z_i = 0\}$. Il existe donc un vecteur tangent à l'hypersurface de composante δz_i tel que

$$\frac{\delta z_1}{z_1} = \frac{\delta z_2}{z_2} = \dots = \frac{\delta z_{p+1}}{z_{p+1}} = \delta t. \tag{F.6}$$

Inversement, les équations ci-dessus caractérisent le contour apparent. En terme des paramètres v_a , on obtient

$$\sum_{1 \leq a \leq p} \frac{\delta v_a}{(u_i - v_a)(u_i - v_a + 1)} = \delta t. \tag{F.7}$$

Il suffit de poser $\delta v_a = w_a, \delta t = w$, pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes (F.2).

L'équation du contour apparent s'obtient en éliminant les w_a et w c'est-à-dire en écrivant que le déterminant du système (F.7) est nul.

Appendice G

La proposition IV énonce que la quantité

$$\det \left| -z_j \delta_{ij} + \frac{Y_j(\mathcal{E}_j)}{u_j - u_i + 1} \right| \equiv M(z_1, z_2, \dots, z_p)$$

s'annule dès que les z_j sont égaux au produit des $p - 1$ facteurs

$$z_j = \prod_{a=1}^{p-1} x'_{ja} \quad \text{avec} \quad x'_{ja} = 1 + \frac{1}{u_j - v_a}.$$

En général le déterminant $M(z_1, z_2, \dots, z_p)$ ne sera pas nul pour

$$z_j = \prod_{a=1}^p \left(1 + \frac{1}{u_j - v_a} \right).$$

Nous donnons ici une expression développée de M , valable dans ce dernier cas.

a) M est une fraction rationnelle de v_1 dont les pôles simples sont les u_i , qui s'annule à $l'∞$ d'après la proposition IV ; on a donc le développement :

$$M \equiv \sum_{j=1}^p \frac{R_j}{v_1 - u_j} \tag{G.1}$$

R_j est le résidu du pôle $v_1 = u_j$, c'est donc le mineur principal (j, j) où l'on a posé $v_1 = u_j$, que multiplie $\zeta_j \equiv \prod_{2 \leq a \leq p} x'_{ja}$; or, si l'on pose $v_1 = u_j$, l'on obtient $z_\ell = x_{\ell j} \zeta_\ell$ et $Y_\ell(\mathcal{E}_p) = x_{\ell j} Y_\ell(\mathcal{E}_p - \{j\})$ pour tout ℓ différent de j .

Dans chaque colonne ℓ de de ce mineur (jj) , la quantité $x_{\ell j}$ est en facteur et nous obtenons

$$R_j = \prod_{a=2}^p x'_{ja} \prod_{\ell \neq j} x_{\ell j} M(\mathcal{E}_p - \{j\})(\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_p)$$

où intervient dans ce résidu R_j le déterminant d'ordre $p - 1$, formé sur le groupe d'indices $\mathcal{E}_p - \{j\}$, fonction de $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_p$ avec

$$\zeta_j = \prod_{a=2}^p x'_{ja} ;$$

on a donc : $M(\mathcal{E}_p)(z_1, z_2, \dots, z_p) =$

$$\sum_j \frac{1}{v_1 - u_j} \prod_{a=2}^p x'_{ja} \prod_{\ell \neq j} x_{\ell j} M(\mathcal{E}_p - \{j\})(\zeta_2, \dots, \zeta_p). \tag{G.2}$$

La formule (G.2) est une formule récurrente qui détermine un déterminant d'ordre à l'aide des déterminants du même type d'ordre $(p - 1)$.

L'application itérée de la formule (G.2) nous donne le développement final :

$$M(\mathcal{E}_p) = \sum_R \left[\frac{1}{v_1 - u_{R_1}} \frac{1}{v_2 - u_{R_2}} \dots \frac{1}{v_p - u_{R_p}} \right. \\ \left. \times \prod_{1 \leq j < a \leq p} x'_{R_j, a} \prod_{1 \leq j < \ell \leq p} x_{R\ell, R_j} \right]. \tag{G.3}$$

La somme porte sur les $p!$ permutations R des indices $1, 2, \dots, p$ et pour chaque terme, les produits sont effectués sur les deux indices des x' et des x .

Corollaire

$$\det \left| s_i \delta_{ij} + \frac{1}{u_i - u_j} \right| = \text{perm} \left| \frac{1}{u_i - v_a} \right|$$

avec

$$s_i = \sum_{j \in \mathcal{E}_p} \frac{1}{u_i - u_j} - \sum_a \frac{1}{u_i - v_a}. \tag{G.4}$$

Pour le prouver, il suffit d'effectuer sur les deux membres de l'égalité (G.3) la transformation

$$u_i \rightarrow \frac{u_i}{V} \quad v_a \rightarrow \frac{v_a}{V}$$

et d'identifier dans les deux membres les termes dominants en V^p au voisinage de $V = 0$. On donne aussi une démonstration directe (proposition XI).

Appendice H

Les propositions A et B sont équivalentes :

a) Il existe $(p + 1)$ indéterminées en toutes nulles, w_a et w , telles que la fraction rationnelle en u

$$G(u) \equiv \sum_{a=1}^p \frac{w_a}{(u - v_a)(u - v_a + 1)} - w$$

s'annule pour tous les u_i , $1 \leq i \leq N$, $N = 2p$.

b) Les p relations suivantes lient les $N = 2p$ nombres u_i et les p nombres v_a .

$$\prod_{j=1}^N \frac{u_j - v_a}{u_j - v_a + 1} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^p \frac{v_a - v_b + 1}{v_a - v_b - 1}. \quad (\text{H.1})$$

$G(u)$ est le quotient de deux polynômes de degré $2p$. Le polynôme ou numérateur a pour zéros les $2p$ nombres u_i . La fraction rationnelle

$$\prod_{j=1}^N (u - u_j) : \prod_{a=1}^p (u - v_a)(u - v_a + 1)$$

admettra donc un développement du type $G(u)$ si et seulement si les résidus des pôles v_a et $(1 - v_a)$ sont opposés. On en déduit les p relations nécessaires et suffisantes

$$\frac{\prod_{j=1}^N (v_a - u_j)}{\prod_b (v_a - v_b)(v_a - v_b + 1)} = \frac{\prod_{j=1}^N (-1 + v_a - u_j)}{\prod_b (v_a - v_b - 1)(v_a - v_b)},$$

c'est-à-dire les relations (H.1).

On peut écrire les relations (H.1) en fonction des k et des q , d'après les définitions (6.3) et (6.8)

$$u_i = \frac{i}{V} k_j, \quad v_a = \frac{1}{2} + \frac{i}{V} q_a,$$

pour obtenir

$$\prod_{j=1}^N \frac{q_a - k_j - \frac{iV}{2}}{q_a - k_j + \frac{iV}{2}} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\bar{v}} \frac{q_a - q_b - iV}{q_a - q_b + iV} \quad (\text{H.2})$$

avec $N = 2\bar{v}$

Appendice I

Proposition IX

Le coefficient $c(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$,

$$c(\mathcal{F}) \equiv c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) \equiv \det \left| -\bar{z}_j \delta_{j\ell} + \frac{\bar{Y}_\ell(\mathcal{F})}{u_\ell - u_j + 1} \right|_{\mathcal{F}}$$

où les nombres \bar{z}_j sont donnés par l'égalité

$$\bar{z}_j = \prod_a \left(1 - \frac{1}{u_j - \bar{v}_a} \right),$$

est une fraction rationnelle de u_α , nulle à l'infini, dont les pôles simples sont $-\bar{v}_a$, $1 \leq a \leq \bar{\nu}$, avec les résidus

$$R_a = \prod_{b \neq a} \left(1 - \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) \prod_{\ell \in \mathcal{F}^a} \left(1 - \frac{1}{u_\ell + \bar{v}_a} \right) [c(\beta\gamma \dots \delta)]_{\bar{v}_a = \infty} \quad (I.1)$$

\mathcal{F} désigne l'ensemble de $\bar{\nu}$ indices $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta)$; \mathcal{F}^α désigne l'ensemble $\mathcal{F} - (\alpha)$.

Preuve

Ecrivons le déterminant qui définit le coefficient $c(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$

$$c(\alpha\beta \dots \delta) = \bar{Y}_\alpha \bar{Y}_\beta \dots \bar{Y}_\delta \begin{vmatrix} 1 - \frac{\bar{z}_\alpha}{\bar{Y}_\alpha} & \frac{1}{u_\alpha - u_\beta + 1} & \frac{1}{u_\alpha - u_\gamma + 1} & \dots \\ \frac{1}{u_\beta - u_\alpha + 1} & 1 - \frac{\bar{z}_\beta}{\bar{Y}_\beta} & \frac{1}{u_\beta - u_\gamma + 1} & \dots \\ \frac{1}{u_\gamma - u_\alpha + 1} & \frac{1}{u_\gamma - u_\beta + 1} & 1 - \frac{\bar{z}_\gamma}{\bar{Y}_\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (I.2)$$

et examinons la dépendance dans la variable u_α . Le coefficient $c(\mathcal{F})$ est évidemment une fraction rationnelle de u_α qui tend vers zéro à l'infini. En effet les \bar{Y} restent finis et tous les éléments de la première ligne tendent vers zéro :

$$u_\alpha \rightarrow \infty \quad \bar{z}_\alpha \rightarrow 1 \quad \bar{Y}_\alpha \rightarrow 1.$$

Quels sont les pôles possibles *a priori* ?

- a) $u_\alpha = u_\beta \pm 1, \quad \beta \in \mathcal{F}^\alpha$
- b) $u_\alpha = u_\beta, \quad -$
- c) $u_\alpha = -\bar{v}_a \quad 1 \leq a \leq \bar{\nu}.$

a) $u_\alpha = u_\beta + 1$ n'est pas un pôle. En effet le coefficient \bar{Y}_α contient en facteur $1 + \frac{1}{u_\beta - u_\alpha}$

qui s'annule. $u_\alpha = u_\beta - 1$ n'est pas un pôle, à cause du facteur $1 + \frac{1}{u_\alpha - u_\beta}$ dans \bar{Y}_β .

b) $u_\alpha = u_\beta$ n'est pas un pôle.

En effet, pour $u_\alpha \sim u_\beta$, $1 - \frac{\bar{z}_\alpha}{\bar{Y}_\alpha} \sim 1$. Il suffit alors de soustraire la ligne β de la ligne α , puis la colonne β de la colonne α , pour mettre en facteur $(u_\alpha - u_\beta)^2$ dans le déterminant : ce facteur compense le pôle double provenant du terme $\bar{Y}_\alpha \bar{Y}_\beta$.

c) Il reste donc les seuls pôles possibles qui sont ceux de $\bar{z}_\alpha : -v_a$.

Calculons le résidu R_a du pôle $\frac{1}{u_\alpha + \bar{v}_a}$. Introduisons les quantités ainsi définies

$$\begin{aligned} \bar{z}_\alpha &= \bar{\zeta}_\alpha \left(1 - \frac{1}{u_\alpha + \bar{v}_a} \right) \\ \bar{z}_\beta |_{u_\alpha = -\bar{v}_a} &= \bar{\zeta}_\beta \left(1 - \frac{1}{u_\beta + \bar{v}_a} \right), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Le résidu vaut donc

$$R_a = \bar{\zeta}_\alpha \times \text{Mineur} (\alpha, \alpha) |_{u_\alpha = -\bar{v}_a}$$

or

$$\bar{\zeta}_a \Big|_{u_\alpha = -\bar{v}_a} = \prod_{b \neq a} \left(1 - \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right).$$

D'autre part,

$$\frac{\bar{z}_\beta}{\bar{Y}_\beta(\mathcal{F})} \Big|_{u_\alpha = -\bar{v}_a} = \frac{\bar{\zeta}_\beta}{\bar{Y}_\beta(\mathcal{F}^\alpha)};$$

D'où l'on réduit finalement le résidu :

$$R_a = \prod_{b \neq a} \left(1 - \frac{1}{\bar{v}_b - \bar{v}_a} \right) \prod_{j \in \mathcal{F}^\alpha} \left(1 - \frac{1}{u_j + \bar{v}_a} \right) [c(\beta\gamma \dots \delta)]_{v_a = \infty}.$$

Appendice J

Proposition X

La fraction rationnelle de u_α

$$\Gamma(u_\alpha) = z_\alpha c(\alpha\beta\gamma \dots \delta)$$

admet la décomposition en éléments simples

$$\Gamma(u_\alpha) = \sum_{a=1}^{\bar{v}} \frac{1}{u_\alpha - v_a} \prod_{b \neq a} \left(1 + \frac{1}{v_a - v_b} \right) [c(\beta\gamma \dots \delta)]_{v_a = \infty} \tag{J.1}$$

Preuve

Ecrivons le produit $z_\alpha c(\alpha\beta \dots \delta)$

$$\equiv \left(1 + \frac{1}{u_\alpha - v_1} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{u_\alpha - v_{\bar{v}}} \right) \begin{vmatrix} -\bar{z}_\alpha + \bar{Y}_\alpha & \frac{\bar{Y}_\beta}{u_\alpha - u_\beta + 1} & \frac{\bar{Y}_\gamma}{u_\alpha - u_\gamma + 1} & \dots \\ \frac{\bar{Y}_\alpha}{u_\alpha - u_\alpha + 1} & -\bar{z}_\beta + \bar{Y}_\beta & \frac{\bar{Y}_\gamma}{u_\beta - u_\gamma + 1} & \dots \\ \frac{\bar{Y}_\alpha}{u_\gamma - u_\alpha + 1} & \frac{\bar{Y}_\beta}{u_\beta - u_\alpha + 1} & -\bar{z}_\gamma + \bar{Y}_\gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

où le déterminant est construit sur les indices de $\mathcal{F} = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$.

$\Gamma(u_\alpha)$ est une fraction rationnelle en u_α nulle à l'infini.

Les valeurs $u_\beta, u_\beta \pm 1, \beta \in \mathcal{F}^\alpha$ ne sont pas des pôles (voir proposition IX). Les valeurs $-\bar{v}_a, 1 \leq a \leq \bar{v}$, ne sont pas des pôles à cause du facteur en tête du déterminant. Il reste donc les seuls possibles en $u_\alpha = v_a$.

Calculons le résidu R_1 du pôle v_1 . On trouve

$$R_1 = \prod_{b \neq 1} \left(1 + \frac{1}{v_1 - v_b} \right) \times \text{déterminant} \Big|_{u_\alpha = v_1}$$

Il s'agit de calculer la valeur du déterminant suivant pour $u_\alpha = v_1$

$$\begin{vmatrix} \bar{Y}_\alpha & \frac{\bar{Y}_\beta}{u_\alpha - u_\beta + 1} & \frac{\bar{Y}_\gamma}{u_\alpha - u_\gamma + 1} & \dots \\ \frac{\bar{Y}_\alpha}{u_\beta - u_\alpha + 1} & -\bar{z}_\beta + \bar{Y}_\beta & \frac{\bar{Y}_\gamma}{u_\beta - u_\gamma + 1} & \dots \\ \frac{\bar{Y}_\alpha}{u_\gamma - u_\alpha + 1} & \frac{\bar{Y}_\beta}{u_\gamma - u_\beta + 1} & -\bar{z}_\gamma + \bar{Y}_\gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

on met un facteur $\bar{Y}_\alpha \bar{Y}_\beta \dots \bar{Y}_\delta$, puis l'on retranche la première colonne de toutes les autres, on retranche ensuite la première ligne de toutes les autres et l'on obtient le déterminant $(\bar{v} - 1)$ construit sur l'ensemble d'indices $\beta, \gamma, \dots, \delta$ ou \mathcal{F}^α , c'est-à-dire :

$$\det \left| -\bar{z}_j \frac{-u_\alpha + u_{j+1}}{-u_\alpha + u_j} \delta_{j\ell} + \frac{\bar{Y}_j(\mathcal{F}^\alpha)}{u_\ell - u_j + 1} \right|_{\mathcal{F}^\alpha}$$

or, pour $u_\alpha = v_1$ on a

$$\begin{aligned} \bar{z}_j \left(\frac{1 + u_j - v_1}{u_j - v_1} \right) &= \bar{z}_j \left(1 - \frac{1}{u_j + \bar{v}_1} \right)^{-1} \\ &= \bar{z}_j \Big|_{\bar{v}_1 = \infty}. \end{aligned}$$

La valeur du déterminant pour $u_\alpha = v_1$ est donc le coefficient $[c(\alpha\gamma \dots \delta)]_{\bar{v}_1 = \infty}$. La proposition X est donc démontrée.

On a le corollaire suivant :

$$\lim_{u_\alpha \rightarrow \infty} u_\alpha c(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = \sum_a \prod_{b \neq a} \left(1 + \frac{1}{v_a - v_b} \right) [c(\beta\gamma \dots \delta)]_{v_a} = \infty.$$

Pour le prouver, il suffit de multiplier les deux membres de l'identité (J.1) par u_α et de passer à la limite $u_\alpha \rightarrow \infty$.

Appendice K

Proposition XI

Nous avons l'identité suivante entre deux fractions rationnelles des p paramètres $u_i, 1 \leq i \leq p$ et des p variables $v_a, 1 \leq a \leq p$:

$$F_p(v_1 v_2 \dots v_p) \equiv \det \left| s_i \delta_{ij} + \frac{1}{u_i - u_j} \right|_p \equiv \text{perm} \left| \frac{1}{u_i - v_a} \right|_p \tag{K.1}$$

Dans le premier membre de l'identité figure un déterminant d'ordre p et dans le second membre un permanent du même ordre.

Les s_i sont ainsi définis

$$s_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{u_i - u_j} - \sum_{1 \leq a \leq p} \frac{1}{u_i - v_a} \quad (\text{K.2})$$

Nous remarquons tout de suite que F_p est une fraction rationnelle complètement symétrique dans les u , et dans les v . Nous notons $F_p(v_1 v_2 \dots v_k)$ la fonction $F_p(v_1 v_2 \dots v_p) |_{v_a = \infty, a > k}$.

Les v ne figurant que dans les éléments diagonaux s_i , faire $v_a = \infty$ revient à supprimer le terme $(u_i - v_a)^{-1}$ dans s_i .

Nous montrons par une double récurrence sur p et sur k le lemme :

$$F_p(v_1 v_2 \dots v_k) \equiv 0 \quad \text{pour } k < p \quad (\text{K.3})$$

Supposons la proposition vraie jusqu'à l'ordre $(p-1)$ et montrons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre p .

En effet $F_p(v_1 \dots v_k)$ est une fraction rationnelle dans la dernière variable v_k dont les pôles simples sont les nombres u_i $1 \leq i \leq p$.

On a donc la décomposition en éléments simples

$$F_p(v_1 v_2 \dots v_k) \equiv \sum_j \frac{R_j}{v_k - u_j} + F_p(v_1 v_2 \dots v_{k-1}).$$

Calculons le résidu R_1 , par exemple. Manifestement R_1 est égal au premier mineur principal du déterminant pour la valeur $v_k = u_1$. Chaque quantité s_i devient

$$s_i = \sum_{\substack{j \geq 2 \\ j \neq i}} \frac{1}{u_i - u_j} - \sum_{a=1}^{k-1} \frac{1}{u_i - v_a}$$

On constate donc que ce mineur pour $v_k = u_1$ est le déterminant d'ordre $(p-1)$, $F_{p-1}(v_1 \dots v_{k-1})$, construit avec les paramètres u_i , $i \geq 2$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $k-1 < p-1$ et par conséquent

$$F_{p-1}(v_1 v_2 \dots v_{k-1}) = 0$$

Le résidu R_1 est donc nul et de la même façon tous les résidus R_j sont nuls. On en déduit

$$F_p(v_1 v_2 \dots v_k) = F_p(v_1 v_2 \dots v_{k-1}), \quad \text{si } k < p.$$

Il en résulte que $F_p(v_1 v_2 \dots v_k)$ ne dépend pas des v et vaut identiquement zéro comme on le voit en ajoutant à la première colonne du déterminant $F_p |_{v_a = \infty, \forall a}$ la somme des autres colonnes. Le lemme (K.3) est donc démontré.

Pour démontrer l'identité (K.1), nous remarquons que la fraction rationnelle $F_p(v_1 v_2 \dots v_p)$ admet la décomposition

$$F_p(v_1 \dots v_{p-1} v_p) = \sum_j \frac{R_j}{v_p - u_j} + F_p(v_1 \dots v_{p-1}).$$

D'après le premier lemme $F_p(v_1 \dots v_{p+1}) = 0$. Calculons le résidu R_i . R_i est le mineur principal d'ordre i pour $v_p = u_i$. On constate donc que R_i est la fonction $F_{p-1}(v_1 \dots v_{p-1})$ construit sur les paramètres u_j avec $j \neq i$.

D'où l'on déduit l'identité

$$F_p \{u_1 u_2 \dots u_p\} = \sum_j \frac{1}{v_p - u_j} F_{p-1} \{u_1 u_2 \dots u_i \dots u_p\}.$$

Par application répétée de cette formule on obtient le résultat annoncé.

Appendice L

Proposition XII

Si les N quantités u_i et les ν quantités v_a vérifient les équations

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i - v_a} = 2 \sum_{\substack{b \\ b \neq a}} \frac{1}{v_b - v_a}, \quad 1 \leq a \leq \nu.$$

On a l'égalité

$$\sum_{\alpha=\nu}^N c(u_1 u_2 \dots u_{\nu-1} u_\alpha) = 0 \tag{L.1}$$

avec la définition des coefficients c

$$(u_1 u_2 \dots u_\nu) = \left| \begin{matrix} + & + \\ u_i - v_a \end{matrix} \right|_\nu \quad (\text{perm } |A| \equiv |A|)$$

Preuve

Il nous faut montrer l'égalité

$$\sum_{i=\nu}^N \left| \frac{1}{u_1 - v_a} \frac{1}{u_2 - v_a} \dots \frac{1}{u_{\nu-1} - v_a} \frac{1}{u_i - v_a} \right| = 0 \tag{L.2}$$

où la notation met en évidence la ligne typique n° a du permanent d'ordre ν .

Compte-tenu de notre hypothèse ceci revient à montrer l'égalité suivante

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left| \frac{1}{u_1 - v_a} \dots \frac{1}{u_i - v_a} \frac{1}{u_i - v_a} \dots \frac{1}{u_{\nu-1} - v_a} \right| = 2 \sum_{b=1}^{\nu} \left| \frac{1}{u_1 - v_a} \dots \frac{1}{u_{\nu-1} - v_a} \frac{1}{v_b - v_a} \right| \tag{L.3}$$

où il est convenu de placer 0 dans le permanent au lieu du terme " $\frac{1}{v_b - v_a}$ " pour $a = b$.

Développant alors chaque permanent du premier membre de (L.3) suivant les éléments des deux colonnes identiques, on obtient :

$$\sum_{a,b} \sum_i \frac{1}{u_i - v_a} \frac{1}{u_i - v_b} \left| \frac{1}{u_j - v_e} \right|_{\substack{e \neq a, b \\ j \neq i, \nu}} \tag{L.4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{a, b}' \sum_i \frac{1}{v_a - v_b} \left(\frac{1}{v_b - u_i} - \frac{1}{v_a - u_i} \right) \left| \frac{1}{u_j - v_e} \right| \\
 &= \sum_{a, b}' \sum_i \frac{1}{v_a - v_b} \frac{1}{u_i - v_a} \left| \frac{1}{u_j - v_e} \right|_{\substack{e \neq a, b \\ j \neq i, \nu}} + \sum_{a, b}' \sum_i \frac{1}{v_b - v_a} \frac{1}{u_i - v_b} \left| \frac{1}{u_j - v_e} \right|_{\substack{e \neq a, b \\ j \neq i, \nu}}
 \end{aligned}$$

Considérant seulement la première ligne du second membre de (L.4) on effectue la somme sur l'indice b qui donne

$$\sum_{a, i} \frac{1}{u_i - v_a} \left| \frac{1}{u_1 - v_b} \cdots \frac{1}{u_{i-1} - v_b} \frac{1}{u_{i+1} - v_b} \cdots \frac{1}{u_{\nu-1} - v_b} \frac{1}{v_a - v_b} \right|$$

et ensuite sur l'indice i pour obtenir

$$\sum_a \left| \frac{1}{u_1 - v_b} \cdots \frac{1}{u_{\nu-1} - v_b} \frac{1}{v_a - v_b} \right|. \tag{L.5}$$

De même, la seconde ligne du second membre de (L.4) donne une contribution identique à l'expression (L.5), d'où dérive le second membre de l'équation (L.3) avec le facteur 2.

Appendice M

Proposition XIII

On se donne un polynôme Q de degré N dont les zéros sont tous simples. Le nombre de polynômes P de degré ν dont les zéros soient tous simples, tels que $QP'' - Q'P'$ soit divisible par P , est en général précisément égal à

$$g = C_\nu^N - C_{\nu-1}^N \tag{M.1}$$

Preuve

Nous partons du résultat suivant dû à Heine [16] et cité par Szégö [17]. Il existe en général exactement $C_\nu^{N+\nu-2}$ polynômes P de degré ν tels que $AP'' + BP'$ soit divisible par P , où A et B sont deux polynômes de degré N et $N-1$ respectivement. Si nous avons eu le signe $+$ au lieu du signe $-$, c'est-à-dire $A \equiv Q, B \equiv Q'$, le comptage et la caractérisation de tous les polynômes P pouvait se faire très simplement en utilisant une méthode variationnelle due à Stieljes, on aurait exactement $C_\nu^{N+\nu-2}$ polynômes P dont les zéros sont réels et simples (comme ceux de Q). Mais dans notre cas les zéros peuvent être doubles et coïncident alors nécessairement avec certains zéros de Q comme on l'a montré au paragraphe 10.4. Notre problème est justement de compter les seules solutions P dont les zéros soient tous simples.

Supposons que P ait au moins p racines doubles qui sont donc d'après (10.4) p racines de Q :

$$\begin{aligned}
 Q &\equiv UQ_1, \\
 P &\equiv U^2P_1,
 \end{aligned} \tag{M.2}$$

où U est un diviseur quelconque de Q de degré p .

Nous avons par hypothèse

$$QP'' - Q'P' - RP \equiv 0 \quad (\text{M.3})$$

On en déduit d'après (M.2)

$$P_1''Q + P_1'(3U'Q_1 - UQ_1') - R_1P_1 \equiv 0 \quad (\text{M.4})$$

D'après le résultat de Heine déjà cité, il existe en général $\mathcal{M}_p = C_{\nu-2p}^{N+\nu-2p-2}$ solutions P_1 à l'identité (M.4), pour chaque U de degré p . \mathcal{M}_p est donc le nombre de polynômes P de degré ν ayant au moins p racines doubles prescrites.

Appelons \mathcal{N}_p le nombre de solutions P de (M.3) ayant exactement p racines doubles prescrites. Il est aisé d'exprimer \mathcal{M}_p en fonction des \mathcal{N} , puisque les autres racines doubles de P sont à choisir parmi les $(N-p)$ zéros restant de Q .

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &= \mathcal{N}_p + (N-p)\mathcal{N}_{p+1} + \frac{(N-p)(N-p-1)}{2}\mathcal{N}_{p+2} + \dots \\ &= \sum_{r \geq 0} C_r^{N-p} \mathcal{N}_{p+r} \end{aligned} \quad (\text{M.5})$$

Or, nous cherchons le nombre des polynômes P sans racines doubles qui est justement \mathcal{N}_0 ; il suffit alors d'inverser le système (M.5) et pour cela nous utilisons l'identité suivante

$$\sum_{p \geq 0} (-)^p C_{\nu-2p}^{N+\nu-2p-2} C_p^N \equiv C_\nu^N - C_{\nu-1}^N = g \quad (\text{M.6})$$

Cette identité se démontre simplement en égalant les coefficients de x^ν dans le développement en puissance de x de l'égalité suivante

$$(1-x^2)^N \frac{1}{(1-x)^{N-1}} = (1+x)^N - x(1+x)^N.$$

Reportons alors dans (M.6) le développement (M.5) de la quantité

$$C_{\nu-2p}^{N+\nu-2p-2} = \mathcal{M}_p.$$

On obtient

$$g = \sum_{p \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-)^p C_r^{N-p} C_p^N \mathcal{N}_{p+r}, \quad (\text{M.7})$$

c'est-à-dire qu'après avoir effectué la sommation à $(p+r)$ constant, nous trouvons, $g = \mathcal{N}_0$, ce qui démontre la proposition XIII.

Appendice N

Proposition XIV

Orthogonalité des coefficients limites c pour $\bar{\nu} = 1$ et $\bar{\nu} = 2$

$\bar{\nu} = 1$

$$\begin{aligned} c_{\{q\}}(\alpha) &= \frac{1}{k_\alpha - q_1} \quad \{q\} \equiv \{q_1\} \\ \sum_{\alpha} c_{\{q\}}(\alpha) c_{\{q'\}}(\alpha) &= 0, \quad \text{si } q_1 \neq q'_1. \end{aligned} \quad (\text{N.1})$$

En effet,

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{k_{\alpha} - q_1} \frac{1}{k_{\alpha} - q'_1} = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{k_{\alpha} - q_1} - \frac{1}{k_{\alpha} - q'_1} \right) \frac{1}{q_1 - q'_1}.$$

Cette dernière somme est nulle d'après la définition de q_1 et de q'_1 comme racines distinctes de l'équation (J.14) pour

$\bar{\nu} = 2$

$$c_{\{q\}}(\alpha\beta) = \frac{1}{(k_{\alpha} - q_1)(k_{\beta} - q_2)} + \frac{1}{(k_{\alpha} - q_2)(k_{\beta} - q_1)}$$

$$\sum_{\alpha < \beta} c_{\{q\}}(\alpha\beta) c_{\{q'\}}(\alpha\beta) = 0, \quad \{q\} \neq \{q'\}.$$

$$\begin{aligned} \{q\} &\equiv \{q_1, q_2\}, \\ \{q'\} &\equiv \{q'_1, q'_2\}. \end{aligned} \tag{N.2}$$

Nous supposons que si $\{q\} \neq \{q'\}$, l'égalité accidentelle des paramètres q et q' ne peut se produire.

Il suffit de montrer

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \frac{1}{(k_{\alpha} - q_1)(k_{\beta} - q_2)(k_{\alpha} - q'_1)(k_{\beta} - q'_2)} + (q'_1 \leftrightarrow q'_2) = 0$$

le premier membre peut se décomposer en quatre sommes partielles :

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \neq \beta} \frac{1}{(q_1 - q'_1)(q_2 - q'_2)} \left[\frac{1}{(k_{\alpha} - q_1)(k_{\beta} - q_2)} + \frac{1}{(k_{\alpha} - q'_1)(k_{\beta} - q'_2)} \right] \\ &- \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{1}{(q_1 - q'_1)(q_2 - q'_2)} \left[\frac{1}{(k_{\alpha} - q'_1)(k_{\beta} - q'_2)} + \frac{1}{(k_{\alpha} - q_1)(k_{\beta} - q_2)} \right] \end{aligned}$$

+ termes où q'_1 et q'_2 sont échangés.

Les deux premières sommes sont nulles, d'après (10.14) en effet,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{1}{(k_{\alpha} - q_1)(k_{\beta} - q_2)} &= \sum_{\beta} \left(\frac{2}{q_2 - q_1} - \frac{1}{k_{\beta} - q_1} \right) \frac{1}{k_{\beta} - q_2} \\ &= \frac{2}{q_2 - q_1} \frac{2}{q_1 - q_2} - \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\frac{2}{q_2 - q_1} - \frac{2}{q_1 - q_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Pour les deux dernières sommes, effectuons la somme sur α à l'aide des relations (10.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &- \sum_{\beta} \frac{1}{q_1 - q'_1} \frac{1}{q_2 - q'_2} \left[\frac{2}{q'_2 - q'_2} \frac{1}{k_{\beta} - q_2} + \frac{2}{q_2 - q_1} \frac{1}{k_{\beta} - q'_2} \right] \\ &+ \sum_{\beta} \frac{1}{q_1 - q'_1} \frac{1}{q_2 - q'_2} \left[\frac{1}{k_{\beta} - q'_1} \frac{1}{k_{\beta} - q_2} + \frac{1}{k_{\beta} - q_1} \frac{1}{k_{\beta} - q'_2} \right] + (q'_1 \leftrightarrow q'_2) \end{aligned}$$

Effectuons la sommation sur β , toujours à l'aide de (10.14) :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{q_1 - q'_1} \frac{1}{q_2 - q'_2} \frac{8}{(q'_2 - q'_1)(q_1 - q_2)} \\
 & + \frac{1}{q_1 - q'_1} \frac{1}{q_2 - q'_2} \frac{1}{q_2 - q'_1} \left(\frac{2}{q_1 - q_2} - \frac{2}{q'_2 - q'_1} \right) \\
 & + \frac{1}{q_1 - q'_1} \frac{1}{q_2 - q'_2} \frac{1}{q_1 - q'_2} \left(\frac{2}{q_2 - q_1} - \frac{2}{q'_1 - q'_2} \right) \\
 & + (q'_1 \leftrightarrow q'_2)
 \end{aligned}$$

Cette quantité est égale à

$$\frac{1}{q_1 - q'_1} \frac{1}{q_2 - q'_2} \left\{ \frac{8}{(q_1 - q_2)(q'_1 - q'_2)} + \frac{2(q_1 + q'_1 - q_2 - q'_2)^2}{(q_1 - q'_2)(q_2 - q'_1)(q_1 - q_2)(q'_1 - q'_2)} + (q'_1 \leftrightarrow q'_2) \right\}.$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient au numérateur :

$$8[(q_1 - q'_2)(q_2 - q'_1) - (q_1 - q'_1)(q_2 - q'_2)] + 2[(q_1 - q_2 + q'_1 - q'_2)^2 - (q_1 - q_2 - q'_1 + q'_2)^2] \equiv 0 ;$$

ce qui démontre l'orthogonalité pour $\bar{\nu} = 2$.

Remerciements

Cette thèse représente un travail que j'ai effectué au cours des deux dernières années dans le Service de Physique Théorique du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay. Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur C. Bloch de m'avoir accueilli dans l'équipe qu'il dirige, équipe à laquelle je dois certainement beaucoup, tant pour la formation que j'y ai reçue, que pour les possibilités de travail en commun que j'y ai trouvées.

J'exprime ma gratitude à Monsieur R. Joly dans le service duquel j'ai été initié à la physique neutronique et j'ai gardé un contact enrichissant avec ceux qui la font. Je remercie également Monsieur G. Vendryes, Chef du Département de Recherche Physique, dont la bienveillance m'a toujours encouragé dans la voie que je suivais.

Monsieur le Professeur Jancovici a bien voulu patronner cette thèse ; je lui dois des remarques utiles et je le remercie vivement de l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je remercie Monsieur le Professeur Nozières d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Au cours de ce travail, j'ai particulièrement apprécié l'appui et les conseils de Monsieur J. des Cloiseaux, et je suis heureux de le lui dire ici. Enfin, j'ai largement bénéficié des résultats obtenus par mes collègues, Messieurs J. Zinn-Justin et E. Brézin.

Le texte a été dactylographié par Madame Poirier et Madame Guilloteau que je remercie de leur efficacité.

Bibliographie

- [1] Mc Guire J. B., *J. Math. Phys.* **5** (1964) 622 ; **6** (1965) 432 ; **7** (1966) 123.
- [2] Bychkov Yu. A., Gor'kov L. P. et Dzyaloshinskii I. E., *J. Exp. Theor. Phys. (USSR)* **50** (1966) 738 ; *JETP* **23** (1966) 490.
- [3] Bethe H. A., *Z. Phys.* **71** (1931) 205.
- [4] Hulthen L., *Arkiv. Mat. Astron. Fys. A* **26** (1938) 1.
- [5] des Cloizeaux J. et Pearson J. J., *Phys. Rev.* **128** (1962) 2131.
- [6] des Cloizeaux J. et Gaudin M., *J. Math. Phys.* **7** (1966) 1384.
- [7] Yang C. N. et Yang C. P., *Phys. Rev.* **150** (1966) 327 ; **151** (1966) 258.
- [8] Lieb E. H. et Liniger W., *Phys. Rev.* **130** (1963) 1605.
- [9] Luttinger J. M., *J. Math. Phys.* **4** (1963) 1154.
- [10] Mattis D. C. et Lieb E. H., *J. Math. Phys.* **6** (1965) 304.
- [11] Lieb E., Schultz T. et Mattis D., *Ann. Phys.* **16** (1961) 407.
- [12] Katsura S. et Inawashiro S., *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1091.
- [13] des Cloizeaux J., *J. Math. Phys.* **7** (1966) 2136.
- [14] Lieb E. et Mattis D., *Phys. Rev.* **125** (1962) 164.
- [15] Zinn-Justin J. et Brezin E., *C. R. Ser. B* **263** (1966) 670-673.
- [16] Heine E., *Handbuch der Kugelfunctionen*, Vol. II, 2e édition (Berlin, 1881) pp. 472-479.
- [17] Szegö G., *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society, 1959) Chapitre VI.8.
- [18] Sneddon I. N., *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory* (Amsterdam, 1966).
- [19] Bogoliubov N. N., Zubarev D. N. et Tserkovnikov Yu. A., *Soviet Phys. JETP* **12** (1961) 88.
- [20] Hutson V., *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **59** (1963) 211.
- [21] Kac M. et Pollard H., *Canadian J. Math.* **2** (1956) 375-384.
- [22] Dirac P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Vol. 58, IV-th Edition (Oxford).
- [23] Landau L. D., *JETP* **30** (1956) 1058-1064.
- [24] Lieb E. H., *Phys. Rev.* **130** (1963) 1617.
- [25] Hohenberg P. C., *Phys. Rev.* **158** (2) (1967) 383.
- [26] Gaudin M., *Phys. Lett. A* **24** (1967).
- [27] Flicker M. et Lieb E. H., *Phys. Rev.* **161** (1967) 179.
- [28] Yang C. N., *Phys. Rev. Lett.* (preprint, oct. 67).

Non Publié Saclay D-PhT Février 1968 :

Etats propres et valeurs propres de l'Hamiltonien d'appariement

M. Gaudin

Les résultats exposés dans cette seconde section et dans l'appendice C ont été obtenus antérieurement à ce travail et démontrés complètement par R.W. Richardson et N. Sherman [9].

Résumé. — Le problème de la diagonalisation de l'Hamiltonien d'appariement est résolu dans le cas dit "non dégénéré". Il s'agit uniquement de l'Hamiltonien simplifié où les éléments de matrice de l'interaction sont tous égaux. La détermination des états propres et des valeurs propres est ramenée à la résolution d'un système d'équations algébriques qui dérive d'un principe variationnel. Une analogie électrostatique fournit une représentation intuitive de ce principe et facilite en particulier l'étude du système infini. On retrouve ainsi certains résultats classiques concernant l'état fondamental, obtenus par la méthode des transformations canoniques. Les implications de la solution proposée, en théorie des noyaux finis comme en théorie formelle de la superconductivité, ne sont pas abordées dans cet article.

Abstract. — The problem of diagonalization of the pairing Hamiltonian is resolved for the non-degenerate case. We consider only the simplified Hamiltonian which is characterized by the equality of all the matrix-elements of the pairing force. The determination of the eigenvalues and eigenstates is reduced to the resolution of a system of algebraic equations, deriving from a variational principle. An electrostatic analogy permits us to find an intuitive representation of this principle and facilitates in particular the study of infinite systems. With this method some classical results concerning the ground state are re-established. The solution proposed in this article is neither applied in theory finite nuclei nor in formal theory of superconductivity.

Introduction

Dans un travail récent [1] sur un modèle à une dimension pour un système de fermions en interaction [2], divers résultats ont été obtenus concernant les fonctions d'onde de ce système, résultats qui nous ont paru intéressants par leur structure même, indépendamment du modèle considéré dont ils tirent leur origine. En effet, l'étude de ceux-ci nous a conduits naturellement à un traitement exact de "l'Hamiltonien d'appariement" dans le cas "non dégénéré". Il s'agit uniquement de l'Hamiltonien simplifié, où les éléments de matrice de la force d'appariement sont supposés égaux, tel qu'il est utilisé couramment en théorie du noyau [3, 4].

Le lien entre les deux problèmes est le suivant: on obtient, comme sous-produit du traitement du système à une dimension, une base particulière et remarquable de fonctions de spin pour N particules de spin $1/2$. Or, dans le formalisme dit du “quasi-spin” [5], l’Hamiltonien d’appariement s’exprime en termes d’opérateurs de spin $1/2$, ce qui permet d’ailleurs une méthode systématique de diagonalisation numérique. Il se trouve que cette base de fonctions de spin a un rapport étroit avec celle des états propres de l’Hamiltonien d’appariement, sans que nous puissions dire si cette coïncidence formelle est l’indice d’un rapport plus profond entre les deux problèmes.

La première section de cet article est consacrée à rappeler les résultats du modèle linéaire [1,2] qui sont à l’origine de la solution proposée, mais qui ne sont pas logiquement nécessaires à l’explication de celle-ci. Dans la seconde section les équations couplées qui déterminent le spectre et les états propres de l’Hamiltonien d’appariement sont établies directement et leurs solutions sont dénombrées. On calcule ensuite les valeurs moyennes des nombres d’occupation et l’on conjecture l’expression générale du coefficient de normalisation de la fonction d’onde. La solution complète du problème de diagonalisation posé est ainsi obtenue, mais ne permet pas une comparaison immédiate avec les diverses solutions approchées, comparaison qui reste à faire dans son ensemble. Nous l’avons amorcé dans la troisième section en étudiant l’état fondamental du système infini. On retrouve alors les résultats classiques obtenus par la méthode des transformations canoniques. La question de l’équivalence de la fonction d’onde exacte et de la fonction d’essai asymptotiquement exacte de B.C.S. — équivalence définie par l’égalité des valeurs moyennes de tout opérateur — n’est pas abordée. La classification des états et la construction des diverses excitations élémentaires devraient constituer une suite à cette étude déjà trop longue.

1. Une base de fonctions de spin

1.1. LES FONCTIONS D’ONDE D’UN SYSTÈME DE FERMIONS À UNE DIMENSION. — Nous considérons d’abord un problème linéaire concernant un système de fermions identiques de spin $1/2$ dont l’interaction est indépendante du spin. La fonction d’onde complètement antisymétrique appartenant au spin total S , repéré par les nombres quantiques notés $\{E\}$, admet la décomposition classique suivante sur la base standard des fonctions de spin χ_T^S :

$$\psi^{\{E\}}(x_i, s_1; \dots; x_N, s_N) = \sum_T \varphi_T^{\{E\}}(x_1 x_2 \dots x_N) \chi_T^S(s_1 s_2 \dots s_N). \quad (1)$$

Les x_i sont les coordonnées d’espace, les s_i les composantes magnétiques des spins. L’indice de sommation T varie sur tous les tableaux d’Young numérotés, à deux colonnes de longueur respective $N/2 + S$ et $N/2 - S = M$. L’indice \tilde{T} désigne le tableau complémentaire de T .

Dans le modèle précis à une dimension que nous considérons, les fonctions d’espace $\varphi_T^{\{E\}}$ sont les fonctions propres de l’Hamiltonien suivant :

$$H = - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2V \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j). \quad (2)$$

Il suffit évidemment de construire les solutions relatives à un seul tableau T , pour les avoir toutes. Choisissons T de sorte que les variables x_1, x_2, \dots, x_M soient dans la seconde colonne de T et $x_{M+1}, x_{M+2}, \dots, x_N$ dans la première colonne. Les fonctions $\varphi_T^{\{E\}}$ sont donc antisymétriques dans les variables de chaque colonne séparément, et vérifient la condition suivante :

$$\mathcal{O}\varphi_T \equiv (P_{1,M+1} + P_{1,M+2} + \dots + P_{1,N} - 1) \varphi_T^{\{E\}} = 0. \quad (3)$$

L'opérateur de symétrie \mathcal{O} , somme de diverses transpositions $P_{1,i}$, $i > M$, est hermitique.

Les solutions de l'équation de Schrödinger :

$$H\varphi_T^{\{E\}} = E\varphi_T^{\{E\}}, \quad \mathcal{O}\varphi_T^{\{E\}} = 0, \tag{4}$$

forment donc un système complet de fonctions d'espace orthogonales ayant la classe de symétrie du tableau choisi T , et repérées par les nombres quantiques $\{E\}$ (énergie, spin, et tous les autres).

1.2. LA LIMITE $V \rightarrow 0$. — Supposons maintenant que la constante de couplage V tende vers zéro. Les fonctions d'espace $\varphi_T^{\{E\}}$ (construites en référence [1]) sont des fonctions continues de V et tendent vers des fonctions limites (que nous noterons encore $\varphi_T^{\{E\}}$) qui forment donc une base complète orthogonale de fonctions d'onde de particules indépendantes de symétrie donnée T ; on a les relations d'orthogonalité:

$$\int \varphi_T^{-\{E\}}(x_1 x_2 \dots x_N) \varphi_T^{\{E'\}}(x_1 x_2 \dots x_N) dx_1 \dots dx_N = 0 \quad \text{si } \{E\} \neq \{E'\}. \tag{5}$$

Il se trouve que les fonctions limites sont associées à la donnée d'un ensemble de N nombres d'onde réels et distincts $\{k\} = \{k_1 k_2 \dots k_N\}$ qui constituent donc en fait une partie de l'ensemble des nombres quantiques $\{E\}$.

Nous écrivons :

$$\{E\} \equiv \{k, q\}, \tag{6}$$

où $\{q\}$ désigne un ensemble de nombres quantiques qui complète l'ensemble $\{k\}$. Les fonctions d'ondes limites admettent donc un développement en termes de déterminant de Slater, qui est le suivant :

$$\varphi_T^{\{E\}}(x_1 \dots x_N) = \sum_P I(P) C^{\{E\}}(P_1, P_2, \dots P_M) \begin{bmatrix} k_{P1} & \dots & k_{PM} \\ x_1 & \dots & x_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{P(M+1)} & \dots & k_{PN} \\ x_{M+1} & \dots & x_N \end{bmatrix}. \tag{7}$$

La somme porte sur les permutations P d'ordre N ; $I(P)$ est le signe de la permutation P ; les coefficients

$$C^{\{E\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) \equiv C^{\{E\}}(\mathcal{F}_M) \tag{8}$$

sont des fonctions complètement symétriques de M indices distincts formant une partie \mathcal{F}_M des entiers variants de 1 à N .

La condition de symétrie donnée par l'équation (3) est équivalente aux C_{M-1}^N conditions suivantes sur les coefficients $C^{\{E\}}(\mathcal{F})$:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{CF}_{M-1}} C^{\{E\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = 0, \tag{9}$$

pour tout $\mathcal{F}_{M-1} = \{\beta\gamma \dots \delta\}$.

Il résulte alors de l'orthogonalité des fonctions limites écrites dans l'équation (5) que l'on a en particulier :

$$\int \bar{\varphi}_T^{\{k,q\}}(x) \varphi_T^{\{k,q'\}}(x) dx = 0, \quad \text{si } \{q\} \neq \{q'\}. \tag{10}$$

On déduit de l'équation (10) les relations d'orthogonalité sur les coefficients C relatifs au même jeu de nombres d'onde k ;

$$\sum_{\mathcal{F}} \bar{C}^{\{k,q\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) C^{\{k,q'\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = 0, \quad \text{si } \{q\} \neq \{q'\}. \tag{11}$$

1.3. FORME DES FONCTIONS D'ONDE LIMITES. — Le résultat essentiel sur la limite $V = 0$ des fonctions d'onde du modèle à une dimension est le suivant : le coefficient $C^{\{k,q\}}$ est défini comme une somme sur toutes les permutations R d'ordre M

$$C^{\{k,q\}}(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = \sum_R \frac{1}{k_\alpha - q_{R1}} \frac{1}{k_\beta - q_{R2}} \dots \frac{1}{k_\delta - q_{RM}}$$

c'est-à-dire dans la notation condensée du "permanent" :

$$C^{\{k,q\}}(\mathcal{F}) \equiv \left| \begin{array}{c} + \quad + \\ \frac{1}{k_\nu - q_i} \end{array} \right|_{\substack{\nu \in \mathcal{F} \\ 1 \leq i \leq M}} \quad (12)$$

où l'ensemble $\{q\} \equiv \{q_1 q_2 \dots q_M\}$ est une solution du système des M équations algébriques

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{k_\nu - q_i} = 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{q_j - q_i}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (13)$$

Rappelons que les k sont des nombres donnés, réels et distincts ; les nombres q sont en général complexes, mais nécessairement distincts entre eux, distincts des k , et finis.

Nous avons donné en appendices A et B les démonstrations des deux propositions suivantes.

Proposition I

Si $\{q\}$ est une solution du système d'équations (13), les coefficients $C^{\{k,q\}}$ vérifient les conditions (9) de symétrie T . Ils sont réels.

Proposition II

Le nombre de solutions convenables du système d'équations (13) pour les nombres $\{q\}$, est exactement égal au nombre de fois que la représentation $(D^{1/2})^N$ contient la représentation $D^{S=N/2-M}$, c'est-à-dire

$$g_M = C_M^N - C_{M-1}^N. \quad (14)$$

1.4. UNE BASE ORTHOGONALE DE FONCTIONS DE SPIN. — Le modèle à une dimension nous a livré le système des coefficients limites $C^{\{k,q\}}$ avec lequel nous pouvons maintenant construire un système de fonctions de spin en quelque sorte corrélatif du système de fonctions d'espace précédemment considéré.

Donnons-nous N opérateurs de spin $1/2$: S_i , $1 \leq i \leq N$, et appelons $|0\rangle$ l'état de référence "ferromagnétique"

$$S_i^z |0\rangle = -\frac{1}{2} |0\rangle, \quad \forall i. \quad (15)$$

Considérons les fonctions de spins suivantes de norme 1 :

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{D_M}} \sum_{\mathcal{F}_M} C(\alpha\beta\gamma \dots \delta) S_\alpha^+ S_\beta^+ \dots S_\delta^+ |0\rangle. \quad (16)$$

La somme porte sur tous les ensembles ordonnés de M indices distincts $\mathcal{F}_M = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$. On a introduit un coefficient de normalisation $D_M^{-1/2}$ de sorte que

$$D_M = \sum_{\mathcal{F}_M} C^2(\alpha\beta\gamma \dots \delta). \quad (17)$$

(Nous avons omis d'indexer les diverses quantités par l'ensemble $\{q\}$).

On notera que l'expression (12) des coefficients $C(\mathcal{F})$ permet d'écrire l'état $|\chi\}^{\{q\}}$ sous la forme

$$|\chi\}^{\{q\}} = \frac{1}{\sqrt{D_M}} \frac{1}{M!} \prod_{i=1}^M \left(\sum_{\nu=1}^N \frac{S_\nu^+}{k_\nu - q_i} \right) |0\rangle. \tag{18}$$

Nous avons les résultats suivants :

a) $|\chi\}$ est fonction propre de S^z

$$S^z |\chi\} = - \left(\frac{N}{2} - M \right) |\chi\}.$$

b) $|\chi\}$ appartient au spin total $S = N/2 - M$

En effet, les conditions de symétrie (9) qui résultent de la proposition I sont équivalentes à

$$S^- |\chi\} = 0. \tag{19}$$

c) Les différents états $|\chi^{\{q\}}\}$ sont orthogonaux

$$\langle \chi^{\{q\}} | \chi^{\{q'\}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{DD'}} \sum_{\mathcal{F}_M} C^{\{q\}}(\mathcal{F}) C^{\{q'\}}(\mathcal{F}) = 0, \tag{20}$$

d'après les relations (11) pour $\{q\} \neq \{q'\}$.

Remarquons que nous n'avons pas de démonstration directe de cette orthogonalité (sauf pour $M = 1, 2$), mais qu'elle résulte des considérations exposées au paragraphe 1 de cette section, sur l'orthogonalité des fonctions d'onde d'espace du modèle à une dimension.

d) Les états $|\chi^{\{q\}}\}$ constituent une base orthonormée complète de fonctions de spin

$$S^z = -S = M - N/2$$

En effet, nous avons $g_M = C_M^N - C_{M-1}^N$ solutions distinctes $\{q\}$ d'après la proposition II, ce qui est exactement la dimension du sous-espace des fonctions de spin total $S = N/2 - M = -S_z$. L'indépendance linéaire résulte de l'orthogonalité.

Notons que l'on construit évidemment tous les états de composante de spin $S^z \neq -S$ par application répétée sur $|\chi\}$ de l'opérateur S^q . La structure des états obtenus reste la même que celle qui est donnée par l'expression (18) à condition de considérer que certains nombres q peuvent devenir infinis.

e) Il nous manque la valeur du coefficient de normalisation sur lequel nous faisons la conjecture

$$D_M^{\{q\}} = \det \left| g(q_i) \delta_{ij} + \frac{2}{(q_i - q_j)^2} \right|_M, \tag{21}$$

avec la définition

$$g(q_i) = \sum_{\nu=1}^M \frac{1}{(k_\nu - q_i)^2} - 2 \sum_{\ell=1}^M \frac{1}{(q_\ell - q_i)^2}. \tag{22}$$

Il est entendu que les termes $\frac{1}{(q_i - q_j)^2}$ sont à remplacer par 0 pour $i = j$.

Cette conjecture a été vérifiée pour $M = 1, 2$.

2. États propres et valeurs propres de l'Hamiltonien d'appariement

Les résultats exposés dans les deux paragraphes suivants et les appendices C et D ont été obtenus antérieurement et démontrés complètement avec leur méthode propre par R.W. Richardson et N. Sherman [9]. C'est la raison pour laquelle ce travail n'a pas été publié.

2.1. L'HAMILTONIEN D'APPARIEMENT ET LE FORMALISME DU "QUASI-SPIN". — Sans préambule sur les systèmes physiques de fermions, auxquels il est généralement appliqué, nous considérons l'Hamiltonien d'appariement simplifié sous la forme habituelle en seconde quantification :

$$H = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{-\nu}^{+} a_{-\nu}) - G \sum_{\nu=1} \sum_{\nu'=1} a_{-\nu}^{+} a_{\nu}^{+} a_{\nu'} a_{-\nu'}. \quad (23)$$

Nous avons $2N$ états individuels associés par paires $\nu, -\nu$, $1 \leq \nu \leq N$. L'énergie non perturbée d'une paire ν est ε_{ν} , les états appariés ayant la même énergie égale à $-\varepsilon_{\nu}/2$. L'intensité G de la force d'appariement est positive.

Le problème est de construire les états propres $|\psi\rangle$ de l'Hamiltonien (23) pour un nombre donné de particules. On sait qu'il suffit de se limiter à la recherche des états "occupés par paires", puisque la force d'appariement ignore les états occupés par des fermions célibataires.

Considérons en effet le système d'opérateurs de spin appartenant à la représentation réductible $D^{1/2} + 2D^0$:

$$\begin{cases} \sigma_{\nu}^z &= \frac{1}{2} (a_{\nu}^{+} a_{\nu} - a_{-\nu}^{+} a_{-\nu}) \\ \sigma_{\nu}^{+} &= a_{\nu}^{+} a_{-\nu} \end{cases} \quad 1 \leq \nu \leq N. \quad (24)$$

Ces opérateurs commutent tous avec H . On peut donc choisir les fonctions propres $|\psi\rangle$ de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}^z |\psi\rangle &= \pm \frac{1}{2} |\psi\rangle \quad \nu \in \{\mathcal{L}\} \\ \text{et} \quad \sigma_{\nu}^{x,y,z} |\psi\rangle &= 0 \quad \nu \in \{\mathcal{C}\mathcal{L}\} \end{aligned} \quad (25)$$

où \mathcal{L} désigne un ensemble de L indices distincts pris de 1 à N . Si $\nu \in \{\mathcal{L}\}$, l'état ν ou l'état $-\nu$ est occupé par un fermion célibataire. Or l'interaction d'appariement est ineffective entre les états $\pm\{\mathcal{L}\}$. Il suffit donc de diagonaliser H dans le sous-espace construit avec les seuls états de paires $\{\mathcal{C}\mathcal{L}\}$ et d'ajouter à l'énergie la quantité

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu \in \mathcal{L}} \varepsilon_{\nu}.$$

Nous nous restreindrons donc à la détermination des états totalement appariés à M paires qui vérifient les conditions :

$$\sigma_{\nu}^{x,y,z} |\psi\rangle = 0, \quad 1 \leq \nu \leq N, \quad (26)$$

$$\sum_{\nu=1}^N a_{\nu}^{+} a_{\nu} |\psi\rangle = M |\psi\rangle. \quad (27)$$

Suivant le formalisme du quasi-spin, nous introduisons les N nouveaux opérateurs de spin $1/2$ (la représentation D^0 est éliminée par les projections (26))

$$\begin{aligned} S_{\nu}^z &= \frac{1}{2} (a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{-\nu}^{+} a_{-\nu} - 1) = n_{\nu} - \frac{1}{2}, \\ S_{\nu}^{+} &= a_{-\nu}^{+} a_{\nu}^{+}, \end{aligned} \quad (28)$$

et le spin total

$$\mathbf{S} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{S}_{\nu} \tag{29}$$

avec

$$S_z = M - \frac{N}{2}. \tag{30}$$

L'Hamiltonien s'écrit alors

$$H = \sum_{\nu=1}^N \varepsilon_{\nu} n_{\nu} - GS^+S^- \tag{31}$$

et le nombre de paires

$$M = \sum_{\nu=1}^N n_{\nu}.$$

2.2. ÉTATS PROPRES ET VALEURS PROPRES. — Tout état propre à M paires admet un développement sur la base des fonctions de spins élémentaires :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\mathcal{F}} e(\alpha\beta\gamma \dots \delta) S_{\alpha}^+ S_{\beta}^+ \dots S_{\delta}^+ |0\rangle, \tag{32}$$

où $\mathcal{F} = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$ est un choix courant de M indices distincts.

L'équation aux valeurs propres

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{33}$$

s'écrit en terme des coefficients e du développement (32) :

$$(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} + \dots + \varepsilon_{\delta} - E) e(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = G \sum_{\nu}' e(\nu\beta\gamma \dots \delta) + e(\alpha\nu\gamma \dots \delta) + \dots + e(\alpha\beta\gamma \dots \nu), \tag{34}$$

où la sommation sur ν , notée \sum_{ν}' , doit être effectuée sur les valeurs de ν telles que les indices figurant dans les coefficients e soient tous distincts.

Prolongeant la définition des coefficients e au cas où deux indices deviennent égaux, on écrit les équations (34) sous la forme

$$(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} + \dots + \varepsilon_{\delta} - E) e(\alpha\beta\gamma \dots \delta) - G \sum_{\nu=1}^N e(\nu\beta\gamma \dots \delta) + e(\alpha\nu\gamma \dots \delta) + \dots + e(\alpha\beta\gamma \dots \nu) + G\{e(\beta\beta\gamma \dots \delta) + e(\alpha\alpha\gamma \dots \delta) + \dots\} = 0. \tag{35}$$

Dans cette dernière ligne du premier membre de l'équation (35), figurent $M(M - 1)$ termes, où tout indice de $\mathcal{F} = \{\alpha\beta\gamma \dots \delta\}$ figure deux fois de toutes les façons possibles.

On peut encore présenter le système d'équations (34) ou (35) sous la forme suivante : soit P une permutation d'ordre N telle que

$$\mathcal{F} = \{P1, P2, \dots PM\}.$$

On obtient pour le système (35)

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon_{P_1} + \varepsilon_{P_2} + \dots + \varepsilon_{P_M} - E) e(P_1, P_2, \dots, P_M) - G \sum_{i=1}^M \sum_{P_i=1}^N e(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_M) \\
 & + G \sum_{i < j} e(P_1 \dots P_i \dots P_i \dots P_M) + e(P_1 \dots P_j \dots P_j \dots P_M) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

$\begin{array}{cccc}
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 i & & j & & i & & j
 \end{array}$

Ce système linéaire pour les C_M^N coefficients $e(\mathcal{F})$ étant établi, la proposition suivante démontrée en appendice C en donne des solutions :

Proposition III

Si les M nombres complexes distincts E_1, E_1, \dots, E_M sont racines du système d'équations algébriques

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} - 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j - E_i} = \frac{1}{G} \quad 1 \leq i \leq M,
 \tag{37}$$

(ce qui implique aussi $E_i \neq \varepsilon_\nu$), les coefficients

$$e(\alpha\beta\gamma \dots \delta) = \sum_R \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{R1}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{R2}} \dots \frac{1}{\varepsilon_\delta - E_{RM}},$$

ou dans une notation plus condensée

$$e(\mathcal{F}_M) = \text{perm} \left| \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} \right|_{\substack{\nu \in \mathcal{F}_M \\ 1 \leq i \leq M}},
 \tag{38}$$

constituent une solution du système linéaire d'équations (34), (35) ou (36), avec

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_M.
 \tag{39}$$

On peut encore énoncer la proposition équivalente.

Proposition IV

Si $\{E\} == \{E_1, E_2, \dots, E_M\}$ est une solution du système algébrique (37), l'état à M paires

$$|\psi\rangle^{\{E\}} = \frac{1}{\sqrt{D_{\{E\}}}} \frac{1}{M!} A_{E_1} A_{E_2} \dots A_{E_M} |0\rangle
 \tag{40}$$

est un état propre de l'Hamiltonien (23) pour l'énergie

$$E = \sum_1^M E_i$$

avec la définition de l'opérateur de création de paires

$$A_{E_i} = \sum_{\nu=1}^N \frac{a_{-\nu}^+ a_{+\nu}^+}{\varepsilon_\nu - E_i}.
 \tag{41}$$

Cette proposition résulte trivialement de la proposition précédente, compte tenu des propriétés des opérateurs de création de paires et de la forme des coefficients e (Eq. (38)).

Preuve pour $M = 3$.

Nous allons donner ici une démonstration de la proposition III, dans le cas particulier $M = 3$ qui illustre bien la méthode de la preuve générale faite en appendice C. Nous prenons les équations sous la forme (35) :

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - E) e(\alpha\beta\gamma) \\
 & -G \sum_{\nu=1}^N e(\nu\beta\gamma) + e(\alpha\nu\gamma) + e(\alpha\beta\nu) \\
 & +G\{e(\alpha\alpha\beta) + e(\alpha\alpha\gamma) + e(\beta\beta\alpha) + e(\beta\beta\gamma) + e(\gamma\gamma\alpha) + e(\gamma\gamma\beta)\} = 0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Posant

$$e(\alpha\beta\gamma) = \sum_P \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}}, \tag{43}$$

et

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \tag{44}$$

on obtient pour la première ligne de l'équation (42)

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - E) e(\alpha\beta\gamma) = \\
 & \sum_P (\varepsilon_\alpha - E_{P1} + \varepsilon_\beta - E_{P2} + \varepsilon_\gamma - E_{P3}) \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}} = \\
 & \sum_P \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}} + (\text{circ. sur } \alpha\beta\gamma).
 \end{aligned} \tag{45}$$

De même pour la seconde ligne de l'équation (42) on obtient

$$-G \sum_P \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}} + (\text{circ. sur } \alpha\beta\gamma). \tag{46}$$

Posant

$$f(E_i) = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i}, \tag{47}$$

on trouve pour la somme des deux premières lignes de l'équation (42) :

$$\sum_P (1 - Gf(E_{P1})) \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}} + (\text{circ. sur } \alpha\beta\gamma). \tag{48}$$

Considérons maintenant la troisième ligne de l'équation (42) ; nous avons

$$\begin{aligned}
 e(\alpha\alpha\beta) + e(\alpha\alpha\gamma) &= \sum_P \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P3}} + \sum_P \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}} \\
 &= 2 \sum_P \frac{1}{E_{P2} - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P3}} + 2 \sum_P \frac{1}{E_{P2} - E_{P1}} \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P3}}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Échangeant alors circulairement α, β, γ , on obtient pour la troisième ligne de l'équation (42)

$$2 \sum_P \frac{1}{E_{P_2} - E_{P_1}} \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P_2}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P_3}} + \sum_P \frac{1}{E_{P_2} - E_{P_1}} \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P_3}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P_2}} + (\text{circ.}) \quad (50)$$

Remarquant que la seconde somme sur P est équivalente à une somme sur P_{23} , ($P_{23} =$ transposition (23)) on obtient

$$\begin{aligned} & 2 \sum_P \left(\frac{1}{E_{P_2} - E_{P_1}} + \frac{1}{E_{P_3} - E_{P_1}} \right) \frac{1}{\varepsilon_\alpha - E_{P_2}} \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P_3}} + (\text{circ. } \alpha\beta\gamma) \\ &= 2G \sum_P \left(\sum_j' \frac{1}{E_j - E_{P_1}} \right) \frac{1}{\varepsilon_\beta - E_{P_2}} \frac{1}{\varepsilon_\gamma - E_{P_3}} + (\text{circ. } \alpha\beta\gamma). \end{aligned} \quad (51)$$

Chaque terme de cette somme (Eq. (51)) peut être identifié à un terme de la somme (48), si l'on peut prendre

$$1 - Gf(E_{P_1}) + 2G \sum_j' \frac{1}{E_j - E_{P_1}} = 0, \quad \forall P,$$

c'est-à-dire si le système d'équations suivant est vérifié

$$\sum_1^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} - 2 \sum_{j=1}^3 \sum_j' \frac{1}{E_j - E_i} = \frac{1}{G}. \quad (52)$$

pour $i = 1, 2, 3$. Ce qui démontre la proposition III dans le cas particulier. La méthode générale est la même.

Enfin la proposition V nous permet de conclure que nous avons toutes les solutions du système d'équation (34), c'est-à-dire tous les états propres de H à M paires.

Proposition V

Si les ε_ν sont tous distincts, il existe en général exactement C_M^N solutions convenables $\{E\}$ du système d'équations algébriques (37) qui fournissent donc un système de nombres quantiques suffisants pour indexer les états $|\psi\rangle$ à M paires.

Le dénombrement est fait en appendice D, par une méthode identique à celle utilisée pour la proposition II.

Remarque sur le système limite $G^{-1} = 0$

On peut considérer chaque système $\{E\}$ en chaque coefficient $e^{\{E\}}\{\mathcal{F}\}$ comme une branche de fonction algébrique de la constante de couplage G , branche que l'on peut suivre par continuité. Dans l'hypothèse de continuité, pour $G \rightarrow \infty$, il existe une injection des systèmes limites $\{E\}|_{G=\infty}$ d'ordre M , dans les systèmes solutions des équations avec $G^{-1} = 0$. A la limite $G^{-1} = 0$, l'Hamiltonien H devient équivalent à GS^+S^- et les états propres limites non nuls satisfont donc

$$S^z |\psi\rangle_{\text{limite}} = - \left(\frac{N}{2} - M \right) |\psi\rangle_{\text{limite}}. \quad (53)$$

$$S^+ S^- |\psi\rangle_{\text{limite}} = \lim_{G \rightarrow \infty} \left(\frac{E}{G} \right) |\psi\rangle_{\text{limite}}. \quad (54)$$

Ils appartiennent donc à une valeur donnée du spin total.

Nous sommes donc amenés à conjecturer qu'à la limite $G^{-1} \rightarrow 0$ certaines solutions $\{E\}$ sont telles qu'une partie des E_i tendent vers l'infini. Les C_M^N solutions à M paires se classeraient donc à la limite en

$$\begin{aligned}
 C_M^N - C_{M-1}^N &= g_M && \text{solutions avec } S = \left(\frac{N}{2} - M\right) && \text{(tous les } E_i \text{ finis)} \\
 &g_{M-1} && \text{solutions avec } S = \left(\frac{N}{2} - M + 1\right) && \text{(1 nombre } E = \infty) \\
 &\vdots && && \\
 g_0 &= 1 && \text{solutions avec } S = \left(\frac{N}{2}\right) && \text{(} M \text{ nombres } E = \infty).
 \end{aligned} \tag{55}$$

Ces considérations intuitives montrent comment la base de fonctions de spin obtenue précédemment et construite section 1 (avec correspondance $k \leftrightarrow \varepsilon$ et $q \leftrightarrow E$, peut être considérée comme la base limite des états propres de l'Hamiltonien d'appariement lorsque la constante de couplage tend vers l'infini.

2.3. PROBABILITÉS D'OCCUPATION ET NORMALISATION. — Le coefficient de normalisation $D_{\{E\}}^{-1/2}$ qui figure dans l'expression (32) ou (40) de l'état propre $|\psi^{\{E\}}\rangle$ reste à déterminer : le calcul direct croît rapidement en difficulté avec l'ordre M . Nous l'avons effectué pour $M = 1, 2$. Cependant, nous savons calculer la valeur moyenne du nombre d'occupation n_ν dans un état quelconque. En effet, on obtient par dérivation de l'équation aux valeurs propres

$$\langle n_\nu \rangle_{\{E\}} = \frac{\langle \psi^{\{E\}} | n_\nu | \psi^{\{E\}} \rangle}{\langle \psi^{\{E\}} | \psi^{\{E\}} \rangle} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_\nu}. \tag{56}$$

Or par différenciation des équations (37) on obtient

$$\sum_j D_{ij} dE_j = \sum_\nu \frac{d\varepsilon_\nu}{(\varepsilon_\nu - E_i)^2}, \tag{57}$$

avec

$$D_{ij} = g(E_i) \delta_{ij} + \frac{2}{(E_i - E_j)^2}, \tag{58}$$

et

$$g(E_i) = \sum_\nu \frac{1}{(\varepsilon_\nu - E_i)^2} - 2 \sum_\ell' \frac{1}{(E_\ell - E_i)^2}. \tag{59}$$

La quantité $\langle n_\nu \rangle = \sum_j \frac{\partial E_j}{\partial \varepsilon_\nu}$ se présente donc comme le quotient de deux déterminants

$$\langle n_\nu \rangle = \frac{1}{|D|_M} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{(\varepsilon_\nu - E_1)^2} & \cdots & \frac{1}{(\varepsilon_\nu - E_M)^2} \\ 1 & & & \\ 1 & & D & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}_{M+1} \tag{60}$$

Ce résultat nous permet de faire la *conjecture* :

Le coefficient $D_{\{E\}}$ est égal au déterminant de la matrice D_{ij} défini dans l'équation (58).

Ceci est vérifié pour $M = 1, 2$, par un calcul direct.

2.4. CAS DE DÉGÉNÉRESCENCE PARTIELLE. — La théorie précédente a été faite dans l'hypothèse générique où les niveaux non perturbés sont tous distincts. C'est dans cette hypothèse explicite que le dénombrement des états propres a été effectué en appendices B et D, et que ceux-ci sont définis sans ambiguïté par les formules (37) et (40).

Or le cas de dégénérescence partielle est constant en théorie du noyau sphérique, et il nous faut l'envisager. Les équations aux valeurs propres (Eq. (37)) gardent un sens si plusieurs ε deviennent égaux, mais il se peut alors que nous "perdions" des solutions. Examinons à titre d'exemple le cas instructif où deux ε , soit ε'_1 et ε''_1 , tendent vers une valeur comme ε_1 de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1 + \delta \\ \varepsilon''_1 &= \varepsilon_1 - \delta \end{aligned} \right\} \delta \rightarrow 0. \quad (61)$$

On trouve aisément que les équations (37) sont satisfaites si l'un des nombres E_i , par exemple E_1 , est voisin de ε_1 :

$$E_1 = \varepsilon_1 + C_1 \delta^2 + o(\delta^2) \quad (62)$$

avec

$$C_1 = \frac{1}{2G} - \sum_{j=2}^M \frac{1}{E_j - \varepsilon_1} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=3}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_1}. \quad (63)$$

Si donc un des E_i , soit E_1 , tend vers la valeur limite commune de deux ε , les équations (37) restent valables à condition de supprimer les deux niveaux qui dégénèrent et de rabaisser l'ordre du système d'une unité.

Quelle est la fonction d'onde limite correspondante ? Il y a une indétermination à lever puisque les coefficients e contiennent des termes non bornés de la forme

$$\frac{S_{\varepsilon'_1}^+}{\varepsilon'_1 - E_1} + \frac{S_{\varepsilon''_1}^+}{\varepsilon''_1 - E_1} + \dots, \quad (64)$$

et que le coefficient de normalisation D devient lui aussi infini.

L'indétermination est aisément levée et l'on trouve :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \psi^{\{E\}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_1^{'+} - S_1^{''+}) \left| \psi^{\{E_2 E_3 \dots E_M\}} \right\rangle_{\varepsilon'_1 = \varepsilon''_1 = \varepsilon_1}, \quad (65)$$

où l'état $\left| \psi^{\{E_2 \dots E_M\}} \right\rangle$ est construit avec la solution convenable du système d'équations (37) d'ordre $M - 1$, qui ne contient plus l'énergie des niveaux dégénérés. En bref, on a couplé dans l'état singulet les deux quasi-spins associés aux niveaux dégénérés, qui n'interviennent donc plus dans le problème.

L'énergie de cet état limite est

$$\lim E^{(M)} = \varepsilon_1 + E_2 + \dots + E_M = \varepsilon_1 + E^{(M-1)}.$$

On peut dire que l'état limite est un état de séniorité 2. Plus généralement, chaque fois que deux niveaux de paires dégénèrent, la séniorité peut augmenter de deux unités. Un état à M paires de séniorité 0 est caractérisé par l'existence de M nombres E_1, E_2, \dots, E_M distincts, formant une solution du système (37) d'ordre M , quelque soit la dégénérescence des niveaux non perturbés.

Un état de séniorité $2s$, est caractérisé par $M - s$ nombres E_i solution d'un système d'ordre $M - s$, où l'on aura supprimé s couples de niveaux dégénérés, de façon arbitraire. La question des niveaux d'énergie dans les cas de dégénérescence partielle est donc résolue.

En ce qui concerne les fonctions d'onde le problème est plus complexe, car il semble *a priori* que les états limites de séniorité non nulle dus à la confluence d'un certain groupe de niveaux, vont dépendre de la manière dont les énergies non perturbées tendent l'une vers l'autre. Ces états limites auraient justement un intérêt physique dans la mesure où la dégénérescence serait levée par une légère perturbation de l'Hamiltonien, par exemple un potentiel moyen quadrupolaire. Si la déformation n'est pas négligeable on est ramené au cas non-dégénéré. Dans le formalisme proposé, on pourrait reprendre le problème de l'équilibre d'un noyau fini sous les effets contraires de la force d'appariement et de la force dérivant du potentiel moyen. On aurait, pour le niveau de particule dans un champ moyen quadrupolaire, la dépendance suivante

$$\varepsilon_{jm} = \varepsilon_j^0 + \sum_{j'm'} \langle jm|Q|j'm' \rangle \langle n_{j'm'} \rangle. \tag{66}$$

en fonction de l'intensité du quadrupole Q , et de l'occupation des différents états individuels. Les équations (56) et (66) déterminent en principe les niveaux ε_{jm} , et la forme d'équilibre du noyau.

2.5. DÉTERMINATION DES SOLUTIONS $\{E\}$. CAS DE DÉGÉNÉRESCENCE. — Le calcul pratique des valeurs propres de l'Hamiltonien d'appariement est fondé sur le système d'équations algébriques (37) pour les quantités E_i . Montrons qu'on peut formuler le problème de la façon suivante :

– Le polynôme $K(z) = \prod_{\nu=1}^N (z - \varepsilon_\nu)$ étant donné avec tous ses zéros distincts, trouver deux polynômes $Q(z)$ de degré M et $R(z)$ de degré $N - M - 1$ tels que l'on ait l'identité

$$KQ'' - (G^{-1}K + K')Q' + RQ \equiv 0, \tag{67}$$

avec la restriction que Q ait aussi tous ses zéros distincts : ceux-ci sont alors les quantités E_i .

Montrons d'abord que les équations (37) entraînent l'identité (67). L'écriture de l'équation (37) – c'est-à-dire l'existence de l'état propre correspondant de l'Hamiltonien – implique :

$$Q'(E_i) \neq 0, \quad K(E_i) \neq 0.$$

Le système (37) s'écrit alors

$$-\frac{K'(E_i)}{K(E_i)} + \frac{Q''(E_i)}{Q'(E_i)} = \frac{1}{G}.$$

Ceci entraîne que le polynôme

$$KQ'' - (G^{-1}K + K')Q'$$

est divisible par Q .

Inversement, si l'on a une solution Q sans racines multiples du problème (67) on obtient

$$K(E_i) (Q''(E_i) - G^{-1}Q'(E_i)) - K'(E_i)Q'(E_i) = 0. \tag{68}$$

Mais par hypothèse $Q'(E_i) \neq 0$, si Q est une solution convenable de l'équation (67). D'autre part K a toutes ses racines distinctes : $K(E_i)$ et $K'(E_i)$ ne peuvent être simultanément nuls. Divisant l'égalité (68) par $K(E_i)Q'(E_i)$ on obtient le système d'équations (37).

En cas de dégénérescence des niveaux non perturbés, il est évident que le système (37) et le problème (67) gardent tout leur sens. Mais ils ne sont plus nécessairement équivalents. Comme

nous l'avons vu au paragraphe 2.4, on peut imaginer de produire la dégénérescence en faisant confluer les niveaux par paires. Le polynôme K admet alors une racine double et nous avons vu qu'un des nombres E , c'est-à-dire un zéro de Q , peut coïncider à la limite avec le zéro double de K . On montre facilement sur l'identité (67), que les autres nombres E sont déterminés par un problème identique à (67) obtenu en supprimant le zéro commun de K et de Q , c'est-à-dire en abaissant le degré de Q d'une unité, et celui de K de deux unités. Ceci peut être fait chaque fois qu'une paire de niveaux dégénère en un seul, fournissant ainsi ce que nous avons appelé des états de séniorité 2, 4 ... selon que le système de rang M est abaissé au rang $M - 1$, $M - 2$, etc... .

La formulation de l'équation (67) est utile dans le cas de forte dégénérescence, de sorte qu'il y ait un petit nombre de valeurs distinctes des ε . Traitons rapidement le cas de deux niveaux également dégénérés [6] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0, \quad \varepsilon_2 = 1. \\ K(z) &= [z(z-1)]^{N/2}, \quad N \text{ pair.} \end{aligned} \quad (69)$$

Le polynôme Q correspondant à la solution de séniorité 0 (sans racines multiples) vérifie l'équation différentielle (67) où R est nécessairement du premier degré.

On trouve par identification

$$\begin{aligned} z(z-1)Q'' - \left\{ G^{-1}z^2 + (N - G^{-1})z - \frac{N}{2} \right\} Q' \\ + \left\{ MG^{-1}z + EG^{-1} + M(N - M + 1 - G^{-1}) \right\} Q = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

C'est une équation de Heun dont les solutions polynomiales sont déterminées par une récurrence à trois termes :

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_0^M a_\nu z^\nu, \quad a_M = 1, \quad a_{M-1} = -E. \\ (\nu + 1) \left(\frac{N}{2} - \nu \right) a_{\nu+1} + \{ (M - \nu)(N - M - \nu + 1 - G^{-1}) + EG^{-1} \} a_\nu \\ &+ G^{-1}(M - \nu + 1)a_{\nu-1} = 0, \end{aligned} \quad (71)$$

d'où l'on déduit l'énergie E comme valeur propre d'une matrice $M \times M$, comme on l'obtiendrait par application directe de la méthode de Kerman. Le seul avantage est ici celui de l'écriture systématique.

Du point de vue numérique l'avantage de poser le problème avec l'identité (67) est donc assez mince, bien que la théorie de l'élimination permette toujours d'obtenir directement E comme zéro d'un polynôme de degré élevé dépendant uniquement des coefficients de Q .

2.6. UN PRINCIPE VARIATIONNEL. — Nous allons donc revenir à une représentation plus intuitive des solutions du système d'équations (37) à l'aide d'un principe variationnel et d'une analogie électrostatique déjà utilisée par Stieljes pour ce genre de problème [7].

Analogie électrostatique

Écrivons à nouveau les équations (37)

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j - E_i} = \frac{1}{2G}. \quad (72)$$

Elles traduisent un problème d'électrostatique à deux dimensions : on se donne N charges $-1/2$ fixées aux points d'abscisses ε_ν sur l'axe réel, et un champ uniforme superposé parallèle

à l'axe réel et d'intensité $-1/2G$. Trouver les positions d'équilibre (instable) de M charges $+1$ d'affixes E_i sous l'effet de leur répulsion mutuelle, de leur attraction par les charges fixes, et du champ uniforme. On obtient ainsi le principe variationnel suivant.

Principe variationnel

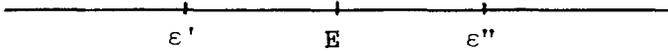
Les solutions de l'équation (72) rendent stationnaire le potentiel électrostatique suivant :

$$W\{E\} \equiv +\frac{1}{2} \sum_{\nu, i} \log |\varepsilon_\nu - E_i| - \sum_{i < j} \log |E_i - E_j| + \frac{1}{2G} \sum_i E_i. \tag{73}$$

L'énergie E est le centre de gravité du nuage de charges E_i qui est nécessairement symétrique par rapport à l'axe réel du fait de la "réalité" du système (72).

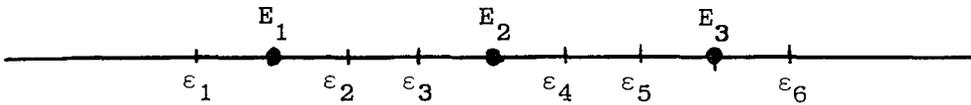
- Cette analogie explique intuitivement la possibilité de confluence d'une charge $E(+1)$ et de deux charges $\varepsilon(-1/2)$, dans la configuration instable suivante :

$$\tag{74}$$



- Elle permet de construire certaines classes de solutions. En particulier, il existe une solution d'énergie élevée définie par la configuration réelle suivante (cas $N = 2M$)

$$\tag{75}$$



- Elle permet sans doute la recherche sur ordinateur des "cols" de la fonction W ; partant d'une solution approchée $\{E^0\}$ on utilisera l'approximation quadratique W^1

$$W^1 = W^0 + \sum_i \left. \frac{\partial W}{\partial E_i} \right|_0 (E_i - E_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i, j} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial E_i \partial E_j} \right|_0 (E_i - E_i^0) (E_j - E_j^0), \tag{76}$$

pour déterminer le col de $W^{(1)}$; la matrice $\partial^2 W / \partial E_i \partial E_j$ est identique à $\frac{1}{2} D_{ij}$ définie par l'équation (58). On en déduira une valeur plus approchée $\{E^1\}$

$$E_i^{(1)} = E_i^{(0)} + 2 \sum_j (D^{-1})_{ij} \left. \frac{\partial W}{\partial E_j} \right|_0; \tag{77}$$

d'où l'amorce d'un processus itératif.

3. Application au système infini

3.1. FORME LIMITE DES ÉQUATIONS COUPLÉES. — Il est intéressant d'examiner comment les équations (37) ou (72) permettent d'obtenir l'énergie par particule et la fonction d'onde de l'état fondamental de l'Hamiltonien B.C.S. pour un système infini. Il s'agit d'étudier la limite

où le nombre d'états disponibles et le nombre de particules augmentent indéfiniment dans les conditions

$$G = \frac{g}{N}, \quad \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad g \text{ étant finis.} \quad (78)$$

Nous nous laisserons guider par l'analogie électrostatique précédemment décrite, qui permet de raisonner physiquement sur les distributions continues de charge. La donnée du spectre d'énergie des paires non perturbées est maintenant équivalente à celle d'une densité de charge négative $-\rho(\varepsilon)$, supportée par une portion Ω de l'axe réel. Puisque nous avons N états de paires, la charge totale sur Ω est

$$-\int_{\Omega} \rho(\varepsilon) d\varepsilon = -\frac{N}{2}. \quad (79)$$

Par exemple pour un système à trois dimensions on aurait

$$\Omega = [0, \infty]$$

avec

$$\rho(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}.$$

On peut aussi supposer que la force d'appariement n'existe que dans certains états qui occupent un intervalle d'énergie $[-\omega, +\omega]$ avec une densité uniforme.

Ceci posé, nous faisons l'hypothèse fondamentale, que, pour une famille de solutions limites de (37) ($N \rightarrow \infty$), la distribution limite des charges $+1$ d'affixes E_i , a pour support un certain nombre d'arcs Γ_k , différentiables par morceaux, dont la réunion est appelée Γ . Cet ensemble Γ est évidemment symétrique par rapport à l'axe réel. On désigne par a_k et b_k l'origine et l'extrémité de Γ_k , ce qui définit une orientation de Γ_k .

La densité de charge positive sur Γ au point courant ξ sera noté $r(\xi)$. D'après l'analogie électrique nous avons les expressions suivantes du nombre de paires et de l'énergie totale

$$\int_{\Gamma} r(\xi) |d\xi| = M, \quad (80)$$

$$\int_{\Gamma} \xi r(\xi) |d\xi| = E. \quad (81)$$

Le potentiel électrostatique complexe dû aux distributions $\rho(\varepsilon)$ et $r(\xi)$ est donc une fonctionnelle de Γ et de r :

$$\begin{aligned} W\{r\} \equiv & \int_{\Omega} \rho(\varepsilon) d\varepsilon \int_{\Gamma} r(\xi) |d\xi| \log(\xi - \varepsilon) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} r(\xi) r(\xi') \log(\xi - \xi') |d\xi| |d\xi'| \\ & + \frac{1}{2G} \int_{\Gamma} \xi r(\xi) |d\xi|. \end{aligned} \quad (82)$$

L'équilibre des charges sur un système d'arcs donné fournit autant d'équations que d'arcs

$$\frac{\delta W}{\delta r(\xi)} = 0, \quad \xi \in \Gamma_k, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (83)$$

Elles expriment que les Γ_k sont des arcs d'équipotentiels de la distribution totale (sauf si l'un des arcs coïncide avec un segment de l'axe réel).

Enfin W doit être stationnaire par rapport aux variations des arcs, ce qui implique que le champ électrique total est nul en tout point de Γ . On en déduit la forme limite des équations (37)

$$\int_{\Omega} \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \xi} - P \int_{(\Gamma)} \frac{r(\xi') |d\xi'|}{\xi' - \xi} - \frac{1}{2G} = 0 \quad \xi \in \Gamma. \quad (84)$$

3.2. SOLUTION FORMELLE. — Cette équation intégrale singulière est d'un type très classique [8]. Orientons chaque arc Γ_k de son origine a_k à son extrémité b_k et appelons L_k le lacet orienté positivement autour de Γ_k . Nous cherchons un champ $h(\xi)$ analytique en dehors de Γ et de l'axe réel, tel que

$$r(\xi)|d\xi| = \frac{1}{2\pi i} (h_+(\xi) - h_-(\xi)) d\xi, \quad \xi \in \Gamma, \tag{85}$$

où $h_+(\xi)$ et $h_-(\xi)$ désignent respectivement les valeurs limites de $h(\xi)$ à droite et à gauche de Γ . Posant

$$R(\xi) = \left[\prod_{k=1}^K (\xi - a_k)(\xi - b_k) \right]^{1/2}, \tag{86}$$

essayons une solution qui s'annule aux extrémités de Γ , de la forme suivante :

$$h(\xi) = R(\xi) \int_{\Omega} \frac{\varphi(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \xi}; \tag{87}$$

comme le champ doit tendre vers une constante à l'infini, les $K - 2$ premiers moments de la fonction φ doivent être nuls.

Nous avons alors les égalités,

$$\int_{\Gamma} \frac{r(\xi')|d\xi'|}{\xi - \xi'} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h_+(\xi') - h_-(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi' = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{h(\xi') d\xi'}{\xi - \xi'}, \quad \xi \in \mathbb{C}\Gamma. \tag{88}$$

Substituant dans l'équation (88) la valeur de $h(\xi)$ donnée par (87) et (86), et appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$P \int_{\Gamma} \frac{r(\xi')|d\xi'|}{\zeta - \zeta'} = \text{demi somme des valeurs à droite et à gauche de}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} R(\xi') \int_{\Omega} \frac{\varphi(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \xi'} = - \int_{\Omega} \frac{\varphi(\varepsilon) R(\varepsilon)}{\varepsilon - \xi} d\varepsilon + \int_{\Omega} \varepsilon^{K-1} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{89}$$

Le second terme du second membre de l'équation (89) provient du résidu à l'infini. Si l'on compare les égalités (89) et (84), on obtient la solution

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\rho(\varepsilon)}{R(\varepsilon)}$$

avec les conditions

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{K-1} \frac{\rho(\varepsilon)}{R(\varepsilon)} d\varepsilon = \frac{1}{2G}. \tag{90}$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon^k \frac{\rho(\varepsilon)}{R(\varepsilon)} d\varepsilon = 0, \quad 0 \leq k < K. \tag{91}$$

Le champ $h(\xi)$, d'où l'on déduit la densité de charge sur les arcs par l'égalité suivante

$$r(\xi) = \frac{1}{\pi} |h(\xi)|,$$

est donné par l'expression

$$h(\xi) = R(\xi) \int_{\Omega} \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{R(\varepsilon) \varepsilon - \xi}. \tag{92}$$

Il a la valeur $-1/2G$ à l'infini.

Il reste à déterminer la forme des arcs, en écrivant que ce sont des arcs de courbes équipotentielles de la distribution totale :

$$\mathcal{R} \int_{a_k}^{\xi} h(\xi') d\xi' = 0, \quad \xi \in \Gamma_k. \quad (93)$$

La solution se généralise aisément au cas où il existerait un seul arc fermé, comme nous le verrons sur un exemple très simple.

3.3. LES ÉQUATIONS DE B.C.S.. — Nous ne savons pas *a priori* quel nombre d'arcs choisir pour obtenir l'état fondamental. Il semble que pour un nombre K donné, les équations (90), (91) et (93) n'admettent qu'un nombre fini de solutions pour les extrémités des arcs. On obtiendrait ainsi des classes finies remarquables d'états excités, à condition que ces solutions existent. Nous allons examiner le cas où il existe un seul arc de condensation des charges positives (points E_i), nécessairement symétrique par rapport à l'axe réel. Dans une première étape nous imposerons que l'arc Γ ne coupe pas le segment chargé Ω .

Nous définissons les extrémités de l'arc Γ

$$a = \varepsilon_0 - i\Delta, \quad b = \varepsilon_0 + i\Delta. \quad (94)$$

On obtient alors, par application directe de la théorie précédente pour $K = 1$, des équations d'allure familière, mais dont les conditions de validité sont à expliciter :

- l'expression du champ électrostatique

$$h(\xi) = \sqrt{(\xi - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2} \int_{\Omega} \frac{\rho(\varepsilon)}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - \xi}, \quad (95)$$

- "l'équation du gap"

$$\int_{\Omega} \frac{\rho(\varepsilon)}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2}} = \frac{1}{2G}, \quad (96)$$

- "l'équation pour le niveau de Fermi"

$$M = \frac{1}{2\pi i} \int_L h(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2}} \right) \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (97)$$

- "l'énergie de l'état superconducteur"

$$E = \frac{1}{2\pi i} \int_L \xi h(\xi) d\xi = -\frac{\Delta^2}{2G} + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2}} \right) \varepsilon \rho(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (98)$$

Reste à déterminer l'arc Γ comme équipotentiel. L'équation (93) nous donne dans le plan de la variable complexe

$$z = \sqrt{(\xi - \varepsilon_0)^2 - \Delta^2} = x + iy \quad (99)$$

coupé en $[0, \Delta]$, l'équation de Γ :

$$\int_{\Omega} \rho(\varepsilon) d\varepsilon \left\{ \frac{x}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2}} + \frac{1}{4} \log \frac{\left(x - \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2} \right)^2 + y^2}{\left(x + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2} \right)^2 + y^2} \right\}. \quad (100)$$

Il est nécessaire que, pour $y = 0$, cette équation n'ait pas de racines en x sur Ω , afin que la solution précédente soit valable. Nous montrerons sur un exemple l'existence d'une telle solution. Il faut bien noter que les équations (96), (97) et (98) ne sont obtenues que dans l'hypothèse de condensation des E_i sur un seul arc ne coupant pas Ω . C'est à cette seule condition que la détermination du radical qui intervient dans les formules (96) et les suivantes est positive, et que les résultats asymptotiquement exacts de Bogoliubov-Valatin sont retrouvés. Il est alors probable qu'il s'agit bien là de l'état fondamental du système infini.

Nous n'essayerons pas de justifier dans cet article, l'appellation de "gap" ou "lacune en énergie" pour la quantité Δ , ce qui nécessiterait l'étude des premiers états excités. Cependant nous avons dès maintenant l'expression du nombre d'occupation du niveau ε , grâce à l'équation (56), qui, à la limite du système infini, nous donne

$$n(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\delta E}{\delta \rho(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Delta^2}} \right). \tag{101}$$

3.4. APPLICATION AU SYSTÈME À DEUX NIVEAUX. — Pour avoir une idée de la condensation des charges, non triviale, même dans un cas très simple, nous prenons l'exemple de deux niveaux également dégénérés avec le remplissage complet du niveau inférieur. Nous avons donc :

$$\rho(\varepsilon) = \frac{N}{4} [\delta(\varepsilon + \varepsilon_1) + \delta(\varepsilon - \varepsilon_1)], \quad M = \frac{N}{2}. \tag{102}$$

Supposons que la condensation des charges s'effectue dans les hypothèses de la théorie précédente ; on déduit de l'équation (97)

$$\varepsilon_0 = 0, \tag{103}$$

et de l'équation (96)

$$\varepsilon_1^2 + \Delta^2 = g^2, \quad g = GN, \tag{104}$$

ce qui implique que la constante de couplage g ne soit pas inférieure à ε_1 , demi distance entre les deux niveaux.

Nous devons étudier plus loin le cas $g < \varepsilon_1$, et modifier notre hypothèse. L'équation (100) pour l'arc Γ s'écrit

$$\frac{4x}{g} + \log \frac{(x - g)^2 + y^2}{(x + g)^2 + y^2} = 0 \tag{105}$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - g^2 = \frac{2xg}{\text{th } x/g}.$$

La courbe représentative est donnée figure 1 dans le plan (x, y) et dans le plan ξ . Finalement on trouve pour l'énergie

$$E = -g \frac{N}{2}.$$

Lorsque g tend vers ε_1 , Δ tend vers zéro et l'arc Γ devient une courbe fermée entourant les charges situées en $-\varepsilon_1$. Pour $g < \varepsilon_1$, nous sommes conduits à supposer que Γ est une courbe différentiable fermée entourant $-\varepsilon_1$ et la solution obtenue montrera la justesse de l'hypothèse.

Supposons donc que Γ soit une courbe entourant une partie ω du segment Ω de l'axe réel.

Définissant la fonction $s(\xi)$ sur Γ par l'égalité

$$s(\xi') d\xi' = r(\xi') |d\xi'|, \quad \xi' \in \Gamma. \tag{106}$$

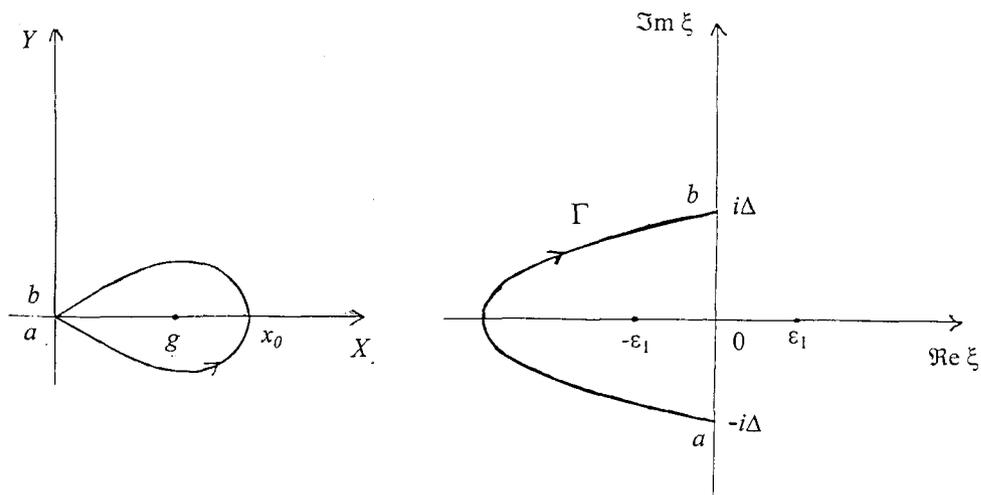


Fig. 1. — Point anguleux à (60°) à l'origine ; $x_0 > g$, tangente verticale en x_0 .

Nous avons la solution

$$s(\xi') = -\frac{1}{\pi^2} P \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} \left[-\frac{1}{2G} + \int_{\Omega} \frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon - \xi} d\varepsilon \right]$$

ou encore

$$s(\xi') = \frac{i}{\pi} \left[-\frac{1}{2G} + \int_{\omega} \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \xi'} - \int_{\omega} \frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon - \xi'} d\varepsilon \right]. \quad (107)$$

Dans l'exemple choisi, supposant que Γ entoure le seul niveau $-\varepsilon_1$, on obtient

$$s(\xi') = \frac{i}{\pi} \left[-\frac{1}{2G} + \frac{N}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 - \xi'^2} \right], \quad \xi' \in \Gamma. \quad (108)$$

La seule équipotentielle n'ayant que de points à l'infini a pour équation

$$\mathcal{R} \left(\frac{\xi}{g} + \frac{1}{2} \log \frac{\xi - \varepsilon_1}{\xi + \varepsilon_1} \right) = 0$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - \varepsilon_1^2 = \frac{2x\varepsilon_1}{\text{th } x/g}, \quad \xi = x + iy. \quad (109)$$

L'équation (109) représente deux courbes fermées chacune un des points $+\varepsilon_1$ et $-\varepsilon_1$. Pour être cohérent, nous devons choisir pour Γ , la partie $x < 0$. Lorsque g est très petit, Γ est presque un petit cercle de centre $-\varepsilon_1$ et de rayon

$$2\varepsilon_1 e^{-2\varepsilon_1/g}.$$

L'énergie du système est

$$E = \int_{(\Gamma)} \xi' s(\xi') d\xi' = \int_{\omega} 2\varepsilon \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (110)$$

c'est-à-dire dans notre cas l'énergie non perturbée $-\frac{N}{2}\varepsilon_1$.

En résumé, on obtient donc, le résultat connu :

$$E = \begin{cases} -\frac{N}{2}\varepsilon_1 & g < \varepsilon_1 \quad (\text{solution triviale}) \\ -\frac{N}{2}g & g > \varepsilon_1. \end{cases} \tag{111}$$

L'intérêt de cette analyse n'est évidemment pas de retrouver ce résultat, mais d'étudier la condensation des racines E_i , dont il est nécessaire de connaître la distribution pour construire la fonction d'onde dans les cas plus complexes où les niveaux ε ne sont pas nécessairement discrets, mais répartis sur leur support avec une densité quelconque comme dans l'exemple suivant.

3.5. APPLICATION AU SYSTÈME À DENSITÉ DE NIVEAU CONSTANTE. — Si nous essayons d'appliquer brutalement les résultats obtenus pour la condensation en un seul arc, au cas d'un système à densité de niveau constante dans un intervalle $[-\omega, +\omega]$, nous obtenons pour le champ électrostatique (95), à la limite $\omega \gg \Delta$

$$h(\xi) = \rho_0 \log \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}, \quad |\xi| \ll \omega \tag{112}$$

(dans le cas particulier du remplissage $M = N/2$ où l'on a $\varepsilon_0 = 0$). La quantité ρ_0 désigne la densité uniforme des niveaux de paires :

$$\rho_0 = \frac{N}{4\omega}.$$

Si nous cherchons maintenant les courbes équipotentielles possibles passant par les points $\varepsilon_0 \pm i\Delta$, nous trouvons qu'elles satisfont l'égalité suivante :

$$\mathcal{R} \left[\xi \log \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} + 2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \right] = 0. \tag{113}$$

Pour voir plus clair, appliquons le demi-plan $\text{Im } \xi \geq 0$ sur la bande $\lambda > 0, -\pi/2 < \mu < \pi/2$, par la transformation conforme

$$\xi = i\Delta \operatorname{ch} (\lambda + i\mu).$$

Dans le plan (λ, μ) , l'équipotentielle vérifie

$$\lambda \operatorname{th} \lambda + \mu \operatorname{cotg} \mu = 1. \tag{114}$$

Les figures 2 et 3 en donnent l'allure dans les deux plans complexes. Les points O et O' sont des points de champ nul et constituent les extrémités de l'arc cherché qui doit donc contenir OAO' ou bien OBO' (Fig. 3). La direction du champ à l'infini impose le choix OAO' . Le fait important est que cet arc coupe l'axe réel en A d'abscisse

$$\varepsilon_A = \varepsilon_0 - \Delta \operatorname{sh} \lambda_0, \tag{115}$$

$$\lambda_0 \operatorname{th} \lambda_0 = 1.$$

Ceci contredit l'hypothèse de non-intersection de Γ avec le support des charges négatives. Si Γ "traversait" l'axe réel en A , la détermination du radical dans les expressions (95) et suivantes changerait de signe à la traversée de Γ et la valeur du champ ne serait pas donnée par la

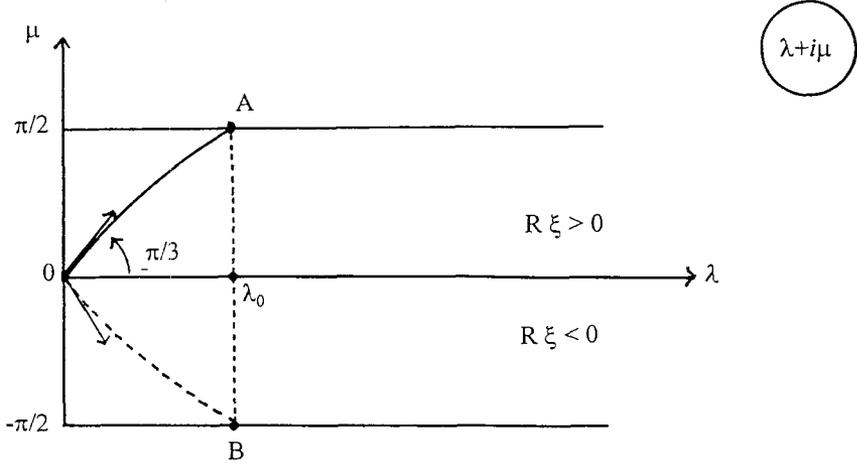


Fig. 2.

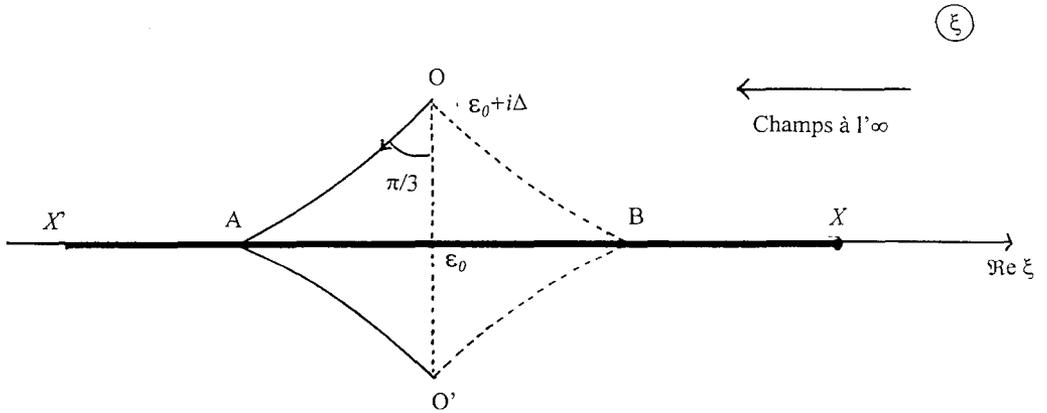


Fig. 3.

formule (112). La seule issue possible est de supposer qu'une partie des charges positives se condensent sur le segment $[X'A]$ de l'axe réel de sorte que Γ soit constitué des arcs contigus $O'A, AX', X'A, AO$. (Fig. 4) Quelle est la densité de charge totale sur le segment $[X'A]$? La composante normale à $[X'A]$ du champ électrique donné par l'expression (95) (où le plan complexe est coupé selon Γ) est au-dessus de Γ en un point $\xi = x + i\eta$ ($\eta > 0$ petit)

$$\text{Im} \left\{ -\sqrt{x^2 + \Delta^2} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{d\varepsilon \rho(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \frac{1}{\varepsilon - x - i\eta} \right\} = -\pi\rho(x).$$

D'après la formule (85), ceci nous donne une densité positive totale en x ($-\omega < x < \varepsilon_A$)

$$+\rho(x)$$

exactement opposée à la densité donnée sur l'axe réel. Ceci implique que la densité de charge positive venant de Γ est au total deux fois plus forte que la densité donnée des charges négatives

$$r(x) = 2\rho(x), \quad -\omega < x < \varepsilon_A.$$

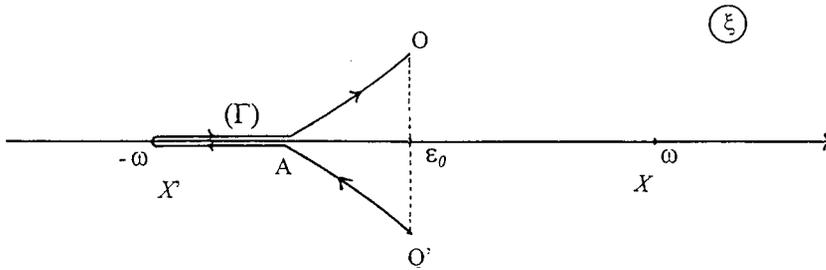


Fig. 4.

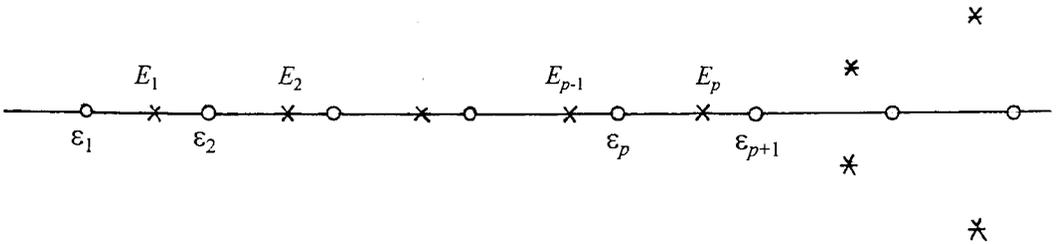


Fig. 5. — (o) charge $-1/2$ fixées, (x) charge $+1$.

La méthode heuristique que nous venons d'utiliser ne constitue pas une preuve que la condensation se passe bien ainsi, quoiqu'il soit évident que la méthode fournisse bien une solution des équations (84).

En résumé, dans le cas usuel d'une densité de niveaux uniforme ρ_0 la condensation des charges nous donne la distribution suivante :

a) deux arcs symétriques OA et AO' , (Fig. 3) dont la représentation paramétrique est la suivante

$$\xi \begin{cases} \varepsilon &= -\Delta \operatorname{sh} \lambda \sin \mu + \varepsilon_0 \\ |\eta| &= \Delta \operatorname{ch} \lambda \cos \mu \end{cases} \quad (116)$$

$$\lambda \operatorname{th} \lambda + \mu \operatorname{cotg} \mu = 1$$

$$0 < \lambda < \lambda_0, \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2}.$$

La densité de charge au point courant ξ est

$$r(\xi) = \frac{2\rho_0}{\pi} \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}. \quad (117)$$

b) Les charges négatives sur la portion de l'axe réel à droite de A sont inchangées avec la densité négative $-\rho_0$.

c) La densité de charge sur la portion de l'axe réel à gauche de A devient positive et égale à $+\rho_0$.

L'étude de la condensation sur l'axe réel à gauche du point A exigerait de revenir au cas fini où les niveaux sont discrets. Il est plausible que la configuration d'équilibre des premières charges E_1, E_2, \dots, E_p avec $E_p \sim \varepsilon_A$ soit celle indiquée figure 5 :

Pour s'en rendre compte, on peut développer l'argument approximatif suivant. Partant de valeurs très petites de la constante de couplage, on aura pour l'état fondamental une solution du type suivant pour les affixes E_i :

$$E_i = \varepsilon_i - \delta_i \quad (118)$$

avec

$$\delta_i \ll \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq M.$$

On obtient la quantité δ_i au moins jusqu'au second ordre en G à partir des équations (37),

$$\frac{1}{\delta_i} + \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_i} - \sum_{\nu=1}^M \frac{1}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_i} = \frac{1}{G} \quad (119)$$

Effectuons le calcul de δ_i en supposant que les niveaux sont équidistants (distance δ) ; on obtient

$$\delta_i \propto \frac{G}{1 + \frac{G}{\delta} \log \frac{(|M-i|+1)^2}{i(N-i+1)}}. \quad (120)$$

Tant que la constante de couplage G est bien inférieure à la quantité $\frac{1}{2}\delta/\log \frac{N}{2}$, la configuration proposée où les charges positives et négatives alternent est donc la bonne. Mais à la limite $N \rightarrow \infty$, une telle solution n'est jamais globalement acceptable ; en effet l'expression (120) du déplacement du niveau ε_i s'écrit à la limite

$$\frac{\delta_i}{\delta} = \frac{\frac{g}{2\omega}}{1 + \frac{g}{2\omega} \log \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2}{\omega^2 - \varepsilon_i^2}}. \quad (121)$$

avec

$$G = \frac{g}{N}, \quad \delta = \frac{2\omega}{N}.$$

La solution (121) n'est pas acceptable, puisque le "déplacement" δ_i ne reste pas borné, ce qui est contraire à notre hypothèse $\delta_i \ll \delta$. On peut penser que la solution (121) convient pour les niveaux ε_i vérifiant l'inégalité

$$|\varepsilon_i - \varepsilon_0| > \omega e^{-\omega/g} \quad 1 \leq i < P.$$

On en conclut qu'en dehors d'un voisinage du niveau de Fermi de l'ordre Δ , les E_i sont réels et alternent avec les ε_i . La densité moyenne est alors exactement opposée à la densité initiale sur cette partie de l'axe réel, comme l'a suggéré l'étude directe du système infini.

Appendice A

Proposition

Si $\{q\} \equiv \{q_1 q_2 \dots q_M\}$ est une solution du système d'équations algébriques

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{k_\nu - q_i} = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{1}{q_j - q_i}, \quad 1 \leq i \leq M, \quad (A.1)$$

les coefficients $C^{\{q\}}(k_\alpha k_\beta k_\gamma \dots k_\delta)$ sont définis

$$C^{\{q\}}(k_\alpha k_\beta k_\gamma \dots k_\delta) = \sum_R \frac{1}{k_\alpha - q_{R1}} \frac{1}{k_\beta - q_{R2}} \dots \frac{1}{k_\delta - q_{RM}}, \tag{A.2}$$

vérifient les relations

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{C}^{\mathcal{F}_{M-1}}} C^{\{q\}}(k_\alpha k_\beta k_\gamma \dots k_\delta) = 0, \tag{A.3}$$

quel que soit l'ensemble $\mathcal{F}_{M-1} \equiv \{\beta\gamma \dots \delta\}$ formant un choix de $M - 1$ indices distincts.

Preuve

Étant donné que les nombres k sont permutables, il suffit de montrer l'égalité :

$$\sum_{\alpha=M}^M C(k_1 k_2 \dots k_{M-1} k_\alpha) = 0. \tag{A.4}$$

Utilisons la notation du permanent pour écrire le coefficient C

$$C(k_1 k_2 \dots k_{M-1} k_M) = \left| \frac{1}{k_\lambda - q_i} \right|_{\substack{1 \leq \lambda \leq M \\ 1 \leq i \leq M}}. \tag{A.5}$$

Il nous faut montrer l'égalité

$$\sum_{\alpha=M}^N \left| \frac{1}{k_1 - q_i} \frac{1}{k_2 - q_i} \dots \frac{1}{k_{M-1} - q_i} \frac{1}{k_\alpha - q_i} \right| = 0, \tag{A.6}$$

où la notation met en évidence la ligne typique n^0_i du permanent.

Compte tenu de l'hypothèse (A.1), l'égalité à montrer est équivalente à la suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^{M-1} \left| \frac{1}{k_1 - q_i} \frac{1}{k_2 - q_i} \dots \frac{1}{k_\alpha - q_i} \frac{1}{k_\alpha - q_i} \dots \frac{1}{k_{M-1} - q_i} \right| \\ &= 2 \sum_{j=1}^M \left| \frac{1}{k_1 - q_i} \frac{1}{k_2 - q_i} \dots \frac{1}{k_{M-1} - q_i} \frac{1}{q_j - q_i} \right| \end{aligned} \tag{A.7}$$

où l'on convient de placer 0 à la place du terme " $\frac{1}{q_j - q_i}$ " pour $j = i$, d'après l'équation (A.1).

Nous allons évaluer la somme qui figure au premier membre de l'égalité à montrer (A.7). On développe chaque permanent suivant les éléments des deux colonnes identiques et l'on obtient

$$\sum_{i \neq j} \sum_{\alpha=1}^{M-1} \frac{1}{k_\alpha - q_i} \frac{1}{k_\alpha - q_j} \left| \frac{1}{k_\lambda - q_\ell} \right|_{\substack{\lambda \neq \alpha, M \\ \ell \neq i, j \quad 1 \leq \lambda \leq M \\ 1 \leq \ell \leq M}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha=1}^{M-1} \frac{1}{q_i - q_j} \left(\frac{1}{k_\alpha - q_i} - \frac{1}{k_\alpha - q_j} \right) \left| \frac{1}{k_\lambda - q_\ell} \right|_{\substack{\lambda \neq \alpha, M \\ \ell \neq i, j}} + + \\
 &= \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha=1}^{M-1} \frac{1}{q_i - q_j} \frac{1}{k_\alpha - q_i} \left| \frac{1}{k_\lambda - q_\ell} \right|_{\substack{\lambda \neq \alpha, M \\ \ell \neq i, j}} + + \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha=1}^{M-1} \frac{1}{q_j - q_i} \frac{1}{k_\alpha - q_j} \left| \frac{1}{k_\lambda - q_\ell} \right|_{\substack{\lambda \neq \alpha, M \\ \ell \neq i, j}}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Considérant seulement la première ligne du dernier membre de (A.8), on effectue la sommation sur l'indice j pour obtenir :

$$\sum_i \sum_{\alpha=1}^{M-1} \frac{1}{k_\alpha - q_i} \left| \frac{1}{k_1 - q_j} \frac{1}{k_2 - q_j} \cdots \frac{1}{k_{\alpha-1} - q_j} \frac{1}{k_{\alpha+1} - q_j} \cdots \frac{1}{k_{M-1} - q_j} \frac{1}{q_i - q_j} \right|_{j \neq i} + + \tag{A.9}$$

Ici est mis en évidence la ligne typique $n^0 j$ d'un permanent d'ordre $M - 1$. La sommation est ensuite effectuée sur l'indice α pour obtenir

$$\sum_i \left| \frac{1}{k_1 - q_j} \frac{1}{k_2 - q_j} \cdots \frac{1}{k_\alpha - q_j} \cdots \frac{1}{k_{M-1} - q_j} \frac{1}{q_i - q_j} \right| + \tag{A.10}$$

avec la même convention pour écrire 0 au lieu de $\frac{1}{q_i - q_j}$, lorsque i et j coïncident

La sommation qui figure dans la seconde ligne du dernier membre des égalités (A.8) donne une contribution identique à l'expression (A.10). Cette contribution doublée est bien identique au second membre de (A.7), qui est donc une égalité démontrée.

Notons enfin que les coefficients $C^{(q)}$ sont réels, si les k le sont. Le système (A.1) est un système algébrique à coefficients réels. Les nombres q interviennent par paires conjuguées : la somme (A.2) est donc réelle.

Appendice B

Proposition

Il existe en général exactement

$$g_M = C_M^N - C_{M-1}^N$$

solutions distinctes $\{q\}$ au système d'équations algébriques

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{k_\nu - q_i} - 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{q_j - q_i} = 0 ; \quad i \in [1, M]. \tag{B.1}$$

Preuve

a) Les nombres k étant donnés, en général distincts, nous montrons d'abord que la résolution du système (B.1) conduit au problème équivalent suivant :

• Étant donné un polynôme $K(z)$ dont les racines sont distinctes, trouver tous les polynômes $Q(z)$ ayant toutes leurs racines simples et distinctes de celles de K , de sorte que

$$KQ'' - K'Q'$$

soit divisible par Q , avec les conditions données :

$$\begin{aligned} d^0 K &= N, \\ d^0 Q &= M. \end{aligned} \tag{B.2}$$

En effet, si l'on pose

$$K(z) = \prod_{\nu=1}^N (z - k_\nu), \tag{B.3}$$

$$Q(z) = \prod_{i=1}^M (z - q_i), \tag{B.4}$$

les équations (B.1) sont équivalentes aux suivantes

$$\frac{K'(q_i)}{K(q_i)} - \frac{Q''(q_i)}{Q'(q_i)} = 0, \quad \text{si } Q(q_i) = 0, \tag{B.5}$$

puisqu'elles conditions énoncées entraînent

$$\begin{aligned} K(q_i) &\neq 0, \\ Q'(q_i) &\neq 0, \quad 1 \leq i \leq M. \end{aligned} \tag{B.6}$$

b) Pour l'énumération des solutions, nous partons du résultat suivant dû à Heine et cité par Széggö⁽¹⁾.

Il existe en général exactement C_M^{N+M-2} polynômes Q de degré M tels que $AQ'' + BQ'$ soit divisible par Q , où A et B sont deux polynômes de degré N et $N - 1$ respectivement. (Si A et B sont tous les deux de degré N il existe en général C_M^{N+M-1} solutions).

Dans le cas traité nous avons

$$\begin{aligned} A &\equiv K, \\ B &\equiv K', \end{aligned} \tag{B.7}$$

et l'on peut montrer facilement que les polynômes Q qui vérifient l'identité

$$KQ'' - K'Q' - RQ \equiv 0, \tag{B.8}$$

peuvent avoir des racines multiples, d'ordre 2 au plus, qui sont alors des racines communes de K et de Q . Il faut donc éliminer de notre comptage de telles solutions.

c) Supposons que Q ait au moins p racines doubles qui sont donc p racines de K . Posons :

$$\begin{aligned} Q &= U^2 Q_1 \\ K &= U K_1, \end{aligned} \tag{B.9}$$

où U est un diviseur quelconque de K de degré p . De l'identité (B.10), nous déduisons

$$KQ_1'' + (3U'K_1 - UK_1')Q_1' - R_1Q_1 \equiv 0. \tag{B.10}$$

⁽¹⁾ Voir référence 7 Chapitre VI.8.

D'après le résultat cité de Heine, il existe en général $\mathcal{M}_p = C_{M-2p}^{N+M-2p-2}$ solutions $[Q_1, R_1]$ à l'identité (B.11) pour chaque U de degré p . Le nombre \mathcal{M}_p est donc le nombre de polynômes Q de degré M ayant au moins p racines doubles prescrites.

Appelons \mathcal{N}_p le nombre de solutions Q du problème (B.9) ayant exactement p racines doubles prescrites. Il est aisé d'exprimer \mathcal{M}_p en fonction des \mathcal{N} . Un diviseur U étant donné, les deux autres racines doubles de Q sont à choisir parmi les $N - p$ zéros restant de K . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &= \mathcal{N}_p + (N - p)\mathcal{N}_{p+1} + \frac{(N - p)(N - p - 1)}{2}\mathcal{N}_{p+2} + \dots \\ &= \sum_{r \geq 0} C_r^{N-p} \mathcal{N}_{p+r}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Or, nous cherchons le nombre de polynômes Q sans zéros doubles, qui est justement \mathcal{N}_0 ; il suffit donc d'inverser le système (B.12) et pour cela nous utilisons l'identité suivante

$$\sum_{p \geq 0} (-)^p C_{M-2p}^{N+M-2p-2} C_p^N = C_M^N - C_{M-1}^N \equiv g_M. \tag{B.12}$$

Cette identité se démontre simplement en égalant les coefficients de x^M dans le développement en puissance de x de l'égalité suivante :

$$(1 - x^2)^N \frac{1}{(1 - x)^{N-1}} = (1 + x)^N - x(1 + x)^N.$$

Reportons alors dans (B.13) le développement (B.12) de la quantité

$$C_{M-2p}^{N+M-2p-2} = \mathcal{M}_p.$$

On obtient

$$g_M = \sum_{p \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-)^p C_r^{N-p} C_p^N \mathcal{N}_{p+r}.$$

Après avoir effectué la sommation à $p + r$ constant, on trouve

$$g_M = \mathcal{N}_0,$$

ce qui démontre la proposition (B.1).

Appendice C

On considère le système linéaire suivant pour les C_M^N coefficients $e(\mathcal{F})$ (\mathcal{F} varie sur les combinaisons de M indices distincts choisis parmi les N premiers entiers), tel qu'il est donné par l'équation (36) avec

$$\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}, P \text{ permutation d'ordre } N.$$

$$(\varepsilon_{P_1} + \varepsilon_{P_2} + \dots + \varepsilon_{P_M} - E) e(P_1, P_2, \dots, P_M)$$

$$-G \sum_{i=1}^M \sum_{P_i=1}^N e(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_M)$$

$$+G \sum_{i < j} e(P1, \dots, P_i, \dots, P_i, \dots, PM) + e(P1, \dots, P_j, \dots, P_j, \dots, PM) \tag{C.1}$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ i & & j & & i & & j \end{matrix}$

Proposition

Si les M nombres complexes distincts $\{E\} = \{E_1 E_2 \dots E_M\}$ sont les racines du système algébrique

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} - 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j - E_i} = \frac{1}{G}, \quad 1 \leq i \leq M, \tag{C.2}$$

les coefficients

$$e(P1, P2, \dots, PM) = \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P1} - E_{R1}} \frac{1}{\varepsilon_{P2} - E_{R2}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{PM} - E_{RM}}$$

ou bien

$$e(\mathcal{F}) = \text{perm} \left| \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} \right|_{\substack{\nu \in \mathcal{F} \\ 1 \leq i \leq M}}, \tag{C.3}$$

constituent une solution du système linéaire, avec $E = E_1 + E_2 + \dots + E_M$.

Démonstration

Nous transposons ici la méthode de preuve de la proposition de l'Appendice A, mais en développant complètement les sommations.

a) On obtient pour la première ligne de l'expression (C.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\equiv (\varepsilon_{P1} + \dots + \varepsilon_{PM} - E) e(P1, P2, \dots, PM) \\ &= \sum_R [(\varepsilon_{P1} - E_{R1}) + (\varepsilon_{P2} - E_{R2}) + \dots + (\varepsilon_{PM} - E_{RM})] \\ &\quad \frac{1}{\varepsilon_{P1} - E_{R1}} \frac{1}{\varepsilon_{P2} - E_{R2}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{PM} - E_{RM}} \\ &= \sum_R \sum_{i=1}^M \frac{1}{\varepsilon_{P1} - E_{R1}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{P(i-1)} - E_{R(i-1)}} \frac{1}{\varepsilon_{P(i+1)} - E_{R(i+1)}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{PM} - E_{RM}}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

On obtient pour la seconde ligne de l'équation (C.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &\equiv -G \sum_{i=1}^M \sum_{P_i=1}^N \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P1} - E_{R1}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{P_i} - E_{Ri}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{PM} - E_{RM}} \\ &= -G \sum_R \sum_{i=1}^M f(E_{Ri}) \frac{1}{\varepsilon_{P1} - E_{R1}} \dots \frac{1}{\varepsilon_{P(i-1)} - E_{R(i-1)}} \frac{1}{\varepsilon_{P(i+1)} - E_{R(i+1)}} \\ &\quad \dots \frac{1}{\varepsilon_{PM} - E_{RM}} \end{aligned} \tag{C.5}$$

avec

$$f(E) = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E}. \tag{C.6}$$

c) Considérons alors la troisième ligne de l'équation (C.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \equiv & G \sum_{i < j} \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P_1} - E_{R_1}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_i} - E_{R_i}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_i} - E_{R_j}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_M} - E_{R_M}} \\ & + \frac{1}{\varepsilon_{P_1} - E_{R_1}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_j} - E_{R_i}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_j} - E_{R_j}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_M} - E_{R_M}}. \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples du produit des termes de rang i et j nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \equiv & 2G \sum_{i < j} \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P_1} - E_{R_1}} \cdots \frac{1}{E_{R_i} - E_{R_j}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_M} - E_{R_M}} \\ & + 2G \sum_{i < j} \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P_1} - E_{R_1}} \cdots \frac{1}{E_{R_j} - E_{R_i}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_M} - E_{R_M}}, \end{aligned} \tag{C.7}$$

\uparrow
 i

où l'on a constaté que la sommation sur R est identique à la sommation sur $R \times$ transposition (ij) , ce qui explique le facteur 2.

Rassemblons les deux sommes partielles au second membres de l'égalité (C.7) pour obtenir

$$\mathcal{L}_3 = 2G \sum_{i \neq j} \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P_1} - E_{R_1}} \cdots \frac{1}{E_{R_i} - E_{R_j}} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_M} - E_{R_M}}. \tag{C.8}$$

On peut alors effectuer la somme sur i , laissant fixés R et j ,

$$\sum_{i(\neq j)} \frac{1}{E_{R_i} - E_{R_j}} = \sum_{k(\neq R_j)} \frac{1}{E_k - E_{R_j}} = h(R_j) \tag{C.9}$$

On obtient finalement pour \mathcal{L}_3 donné par (C.8) :

$$\mathcal{L}_3 = 2G \sum_j \sum_R \frac{1}{\varepsilon_{P_1} - E_{R_1}} \cdots h(E_{R_j}) \cdots \frac{1}{\varepsilon_{P_M} - E_{R_M}}. \tag{C.10}$$

\uparrow
 j

Si nous rassemblons les contributions des équations (C.4), (C.5) et (C.10), nous obtiendrons

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = 0,$$

si nous pouvons choisir, quels que soient i et R :

$$1 - Gf(E_{R_i}) + 2Gh(R_i) = 0$$

c'est-à-dire d'après les définitions (C.6) et (C.9)

$$\frac{1}{G} = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_{\nu} - E_i} - 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j - E_i} = 0$$

quel que soit i , $1 \leq i \leq M$.

La proposition est donc démontrée.

Appendice D

Proposition

Il existe en général exactement C_M^N solutions distinctes du système algébrique

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\varepsilon_\nu - E_i} - 2 \sum_j' \frac{1}{E_j - E_i} = \frac{1}{G}, \quad 1 \leq i \leq M. \tag{D.1}$$

(L'écriture implique que les E_i sont distincts entre eux et distincts des ε).

Preuve

La preuve est tout à fait semblable à celle de l'appendice B.

Posant

$$\begin{aligned} K(z) &= \prod_{\nu=1}^N (z - \varepsilon_\nu) \\ Q(z) &= \prod_{i=1}^M (z - E_i). \end{aligned} \tag{D.2}$$

Il nous faut dénombrer tous les polynômes Q sans racines multiples qui satisfont à la condition suivante :

$$\text{le polynome } Q''K - Q'(G^{-1}K + K') \text{ est divisible par } Q, \tag{D.3}$$

K est un polynôme donné de degré N ayant tous ses zéros distincts, c'est ce que nous voulons dire par l'expression "en général" dans l'énoncé de la proposition.

D'après le résultat de Heine déjà cité, basé sur la théorie de l'élimination, il existe C_M^{N+M-1} polynômes Q tels que la condition (D.3) soit remplie. Mais ces polynômes peuvent avoir des racines doubles qui sont aussi des zéros de K . On les élimine du comptage exactement comme dans l'appendice B, en utilisant l'identité

$$C_M^N = \sum_p (-1)^p C_{M-2p}^{N+M-2p-1} C_p^N, \tag{D.4}$$

déduite de la suivante

$$(1+x)^N = (1-x^2)^N \frac{1}{(1-x)^N}.$$

Si \mathcal{M}_p désigne le nombre de polynômes Q ayant au moins p racines doubles prescrites, et \mathcal{N}_p le nombre de polynômes ayant exactement p racines doubles prescrites, on a

$$\mathcal{M}_p = C_{M-2p}^{N+M-2p-1} = \sum_{r=0} C_r^{N-p} \mathcal{N}_{p+r}. \tag{D.5}$$

On déduit alors des équations (D.4) et (D.5)

$$\mathcal{N}_0 = C_M^N.$$

Bibliographie

- [1] Gaudin M., Thèse (Université de Paris, Novembre 1967).
- [2] Mc. Guire, *J. Math. Phys.* **5** (1964) 622; **6** (1965) 432; Flicker M. and Lieb E. H., *phys. Rev.* **161** (1967) 179; Yang, C. N. Preprint (Octobre 1967).
- [3] Lane A. M., Nuclear Theory (Benjamin 1964).
- [4] Brown G. E., Unified theory of nuclear models and forces (N.H.P.C., 1967).
- [5] Kerman A. K., *Ann. of Phys.* **12** (1961) 300.
- [6] Högaasen-Feldman J., *Nucl. Phys.* **28** (1961) 258.
- [7] Szegő G., Orthogonal Polynomials (American Math. Soc. 1959).
- [8] Muskhelishvili N. I., Singular Integral Equations (P. Noordhoff, N.Y. Groningen-Holland).
- [9] Richardson R.W. et Sherman N., *Nuclear Physics* **52** (1964) 221; *J. Math. Physics* **6** (1965) 1034.

UN SYSTEME A UNE DIMENSION DE FERMIONS EN INTERACTION

M. GAUDIN

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay,
Gif-sur-Yvette

Reçu le 24 Novembre 1966

Nous avons étudié le système de N fermions de spin $\frac{1}{2}$, de même masse, en interaction δ sur un cercle de longueur L . Nous présentons dans cette note les équations couplées qui déterminent les niveaux d'énergie de ce système pour toutes les valeurs du spin total S , généralisant ainsi les résultats obtenus par Mc. Guire [1] pour $S = \frac{1}{2}N - 1$.

Après séparation des variables de spin, chaque fonction d'onde d'espace φ relative à un état de spin S est solution de l'équation de Schrödinger

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} + 2V \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \varphi = E\varphi \quad (1)$$

et possède le type de symétrie d'un tableau d'Young T à deux colonnes de longueurs respectives $\mu = \frac{1}{2}N + S$ et $\nu = \frac{1}{2}N - S$. Or la forme des solutions élémentaires de l'équation (1) est connue [1,2]. Celles-ci sont associées à un ensemble de N nombres complexes k_j . Dans toute région σ définie par un certain ordre des variables x_j ($0 \leq x_j \leq L$), une telle solution élémentaire s'écrit:

$$\varphi_{\sigma}(x_1 x_2 \dots x_N) = \sum_P A_{\sigma}\{P\} \exp\{i \sum_{j=1}^N k_{p_j} x_j\} \quad (2)$$

L'énergie correspondante est:

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2 \quad (3)$$

Le problème posé se traduit alors par deux sortes de conditions: a) les conditions de périodicité: φ admet la période L dans toutes les variables; b) les conditions de symétrie: φ est antisymétrique dans les variables de chaque colonne et vérifie la condition de Hund [3] qui lui assure la symétrie du tableau T .

Il en résulte un système d'équations couplées pour les k , qui font intervenir comme quantités auxiliaires ν nombres q et des angles θ et ψ :

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{V}(k_j - q_a) &= \cotg \frac{1}{2} \theta_{ja}, \quad 1 \leq j \leq N; \quad 1 \leq a \leq \nu \\ \frac{1}{V}(q_a - q_b) &= \cotg \frac{1}{2} \psi_{ab}, \quad 1 \leq a, b \leq \nu \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\psi_{ab} = -\psi_{ba}$$

b) Equations aux limites

$$Lk_j = 2\pi n_j + \sum_{a=1}^{\nu} \theta_{ja}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (4b)$$

n_j entiers.

c) Equations de symétrie

$$\sum_{j=1}^N \theta_{ja} = \sum_{b=1}^{\nu} \psi_{ba}, \quad 1 \leq a \leq \nu. \quad (4c)$$

Les solutions admissibles de ce système (4) sont déterminées de la façon suivante basée sur l'hypothèse de continuité des états en fonction de V .

a) la détermination de chaque angle θ et ψ est continue et tend vers zéro avec V .

b) les valeurs limites

$$\lim_{V \rightarrow 0} k_j = k_j^0 = 2\pi n_j / L,$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} q_a = q_a^0,$$

forment un ensemble de nombres quantiques noté $\{n\}$ et $\{q^0\}$ qui caractérise chaque état du système. Les entiers n décrivent l'occupation des états d'impulsion individuels par des fermions sans interaction; les n sont donc distincts ou bien forment des paires distinctes (correspondant aux paires dans un état singulet de spin). Pour chaque choix $\{n\}$, les quantités q_a^0 , toutes distinctes, sont solutions d'un système algébrique:

a) si les n_j sont tous distincts, le système est le suivant:

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{k_j^0 - q_a^0} = 2 \sum_{b=1}^{\nu} \frac{1}{q_b^0 - q_a^0}, \quad 1 \leq a \leq \nu; \quad (5)$$

b) s'il existe l paires, on montre que l nombres q^0 coïncident avec les k^0 des paires. Les équations (6) subsistent alors entre les $N - 2l$

nombre k_j^0 restant distincts et les $\nu - l$ quantités q^0 distinctes des k^0 .

Les k_j^0 étant fixés, le système (5) admet plusieurs solutions. Dans tous les cas le nombre des ensembles $\{q^0\}$ est précisément la dimension du sous espace des états d'un système de N fermions libres, de spin total S , occupant des états individuels d'espace donnés.

Enfin la forme explicite des fonctions d'onde correspondantes a été obtenue dans les régions de séparation complète entre particules de spin opposé.

Les équations (4) et celles qui s'en déduisent (en particulier dans le cas attractif à la limite du grand volume) sont la base de développements sur les propriétés du système à densité finie: énergie du fondamental de spin S , nature des premières excitations. Signalons que dans le cas attractif, les fermions peuvent se lier par paires; les niveaux d'énergie du gaz de paires liées sont identiques à une classe de niveaux du gaz de bosons attractifs en interaction δ (d'intensité $2V$). L'énergie par particules ϵ et la densité

ρ du fondamental de spin 0 sont données par des expressions identiques, au signe de V près, à celles de Lieb et Liniger [4] pour le gaz de bosons répulsifs:

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int_{-Q}^{+Q} f(q) dq; \quad \epsilon = -\frac{1}{4}V^2 + \frac{1}{\pi\rho} \int_{-Q}^{+Q} q^2 f(q) dq. \quad (6)$$

La fonction $f(q)$ est solution de l'équation intégrale

$$\frac{1}{2}f(q) = 1 + \frac{V}{2\pi} \int_{-Q}^{+Q} \frac{f(q') dq'}{(q-q')^2 + V^2}, \quad V < 0. \quad (7)$$

Références

1. J. B. McGuire, J. Math. Phys. 5 (1964) 622; 6 (1965) 432; 7 (1966) 123.
2. J. Zinn-Justin et E. Brezin, Un problème à N corps soluble, Compt. Rend. Acad. Sci., à paraître.
3. E. Lieb et D. Mattis, Phys. Rev. 125 (1962) 164.
4. E. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. 130 (1963) 1605.

* * * * *

Boundary Energy of a Bose Gas in One Dimension*

M. Gaudin†

Institute for Theoretical Physics, State University of New York, Stony Brook, New York 11790
(Received 25 February 1971)

By the superposition of Bethe's wave functions, using the Lieb's solution for the system of identical bosons interacting in one dimension via a δ -function potential, we construct the wave function of the corresponding system enclosed in a box by imposing the boundary condition that the wave function must vanish at the two ends of an interval. Coupled equations for the energy levels are derived, and approximately solved in the thermodynamic limit in order to calculate the boundary energy of this Bose gas in its ground state. The method of superposition is also applied to the analogous problem of the Heisenberg-Ising chain (not the ring).

I. INTRODUCTION

Let us consider the system of N identical bosons in one dimension interacting via a two-body δ -function potential of strength $2c$. In the repulsive case $c > 0$, the extensive properties are obtained by enclosing the system in a finite region of space. In one dimension, the simplest way of enclosing the system is to put the N particles on a circle of length L , avoiding boundary considerations, which are replaced by periodicity conditions. This problem has been solved by Lieb and Liniger¹ using Bethe's wave function.² A more "physical" way of enclosing the system is to enclose the particles in a box; in our case this means that the wave function must be zero at the two ends of an interval L . This problem too can be solved using Lieb and Liniger's and Bethe's method. An application is made by calculating the boundary energy of the boson gas in its ground state. Boundary energy will be defined as the energy difference between the box system and the periodic system of same length and density in the thermodynamic limit. This coincides with the usual definition of boundary energy as the coefficient of L^0 in the development of the energy as a function of the length L of the interval.

II. ELEMENTARY SOLUTION

We recall briefly the known results and introduce the notion of "elementary solution" of the Schrödinger equation:

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \psi = E \psi. \tag{1}$$

For the Bose system, an elementary solution is a continuous symmetric function of the coordinates x_1, \dots, x_N (or $x \in R_N$) obeying the Schrödinger equation (1) in R_N . Bethe's method gives us a continuous set of elementary solutions $\psi_{\{k\}}(x)$ parametrized by a set $\{k\}$ of N distinct numbers k_1, k_2, \dots, k_N :

$$\psi_{\{k\}}(x) = \sum_P a(P) \exp\left(i \sum_{i=1}^N k_{P_i} x_i\right) \tag{2}$$

in the domain D , $x_1 < x_2 < \dots < x_N$.

The sum is taken over all the permutations P of order N . The coefficients $a(P)$ are given here in a rational form:

$$a(P) = \prod_{i < j} \left(1 + \frac{ic}{k_{P_i} - k_{P_j}}\right), \tag{3}$$

which shows clearly the continuous transformation of $\psi_{\{k\}}$ from a permanent ($c = 0$) to a determinant ($c^{-1} = 0$) when c increases from zero to infinity. The corresponding energy eigenvalue is

$$E_{\{k\}} = \sum_{i=1}^N k_i^2. \tag{4}$$

The periodicity conditions are expressed by the following relation:

$$\psi(x_1 = 0, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_2, x_3, \dots, x_N, x_1 = L), \tag{5}$$

$x \in D.$

It turns out that ψ can be chosen as a particular $\psi_{\{k\}}$ if the coefficients $a(P)$ satisfy

$$a(PC) e^{ik_{P_1}L} = a(P) \text{ for all } P, \tag{6}$$

where C is the cyclic permutation $(12 \dots N)$. From Eqs. (3) and (6), we obtain Lieb and Liniger's system of coupled equations

$$k_i L = 2\pi n_i + \sum_j \psi_{ij}, \quad i = [1, N] \tag{7}$$

with n_i integers and the following definition of the phases ψ_{ij} :

$$\tan \frac{1}{2} \psi_{ij} = c / (k_i - k_j), \quad \psi_{ij} = -\psi_{ji}. \tag{8}$$

III. QUANTUM NUMBERS

Yang and Yang³ have shown the uniqueness of the solution of Eq. (7) for each given permissible set of quantum numbers. We give here an intuitive argument based on the continuity in c in order to determine the integers $\{n\}$ simply. We will show that there exists a continuous sheet of the function $\psi_{ij}(c)$ which goes to zero with c . There the integers $n_i = \lim k_i L / 2\pi$ as $c \rightarrow 0$ are the quantum numbers of a noninteracting Bose gas with cyclic boundary

conditions and the permissible sets must be the sets of N nondecreasing integers:

$$-\infty < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_N < \infty.$$

For $n_i \neq n_j$, we choose the sheet of ψ_{ij} which in the neighborhood of $c=0$ behaves like

$$\psi_{ij} \propto [c/(n_i - n_j)] L/2\pi. \tag{9}$$

It remains to examine the case where some n are equal. Choose, for example, the ground state of total momentum zero:

$$n_i = 0 \text{ for all } i. \tag{10}$$

In the vicinity of $c=0$, we look for a solution of the type

$$k_i = (2c/L)^{1/2} q_i + O(c), \quad i = [1, N] \tag{11}$$

where all the q_i have to be distinct. Hence we find the possible sheet

$$\psi_{ij} \propto (2cL)^{1/2} (q_i - q_j) + O(c). \tag{12}$$

From Eqs. (7) and (10), the q_i must satisfy

$$q_i = + \sum_{j \neq i} \frac{1}{q_i - q_j}. \tag{13}$$

This gives us a precise idea of the distribution of the pseudomomenta k in the limit $c \rightarrow +0$. From Eq. (13) we recognize the q_i as the zeros of Hermite polynomials of degree N , which satisfy

$$H''(q) - 2qH'(q) + 2NH(q) = 0. \tag{14}$$

Thus the q_i are distinct real numbers and the ψ_{ij} all have the assumed behavior $\psi_{ij} \rightarrow 0$ when $c \rightarrow 0$.

The density of zeros of $H_N(q)$ is asymptotically given by the semicircle law

$$\rho(q) = (1/\pi)(2N - q^2)^{1/2}. \tag{15}$$

This gives us the density of pseudomomenta k :

$$\rho(k) = (L/2\pi c)(4c\rho - k^2)^{1/2}, \tag{16}$$

with $\rho = N/L$, in the limit c very small. This distribution is very peaked. The corresponding leading term for the ground-state energy is

$$E/N = \int k^2 \rho(k) dk \propto (c\rho) \tag{17}$$

The limit $c \rightarrow 0$ has to be understood for a finite system before we take the thermodynamic limit. Nevertheless, it coincides with the dominant term in the energy per particle of the corresponding infinite system.¹

Finally we give here the correspondence between the $\{n\}$ and the $\{I\}$ introduced by Yang. Since the noncrossing of the k has been proved by this author,³ we have

$$\psi_{ij} = -2 \tan^{-1}(k_i - k_j)/c + \pi \epsilon(k_i - k_j),$$

and thus we write Eq. (7)

$$k_i L = 2\pi I_i - 2 \sum_j \tan^{-1}(k_i - k_j)/c, \tag{17'}$$

with

$$I_i = n_i + i - \frac{1}{2}(N+1), \quad i = [1, N].$$

Thus the quantum numbers I_i are integer or half-integer according to the parity of N , with the condition

$$I_1 < I_2 < \dots < I_N.$$

IV. ELEMENTARY SOLUTION ON SEMI-INFINITE AXIS

The boundary conditions for the Boson wave function $\psi(x)$ in a box are twofold:

$$\psi(x_1 = 0, x_2, \dots, x_N) \equiv 0, \tag{18}$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N = L) \equiv 0, \tag{19}$$

where the x_1 are in the region \bar{D} , $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq L$.

The idea is to construct elementary solutions of the Schrödinger equation on the semi-infinite axis $x_i \geq 0$, or $x \in R_N^+$, solutions which have to verify Eq. (18) on the boundary $x_1 = 0$ of the fundamental domain D^+ , $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < \infty$. Using McGuire's optical analogy⁴ for the general problem of particles in δ interaction, it is natural to construct the wave function ψ by superposition of all the elementary waves $\psi_{\{k\}}$ obtained by reflection at the wall $x = 0$. Such an elementary solution is written $\psi_{\{k\}}(x)$ and is associated with a set of N distinct "positive" numbers $|k_i|$. "Positive" means only belonging to the same complex half-plane. If the k are real, we can choose

$$0 < |k_1| < |k_2| < \dots < |k_N|. \tag{20}$$

Therefore we define the 2^N sets

$$\{k\} = \{k_1, k_2, \dots, k_N\} \text{ with } k_i = \epsilon_i |k_i|, \quad \epsilon_i = \pm 1. \tag{21}$$

All the states $\psi_{\{k\}}$ have the same energy and we look for a solution of the form

$$\psi_{\{k\}}(x) = \sum_{\epsilon_1 \in 2^N \dots \epsilon_N} A(\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_N) \psi_{\{k\}}(x). \tag{22}$$

The condition (18) gives us

$$\sum_{\{\epsilon\}} A\{\epsilon\} \sum_P \prod_{i < j} \left(1 + \frac{ic}{k_{P_i} - k_{P_j}} \right) \times e^{i(k_{P_2} x_2 + \dots + k_{P_N} x_N)} \equiv 0. \tag{23}$$

Thus we are only free to sum over ϵ_{P_1} when P and also the other ϵ are fixed. This gives the 2^{N-1} relations

$$A(\epsilon_1 \dots \epsilon_{P_1} \dots \epsilon_N) \prod_{\beta \neq P_1} \left(1 + \frac{ic}{k_{P_1} - k_\beta} \right) + A(\epsilon_1 \dots -\epsilon_{P_1} \dots \epsilon_N) \prod_{\beta \neq P_1} \left(1 + \frac{ic}{-k_{P_1} - k_\beta} \right) = 0, \tag{24}$$

which must be true for any $\{k\}$ and P . It is sufficient to choose

$$A(\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_N) = \prod_{i < j} \left(1 - \frac{ic}{k_i + k_j} \right) \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_N \times (k_i + k_j \equiv \epsilon_i |k_i| + \epsilon_j |k_j|). \tag{25}$$

Thus we obtain the desired elementary solution

$$\psi_{(|M|)} = \sum_{(i)} \sum_P \epsilon_1 \cdots \epsilon_N \prod_{i < j} \left(1 - \frac{ic}{k_i + k_j} \right) \left(1 + \frac{ic}{k_{P_i} - k_{P_j}} \right) \times \exp[i(k_{P_1} x_1 + \cdots + k_{P_N} x_N)], \quad (26)$$

with $k_i = \epsilon_i |k_i|$, $k_{P_i} = \epsilon_{P_i} |k_{P_i}|$.

We notice that in expression (26), the sum is taken over the $2^N N!$ elements of the N -dimensional cube reflection group. This remark leads to the generalization developed in Sec. V, which appears as a digression.

V. BETHE'S WAVE FUNCTION ASSOCIATED WITH REFLECTION GROUP

In the two cases previously studied, the elementary symmetric solutions on the whole real axis and on half the real axis have the following common mathematical definition.

Let G be a finite reflection group acting in a Euclidean vector space R_N with scalar product (x, y) . The group G is generated by a set of reflection generators g_ν ($g_\nu^2 = 1$). Let D_N be a fundamental region for G , in other words, an open domain of R_N with the properties

$$g D_N \cap D_N = 0 \text{ for } g \in G (g \neq 1), \quad \bigcup_g g \bar{D}_N = R_N. \quad (27)$$

Coxeter⁵ has shown that D_N is a spherical simplex, bounded by a set of N planes B_ν , with normal vector n_ν , associated with the generator g_ν such that

$$g_\nu^2 = 1, \quad g_\nu B_\nu = B_\nu, \quad g_\nu n_\nu = -n_\nu. \quad (28)$$

D_N is defined by

$$(n_\nu, x) > 0 \text{ for all } \nu, \quad x \in D_N. \quad (29)$$

In our previous examples, the elementary wave function appears as a sum over the elements of the reflection group G :

$$\psi_{(k)}(x) = \sum_{g \in G} a(g) e^{i(gk, x)}, \quad (30)$$

with $k \in D_N$ and $x \in D_N$. In the "symmetric" case the solution is easily extended to the whole space R_N by the relation

$$\psi_{(k)}(gx) = \psi_{(k)}(x). \quad (31)$$

The continuity of ψ at the boundary B_ν is ensured by

$$g_\nu x = x, \quad x \in B_\nu. \quad (32)$$

The coefficients $a(g)$ are determined by some conditions at the boundaries of D_N , which are not arbitrary and have to be consistent with the group property of G .

In the cases studied so far the conditions are of the form of a linear relation between the function ψ and its derivatives on the plane boundary B , for

instance,

$$(a) \text{ disc} \left(\frac{d\psi(x)}{dn_\nu} \right) = 2c_\nu \psi(x) \Big|_{x \in B_\nu}, \quad \frac{d}{dn_\nu} = (n_\nu, \nabla) \quad (33)$$

or

$$(b) \psi(x) = 0, \quad x \in \text{some } B. \quad (34)$$

From (30) and (33), we obtain the sufficient relations for the coefficients $a(g)$:

$$\frac{a(g_\nu g)}{a(g)} = \frac{(gk, n_\nu) + ic_\nu}{(gk, n_\nu) - ic_\nu} \quad (35)$$

for all g and generators g_ν .

We will show that these relations give $a(g)$ in terms of all the reflection operators g_α ($g_\alpha^2 = 1$) of G . (Note that the set of g_α is larger than the g_ν , which are only the generators.) This can be done by using the known properties of the finite reflection group in R_N , which are nothing else than the reflection group of the root diagram of the semi-simple Lie groups.⁶ Let us call α (vector in some R_N) a "positive" root in the diagram of a semi-simple group Γ ["positive" is defined with respect some fixed arbitrary vector ξ in D_N such that $(\xi, \alpha) > 0$]. The root α defines a reflection g_α with respect to the hyperplane perpendicular to α at the origin:

$$g_\alpha \alpha = -\alpha \quad (-\alpha \text{ is a root}). \quad (36)$$

On the other hand, if β is a root, $g_\alpha \beta$ is a root ($\alpha \neq \beta$). Now, if α is a positive root, $g_\nu \alpha$ is also a positive root from Jacobson's theorem

$$(v, \xi) > 0 \text{ and } (\alpha, \xi) > 0 \Rightarrow (\alpha + \nu, \xi) > 0.$$

Thus, if we choose

$$n_\nu = \nu / [(\nu, \nu)]^{1/2}, \quad c_\nu = c / [(\nu, \nu)]^{1/2}, \quad (37)$$

we can easily verify the following solution of Eq. (35) for $a(g)$:

$$a(g) = \prod_{\alpha > 0} \left(1 - \frac{ic}{(gk, \alpha)} \right). \quad (38)$$

From the choice of our boundary conditions (33) and (37), the function ψ is an elementary symmetric solution of the following Schrödinger equation in R_N :

$$-\Delta \psi + 2c \sum_{\alpha > 0} \delta((x, \alpha)) \psi = (k, k) \psi. \quad (39)$$

Thus with each semisimple Lie algebra can be associated at least one symmetric (invariant by G) Bethe wave function. It results from the invariance of the Hamiltonian (39) by G that this equation admits solutions belonging to other types of symmetry. More precisely, since the reflection group G is in some sense the commutator of Γ , the covariant solutions ψ will be representations of the corresponding semisimple Γ . But here we restrict the study to the invariant solution.

We illustrate briefly these general considerations with our two examples. First consider the sim-

plex A_{N-1} corresponding to $SU(N)$. Let e_i be an orthonormal basis in R_N ; the "positive" roots of $SU(N)$ can be taken as

$$\alpha = e_i - e_j, \quad i > j, \quad i, j = [1, N].$$

We have

$$(x, e_i) = x_i, \quad \delta((x, \alpha)) = \delta(x_i - x_j),$$

$$(gk, \alpha) = (gk)_i - (gk)_j.$$

$g_\alpha = P_{ij}$ = reflection with respect to the plane $x_i - x_j = 0$ or transposition of the permutation group $G = S_N$. The fundamental region with normal vectors

$$n_\nu = e_{i+1} - e_i, \quad i = [1, N]$$

and generators $g_\nu = P_{i, i+1}$ is determined by the inequalities

$$(n_\nu, x) > 0 \Rightarrow x_{i+1} - x_i > 0$$

$$\Rightarrow -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_N < \infty.$$

We recover the familiar relations (2) and (3) of Sec. II.

The second example concerns the elementary solution on the semi-infinite real axis, constructed with the $2^N N!$ elements of the group of the hypercube or of the Cartesian frame. Two root diagrams are possible: C_N corresponding to $Sp(2N)$ and B_N corresponding to $SO(2N+1)$ with the same reflection group (Coxeter's simplex C_N). The positive roots of D_N are $e_i + e_j$ and $e_i - e_j$, $i > j$, with the supplementary roots

$$e_i \text{ for } B_N \text{ or } 2e_i \text{ for } C_N. \tag{40}$$

The generators of C_N can be taken as

$$g_{e_1}, g_{e_2 - e_1}, \dots, g_{e_N - e_{N-1}}$$

and this gives the fundamental region $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < \infty$.

In fact, our wave function satisfying $\psi(x) = 0$ for $x_1 = 0$ is a limiting solution of the following more general Hamiltonian with potential function depending on two coupling constants b and c :

$$V(b, c) = 2b \sum_i \delta(x_i) + 2c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) + \delta(x_i + x_j). \tag{41}$$

The solution in this case is given by

$$a(g) = \prod_{i < j} \left(1 - \frac{ic}{(gk, e_i + e_j)} \right) \left(1 - \frac{ic}{(gk, e_j - e_i)} \right) \times \prod_i \left(1 - \frac{ib}{(gk, e_i)} \right). \tag{42}$$

As in formula (38), one recognizes the product over the reflection defined by the roots (40), but with the freedom in the choice of the coefficient corresponding to the roots $+e_i$.

This corresponds to the fact that the reflection group does not completely determine the length of the roots: We can have B or C . One verifies easily that the double product $\prod_{i < j}$ in (42) is un-

changed by the transformation $g \rightarrow g_{e_1} g$. Thus

$$\frac{a(g_{e_1} g)}{a(g)} = \frac{(gk, e_1) + ib}{(gk, e_1) - ib}.$$

On the other hand, the roots $e_k \pm e_l$ and $e_{k-1} \pm e_l$ are exchanged by the generators $g_{e_k - e_{k-1}}$, unless $e_k - e_{k-1}$, which changes its sign. Finally, $g_{e_k - e_{k-1}}$ exchanges the e_k and e_{k-1} factor in the simple product Π_i in (42). Hence the conditions (35) which express boundary conditions corresponding to the Hamiltonian (41) are satisfied by the solution (42). Now our problem with the strict zero-wave-function condition at $x_1 = 0$ corresponds to the limit $b \rightarrow \infty$, and we recognize exactly the wave function (26) in the limit form of (42). The wave function restricted from the whole space to the region $x_1 > 0$ for all i does not see the part of the potential $\delta(x_i + x_j)$, and thus on the half-axis $x_i > 0$, in the limit $b \rightarrow \infty$, potential (41) is equivalent to the original one. For three values of the constant b/c , $b/c = 0, \frac{1}{2}, 1$, the solution (42) coincides with (38) corresponding to the Schrödinger equation (39), and the corresponding groups Γ are, respectively, $SO(2N)$, $Sp(2N)$, and $SO(2N+1)$.

Unfortunately the translational invariance is lost in most of the new Hamiltonians. There is one exception corresponding to the group G_2 , for which the reflection group is simply D_2^6 . The corresponding potential function is

$$V = \delta(x_1 - x_2) + \delta(x_2 - x_3) + \delta(x_1 - x_3) + \delta(x_1 + x_2 - 2x_3) + \delta(x_1 + x_3 - 2x_2) + \delta(x_3 + x_2 - 2x_1),$$

where each particle interacts with the center of gravity of the other two.

We do not think that the models corresponding to the exceptional reflection groups are physically interesting. These group considerations would be fruitful, if they lead to the explicit construction of the covariant solutions $\psi_\gamma(x)$ with $\gamma \in D_N$ belonging to a given irreducible representation of the reflection group G .

VI. COUPLED EQUATIONS FOR SPECTRUM

Now we go back to our specific problem. With the knowledge of the elementary solution $\psi_{\{\epsilon\}}(x)$ in the region $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N$, we are able to impose on the wave function the second boundary condition, Eq. (19):

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N = L) \equiv 0.$$

This gives the relation

$$\sum_{\epsilon_{PN}} \left[\prod_{i < j} \left(1 - \frac{ic}{k_{P_i} + k_{P_j}} \right) \left(1 + \frac{ic}{k_{P_i} - k_{P_j}} \right) \right] e^{ik_{PN} L} = 0,$$

which has to be valid for all P and $\{\epsilon\}$.

Setting $P\bar{N} = \alpha$, we obtain

$$e^{2ik_\alpha L} = \prod_{\beta(\neq\alpha)} \frac{k_\beta - k_\alpha - ic}{k_\beta - k_\alpha + ic} \frac{k_\beta + k_\alpha + ic}{k_\beta + k_\alpha - ic}, \quad (43)$$

which must be satisfied for all α , and all possible signs of k . This last point becomes clear if we write our system in the form

$$e^{2ik_\alpha L} = \prod_{\beta(\neq\alpha)} \frac{(k_\alpha + ic)^2 - k_\beta^2}{(-k_\alpha + ic)^2 - k_\beta^2}.$$

Thus, writing k_α instead of $|k_\alpha|$, we obtain the system of coupled equations

$$k_\alpha L = \pi m_\alpha + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \left(\tan^{-1} \frac{c}{k_\alpha - k_\beta} + \tan^{-1} \frac{c}{k_\alpha + k_\beta} \right), \quad (44)$$

with $k_\alpha > 0$, $\alpha = [1, N]$.

As in Sec. III, by applying the continuity principle in the coupling c , we deduce that the set of integers $\{n\}$ is a system of quantum numbers for free bosons in a box L :

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_N. \quad (45)$$

The system (44) is very similar to the system (7) and here we make the analogy precise. Consider (a) the N bosons system in the box $[0, L]$, and (b) the $2N$ bosons system periodic on $[0, 2L]$. Both have the same density. For the periodic system we look for a solution of the form

$$\{k\}_{2N} = \{-k\}_N, \{k\}_N, \quad k_i > 0, \quad i = [1, N] \quad (46)$$

$$\{n\}_{2N} = \{-n\}_N, \{+n\}_N, \quad n_i > 0, \quad i = [1, N].$$

Thus we get exactly Eq. (44) for N bosons in the box $[0, L]$. We conclude that the energy levels of N bosons in a box L are one-half the energy of a class of levels of $2L$ - (periodic system at same density):

$$E_N^{\text{box } L} \{n\}_N = \frac{1}{2} E_{2N}^{\text{periodic } 2L} \{-n, n\}_{2N}. \quad (47)$$

The existence of real solutions for (44) is a corollary of the corresponding result³ for Eq. (7). The ground state in the box corresponds to the excited level $\{-1\}_N, \{+1\}_N$ of the periodic gas. This allows a direct calculation of the difference

$$\Delta E = \lim (E_N^{\text{box } L} - \frac{1}{2} E_{2N}^{\text{periodic } 2L}) \text{ as } N \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Moreover, it is shown in the Appendix that for the ground state we get

$$E_N^{\text{periodic } L} = N (\text{energy per particle}) + O(1/N). \quad (49)$$

Thus $\lim (\frac{1}{2} E_{2N}^{\text{periodic } 2L} - E_N^{\text{periodic } L}) = 0$ as $N \rightarrow \infty$ and we deduce that the quantity ΔE , to be calculated in Sec. VII, represents the boundary energy or "surface" energy of the boson gas enclosed in a box.

VII. BOUNDARY ENERGY

Let us call k_i and \bar{k}_i , respectively, the momenta for the $2L$ -periodic and L -box system at the same

density. We have the coupled equations

$$k_i L = \sum_{j=1}^N \tan^{-1} \frac{c}{k_i - k_j} + \tan^{-1} \frac{c}{k_i + k_j}, \quad (50)$$

$$\bar{k}_i L = \pi + \sum_{j=1}^N \tan^{-1} \frac{c}{k_i - k_j} + \tan^{-1} \frac{c}{\bar{k}_i + \bar{k}_j}, \quad i = [1, N] \quad (51)$$

and the surface energy

$$\Delta E = \lim \left(\sum_{i=1}^N (\bar{k}_i^2 - k_i^2) \right). \quad (52)$$

We put

$$\bar{k}_i - k_i = (1/L) h(k_i) + O(1/L^2) \quad (53)$$

and we deduce from Eqs. (50) and (51) that

$$h(k_i) = \pi - \frac{c}{L} \sum_{j=1}^N \left(\frac{h(k_i) - h(k_j)}{c^2 + (k_i - k_j)^2} + \frac{h(k_i) + h(k_j)}{c^2 + (k_i + k_j)^2} \right) \quad (54)$$

and

$$\Delta E = \lim \left(\frac{2}{L} \sum_{i=1}^N k_i h(k_i) \right). \quad (55)$$

We know that in the limit $L \rightarrow \infty$, density $\rho = 2N/2L$ and the asymptotic number of k_i on the interval $[k, k + dk]$ is $2L \rho(k) dk$, where $\rho(k)$ is the solution of the Lieb integral equation

$$\rho(k) - \frac{1}{\pi} \int_{-K}^{+K} \frac{c}{(k - k')^2 + c^2} \rho(k') dk' = \frac{1}{2\pi}. \quad (56)$$

The parameter K is related to the density by the equation

$$\rho = \int_{-K}^{+K} \rho(k) dk. \quad (57)$$

The limiting form of (54) is clear. Extending for convenience the definition of $h(k)$ to negative values of the argument by

$$h(-k) = -h(k), \quad (58)$$

we obtain

$$h(k) = \pi \epsilon(k) - 2c \int_{-K}^{+K} \frac{h(k) - h(k')}{(k - k')^2 + c^2} \rho(k') dk', \quad (59)$$

with $\epsilon(k) = k/|k|$, or, by the change of function

$$g(k) = \rho(k) h(k) \quad (\text{odd function}), \quad (60)$$

we finally obtain the integral equation

$$g(k) - \frac{c}{\pi} \int_{-K}^{+K} \frac{g(k') dk'}{(k - k')^2 + c^2} = \frac{1}{2} \epsilon(k) \quad (61)$$

and the boundary energy

$$\Delta E = 2 \int_{-K}^{+K} k g(k) dk. \quad (62)$$

In Sec. VIII a method is described to solve approximately Eqs. (56) and (61) in the limit $c/\rho \rightarrow 0$ and thus to calculate the leading term of ΔE .

VIII. ELECTROSTATIC ANALOGY

Integral equation (56) is known in potential theory as the Love equation for the old problem of the circular disk condenser.⁷ Consider two coaxial circular metallic disks of radius 1, separated by a distance a , and charged at opposite potential $\pm V_0$. In cylindrical coordinates (r, z) the potential due to an axially symmetric distribution $\sigma(r)$ (on the lower plate at $z = 0$, for instance) admits of the following useful representation in terms of an even real function $f(t)$:

$$V(r, z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) dt}{[r^2 - (t + iz)^2]^{1/2}}. \tag{63}$$

$V(\rho, z)$ is real (f even) and harmonic outside the lower disk ($z = 0, 0 \leq r \leq 1$). The density of charge $\sigma(r)$ is related to $f(r)$ by the Abel transform

$$\sigma(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{f(t)t dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}}, \tag{64}$$

and the total charge on this plate is

$$Q = \int_{-1}^{+1} f(t) dt. \tag{65}$$

In the presence of the upper disk at $z = a$, density $-\sigma(r)$, the equilibrium condition on the lower disk is

$$V(\rho, 0) - V(\rho, a) = V_0, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \tag{66}$$

Taking the Abel transform of Eq. (66), one obtains the Love equation for $f(t)$:

$$f(t) - \frac{a}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t') dt'}{(t - t')^2 + a^2} = \frac{V_0}{\pi}. \tag{67}$$

This becomes Lieb and Liniger's equation after a change of scale, by choosing $V_0 = \frac{1}{2}$ and $a = c/K$. The capacity of the condenser is given by Eq. (65). Between the two problems we have the correspondence

$$\rho(x) = f(x/K),$$

$$\text{density } \rho = \text{capacity} = K \int_{-1}^{+1} f(t) dt, \tag{68}$$

energy $\epsilon =$ second moment

$$= (K^3/\rho) \int_{-1}^{+1} t^2 f(t) dt. \tag{69}$$

The difficulty of the condenser problem is to find an asymptotic expansion of the capacity at small separation of the disks; by using physical arguments Kirchoff obtained

$$Q = \frac{1}{4a} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{16\pi}{ea} + O(1), \tag{70}$$

and Hutson's method⁸ gives

$$f(t) = \frac{1}{2\pi a} (1 - t^2)^{1/2} + \frac{1}{4\pi^2 (1 - t^2)^{1/2}} \times \left(t \ln \frac{1-t}{1+t} + \ln \frac{16\pi e}{a} \right). \tag{71}$$

From Eqs. (68), (69), and (71) we get the density of the Bose gas as a function of K and c :

$$\rho = \frac{K^2}{4c} + \frac{K}{4\pi} \ln \left(\frac{16\pi K}{e c} \right) + \dots \tag{72}$$

and the energy particle

$$\epsilon \rho = \frac{K^4}{16c} - \frac{K^3}{6\pi} + \frac{K^3}{8\pi} \ln \left(\frac{16\pi K}{e c} \right) + \dots \tag{73}$$

Eliminating K between Eqs. (72) and (73), we obtain the equation of state at zero temperature

$$\epsilon = c\rho - (4/3\pi)\rho^{1/2}c^{3/2} + \dots, \tag{74}$$

which coincides with the result given by the perturbation theory of Bogoliubov previously calculated by Lieb and Liniger.¹

Analogous methods could probably be used to transform Eq. (61) into a problem of potential theory. We only give here the dominant behavior of $g(k)$ and ΔE as c goes to zero. Following the Kac-Pollard method,⁷ an approximate form of Eq. (61) (in the reduced variable $x = k/K$) is easily found:

$$PP \int_{-1}^{+1} \frac{g'(y)}{y-x} dy = -\epsilon(x) \frac{K\pi}{2c}. \tag{75}$$

This can be inverted to give

$$g(y) = \frac{K}{4\pi c} \times \int_{-1}^{+1} \ln \left(\frac{1-xy - [(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}}{1-xy + [(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}} \right) \epsilon(x) dx. \tag{76}$$

Formula (62),

$$\Delta E = 2K^2 \int_{-1}^{+1} yg(y) dy, \tag{62'}$$

gives us the dominant term of the boundary energy

$$\Delta E \propto -\frac{K^3}{2\pi c} \frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{3} \rho^{3/2} c^{1/2} + \dots \tag{77}$$

in the limit $c/\rho \ll 1$.

IX. CONCLUSION

Starting from a known elementary solution of the Schrödinger equation for a boson system with a δ -function interaction, we have applied a superposition method to build up a wave function defined by $\psi = 0$ boundary conditions. This constructive method led us to recognize the possibility of associating Bethe's wave function with each finite reflection group and of constructing the corresponding Hamiltonian. We do not know if the periodicity conditions are compatible with the solutions cor-

responding to exceptional reflection groups.

We apply this to calculate the boundary energy of the Bose gas in its ground state. The same method could be used to calculate the difference in energy between the Heisenberg-Ising chain and the ring, and possibly the boundary correction to the free energy of some two-dimensional ferroelectric system. We give here the coupled equations for the spectrum of the Hamiltonian of the anisotropic Heisenberg chain:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N-1} S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \rho(S_n^z S_{n+1}^z - \frac{1}{4}) .$$

With the notations

$$\rho = \cosh \Phi \quad (\text{in the domain } \rho > 1) ,$$

$$\cot \frac{1}{2} k_\alpha = \coth \frac{1}{2} \Phi \tan \frac{1}{2} \xi_\alpha , \quad 0 < \xi_\alpha < \pi$$

$$\cot \frac{1}{2} \psi(\xi) = \coth \Phi \tan \frac{1}{2} \xi ,$$

we have found the equation

$$k_\alpha(N+1) = \pi(\lambda_\alpha + \frac{1}{2}) + \psi(2\xi_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \psi(\xi_\alpha - \xi_\beta) + \psi(\xi_\alpha + \xi_\beta) , \quad \alpha = [1, M]$$

where the quantum numbers λ_α for the ground state are probably

$$1, 3, 5, \dots, N-1 \quad (N = 2M) .$$

The energy is given by

$$E = \sum_{\alpha=1}^M (\cos k_\alpha - \cosh \Phi) .$$

ACKNOWLEDGMENT

I am greatly indebted to Professor C. N. Yang for the kind hospitality extended to me at the Institute for Theoretical Physics at Stony Brook, where part of this work was completed and discussed.

APPENDIX

We have to show that the ground-state energy of the L -periodic Bose gas behaves in the limit $N \rightarrow \infty$ like

$$E_N = \epsilon N + O(1/N) , \tag{A1}$$

where ϵ is the energy per particle given by Lieb and Liniger's equations (56) and (57) and

$$\epsilon = (1/\rho) \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \rho(k) dk , \quad \rho = N/L . \tag{A2}$$

We follow exactly the proof given by Yang⁹ in order to establish

$$\lim E_N/N = \epsilon \quad \text{as } N \rightarrow \infty . \tag{A3}$$

In fact, his proof gives the stronger result (A1), from which we deduce the desired formula of Sec. VI:

$$\lim [E_N(\rho) - \frac{1}{2} E_{2N}(\rho)] = 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty . \tag{A4}$$

We start with the following formula (Whittaker and Watson¹⁰), which is valid for an analytic function on a segment line including the points a and b ($b - a = \pi w$):

$$\sum_{N=1}^r f(a + \pi n) = \frac{1}{w} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] + \frac{1}{2} \pi w [f'(b) - f'(a)] + O(w^2) . \tag{A5}$$

Specializing to an even function, and using the analyticity at the ends of the interval in order to shift the limits of the integral from $\frac{1}{2}w$, we obtain the modified formula

$$\sum_{I=\frac{1}{2}(N-1)}^{\frac{1}{2}N-1} f\left(\frac{2\pi I}{N}\right) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi N/L}^{+\pi N/L} f(x) dx + \frac{1}{L} R_N , \tag{A6}$$

with $|R_N| < \frac{1}{2} \pi |f'(\pi N/L)| + \text{const}$

For a set $\{k\}_N$ solution of the coupled equation, the function $h(p)$,

$$h(p) = p - \frac{2}{L} \sum_I \tan^{-1} \frac{p - k_I}{c} , \tag{A7}$$

is analytic on the real axis, as is the inverse function $p(h)$ with $|dp/dh| < 1$. For any value of p we have

$$\frac{dh}{dp} = 1 + \frac{1}{L} \frac{\sum_{I=\frac{1}{2}(N-1)/L}^{(N-1)/L} \frac{2c}{c^2 + [p - p(h)]^2} . \tag{A8}$$

Thus, using (A6), we get

$$\frac{dh}{dp} = 1 + \frac{c}{\pi} \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{dp'}{(p - p')^2 + c^2} \frac{dh}{dp'} + \frac{1}{L^2} R_1(p) , \tag{A9}$$

with

$$\eta = p(\pi N/L) \tag{A10}$$

and

$$|R_1(p)| < \frac{2\pi}{3c^3} \left| \frac{dp}{dh} \right| + \text{const} < \frac{2\pi}{3c^3} + \text{const} \tag{A11}$$

We obtain also the density of particles

$$\frac{2\pi N}{L} = \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{dh(p')}{dp'} dp' \tag{A12}$$

and the total energy

$$E_N = L \int_{-\eta}^{+\eta} p^2 \frac{dh(p)}{dp} dp + \frac{R_2}{L} , \tag{A13}$$

with

$$|R_2| < \frac{1}{12} \pi 2\eta (dp/dh)(\eta) + \text{const} < \frac{1}{8} \pi \eta + \text{const} . \tag{A14}$$

Using the existence of a bounded inverse operator of the integral operator in (A9) and the fact that η is bounded, we deduce that

$$\frac{dh}{dp} = 2\pi \rho_1(p) + O(1/L^2) \tag{A15}$$

and

$$E_N = L \epsilon_1 \rho_1 + O(1/L), \quad (\text{A16})$$

where ρ_1 and $\rho_1(p)$ are, respectively, the density and the solution of Lieb and Liniger's equation for the value of the parameter $K_1 = \eta$; from Eqs. (A12) and (A15) we have

$$\rho_1 = \rho + O(1/L^2), \quad \rho = N/L. \quad (\text{A17})$$

Since all the quantities ρ and ϵ are derivable in the parameter K , we have also

$$\epsilon_1 = \epsilon + O(1/L^2) \quad (\text{A18})$$

and this gives, with (A16) and (A17), Eq. (A1) and the corollary (A4).

*Work supported in part by the U. S. Atomic Energy Commission under Contract No. AT(30-1)-3668B.

†On leave of absence from Service de Physique Théorique, CEA Orme des Merisiers, B. P. No. 2, Gif-Sur-Yvette, 91, France.

¹E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. 130, 1605 (1963).

²H. A. Bethe, Z. Physik 71, 205 (1931).

³C. N. Yang and C. P. Yang, J. Math. Phys. 10, 1115 (1969).

⁴J. B. McGuire, J. Math. Phys. 5, 622 (1964).

⁵H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 2nd ed. (MacMillan, New York, 1963).

⁶G. Racah, CERN Report No. CERN 61-8 (unpublished).

⁷I. N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1966).

⁸V. Hutson, Proc. Cambridge Phil. Soc. 59, 211 (1963).

⁹C. N. Yang (unpublished).

¹⁰Whittaker and Watson, *Modern Analysis* (Cambridge U. P., Cambridge, England, 1958), p. 128.

Bose Gas in One Dimension. I. The Closure Property of the Scattering Wavefunctions*

M. GAUDIN†

Institute for Theoretical Physics, State University of New York, Stony Brook, New York 11790

(Received 12 February 1971)

We verify the closure relation of a continuum basis of Lieb's wavefunctions, describing the scattering states of identical bosons interacting via a δ -function potential in one dimension.

1. INTRODUCTION

We consider the system of N identical Bose particles on an infinite axis interacting via a two-body repulsive δ -function potential. The Schrödinger equation for the wavefunction is

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \psi = E \psi. \tag{1}$$

The symmetrical scattering solution of Eq. (1) has been given by Lieb.¹ In the fundamental region D of R_N defined by the inequalities

$$-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_N < \infty \tag{2}$$

such a wavefunction is expressed as a sum over all the permutations P of order N ,

$$\psi_{\{k\}}(x) = \sum_P a(P) e^{i(Pk, x)}, \tag{3}$$

with the notation

$$(Pk, x) = \sum_{i=1}^N k_{P_i} x_i$$

and the rational form of the coefficients $a(P)$:

$$a(P) = \prod_{i < j} \left(1 + \frac{ic}{k_{P_i} - k_{P_j}} \right). \tag{4}$$

The set $\{k\}$ parametrizes the scattering state $\psi_{\{k\}}$ and consists of N arbitrary but distinct real numbers,

$$\{k\} \equiv \{k_1, k_2, \dots, k_N\}, \tag{5}$$

which are the momenta of the particles in the ingoing or outgoing states. The energy of the state is

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^N k_i^2. \tag{6}$$

So far, the wavefunction $\psi_{\{k\}}(x)$ is not normalized. Our aim is to prove the following closure relation:

$$I_N \equiv \int_{R_N} dk^N \frac{1}{G(k)} \psi_{\{k\}}(x) \psi_{\{k\}}^*(y) = N! (2\pi)^N \delta(x - y), \tag{7}$$

with

$$x \in D, \quad y \in D. \tag{8}$$

The δ function in D is defined as

$$\delta(x - y) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \dots \delta(x_N - y_N), \tag{9}$$

and the normalization factor is

$$G(k) = \prod_{i < j} \left(1 + \frac{c^2}{(k_i - k_j)^2} \right). \tag{10}$$

By introducing the phases ψ_{ij}

$$\psi_{ij} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{c}{k_i - k_j} \right), \tag{11}$$

we infer from (7) that the normalized wavefunction in the continuum would be

$$\phi_{\{k\}}(x) = [N! (2\pi)^N]^{-\frac{1}{2}} \times \sum_P \exp \left(\frac{i}{2} \sum_{i < j} \psi_{P_i, P_j} + i \sum_i k_{P_i} x_i \right) \tag{12}$$

for $x \in D$; and after extension of the ϕ by symmetry, we would have

$$\int_{R_N} \phi_{\{k\}}^*(x) \phi_{\{k'\}}(x) d^N x = \delta(k - k'), \tag{13}$$

with k and $k' \in D$.

2. PROOF

A. Algebraic Part

We set

$$a(i, j) = 1 - \frac{ic}{k_i - k_j}. \tag{14}$$

Substituting the right-hand side of equality (3) for the wavefunctions in the expression (7) for I_N , we have

$$I_N = \int_{R_N} dk^N \sum_{P, Q} \frac{1}{G(k)} \prod_{i < j} a(P_j, P_i) a(Q_i, Q_j) \times \exp [i(Pk, x) - i(Qk, y)] \tag{15}$$

as a sum over independent permutations P and Q .

Substituting the expression (10) for $G(k)$ and summing over P and $R = Q^{-1}P$, we get

$$I_N = \int_{R_N} dk^N \sum_{P,R} \prod_{i < j} \frac{a(PR^{-1}i, PR^{-1}j)}{a(Pi, Pj)} \times \exp [i(Pk, (x - Ry))]. \quad (16)$$

Now we consider the double product over all pairs of indices (a pair is defined as a set of two elements) in the integrand of (16). By the following change of indices in the numerator,

$$R^{-1}i = i', \quad (17)$$

we write

$$\prod_{i < j} \frac{a(PR^{-1}i, PR^{-1}j)}{a(Pi, Pj)} = \frac{\prod_{Ri' < Rj'} a(Pi', Pj')}{\prod_{i < j} a(Pi, Pj)}. \quad (18)$$

In any double product, the $\frac{1}{2}N(N - 1)$ pairs occur. With each pair (i, j) in the denominator of the right-hand side of (18), we associate the corresponding identical pair (i', j') in the numerator. Thus we have two possibilities:

(a) $i' = i, j' = j$, which means

$$i < j, \quad Ri < Rj \quad (19)$$

and that the corresponding terms cancel in (18);

(b) $i' = j, j' = i$, which means

$$i < j, \quad Ri > Rj. \quad (20)$$

We will denote the inversion of the pair (i, j) by R with the notation $(i, j)_R$. For example, with the permutation $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, we have the inverted pairs $(1, 2)_{R_1}$, $(1, 4)_{R_1}$, and $(3, 4)_{R_1}$.

In case (b), the corresponding factor in (18) is clearly

$$\frac{a(Pj, Pi)}{a(Pi, Pj)}, \quad i < j, (i, j)_R. \quad (21)$$

Therefore we can write

$$I_N = \int_{R_N} dk^N \sum_{P,R} \prod_{(i,j)_R} \frac{k_{Pi} - k_{Pj} + ic}{k_{Pi} - k_{Pj} - ic} \times \exp \left(i \sum_i k_{Pi}(x_i - y_{Ri}) \right). \quad (22)$$

The change of integration variables

$$k_{Pi} \rightarrow k_i$$

gives us

$$I_N = \sum_R I(R),$$

with

$$I(R) = N! \int_{R_N} dk^N \prod_{(i,j)_R} \frac{k_i - k_j + ic}{k_i - k_j - ic} \times \exp \left(i \sum_i k_i(x_i - y_{Ri}) \right). \quad (23)$$

B. Integration Part

It remains to perform the integrations (23); let us isolate the term $I(1)$ associated with the identical

permutation. There is no pair inverted by $R =$ identity, and we have

$$I(1) = N! (2\pi)^N \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \cdots \delta(x_N - y_N). \quad (24)$$

Now we prove

$$I(R) = 0, \quad \text{for all } R \neq \text{identity}, x, y \in D. \quad (25)$$

Suppose R is given. For each pair $(i, j)_R$ inverted by R , we have the implications

$$i < j \text{ and } x \in D \Rightarrow x_i < x_j, \quad (26)$$

$$Ri > Rj \text{ and } y \in D \Rightarrow y_{Ri} > y_{Rj}. \quad (27)$$

Therefore, by setting

$$\xi_i = x_i - y_{Ri}, \quad (28)$$

we deduce from (26) and (27)

$$\xi_i < \xi_j \quad \text{for } (i, j)_R, \quad i < j. \quad (29)$$

The quantities ξ_i form a set partially ordered by the relation "inverted by R ." Let us introduce the graph Γ , the vertices of which are labeled by the indices i , with a line between i and j , if $(i, j)_R$. Since R is not the identity, the graph Γ contains at least one line. The integrand of $I(R)$ is clearly constructed by associating one factor with each line of Γ . Thus the integral $I(R)$ is a product of integrals associated with each connected part of Γ . Consider one connected part Γ_c of Γ , with L vertices and at least one line. Call the corresponding integral $I(\Gamma_c)$. Changing the name of the variables k , we have

$$I(\Gamma_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_L \cdots dk_L \prod_{(i,j) \in \Gamma_c} \frac{k_i - k_j + ic}{k_i - k_j - ic} \times \exp \left(i \sum_{i=1}^L k_i \xi_i \right). \quad (30)$$

In the variables ξ , $I(\Gamma_c)$ is a distribution Fourier transform of a rational function translationally invariant; hence its support is the plane

$$\sum_{i=1}^L \xi_i = 0, \quad (31)$$

On the other hand, there exists a vertex $m \in \Gamma_c$ such that

$$\xi_m \leq \xi_i, \quad \forall i \in \Gamma_c. \quad (32)$$

Call $\{n\}$ the set of vertices of Γ_c connected to m by a line. Since the line (m, n) exists, we have $(m, n)_R$; this means from (30) that

$$m < n \quad \text{and} \quad \xi_m < \xi_n$$

or

$$m > n \quad \text{and} \quad \xi_m > \xi_n.$$

From (32), the second part of the alternative is impossible and we are left with

$$m < n \quad \text{and} \quad \xi_m < \xi_n \quad (33)$$

for the vertices $\{n\}$ connected to m . Now we deduce

$$\xi_m < 0. \tag{34}$$

Assume $\xi_m \geq 0$; from (32) and (33) this would imply

$$\sum_{i \in \Gamma_c} \xi_i > 0,$$

which contradicts Eq. (31).

With the results $\xi_m < 0$ and $n > m$ for the vertices n connected to m by a line of Γ_c , we are able to show that $I(\Gamma_c)$ is zero. According to a theorem (Schwartz² and Gel'fand³) on the generalized functions, the Fourier transform $I(\Gamma_c)$ can be calculated as limit of the corresponding integral over a box $[-K_i < k_i < K_i]$, $i = (1, L)$ with $\lim K_i = +\infty$. We first integrate over the variable k_m . The corresponding factor J_m in $I(\Gamma_c)$ is

$$J_m = \lim_{K_m \rightarrow \infty} \int_{-K_m}^{+K_m} dk_m e^{ik_m \xi_m} \prod_{n > m} \frac{k_m - k_n + ic}{k_m - k_n - ic}. \tag{35}$$

The poles of the integrand (35) are all in the upper half-plane $k_m = k_n + ic$ ($c > 0$), and at infinity we have

$$\prod_{n > m} = 1 + O\left(\frac{1}{k_m}\right).$$

Thus we deduce $J_m = 2\pi\delta(\xi_m)$ + a function of ξ_m which is zero for $\xi_m < 0$. Therefore, in the open domain $\xi_m < 0$, the distribution J_m is zero. This proves $I(\Gamma_c) = 0$ and $I(R) = 0$ in the open domain D , for $R \neq$ identity. Then the closure property follows from (23) and (24):

$$I_N = I(1) = N! (2\pi)^N \delta(x - y) \quad x, y \in D.$$

In the following paper, we will give a direct proof of the orthogonality relation (13).

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to thank Dr. C. K. Lai for his helpful criticism.

* Work supported in part by the U.S. Atomic Energy Commission, under Contract No. AT(30-1)-3668B.

† On leave of absence from Service de Physique Théorique, C.E.A. Orme des Merisiers, B.P. No. 2, Gif-sur-Yvette, 91, France.

¹ E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).

² L. Schwartz, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris, 1960), Vol. I, Chap. VII.

³ I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized Functions* (Academic, New York, 1963), Vol. I, Chap. II, Sec. 3.5.

Bose Gas in One Dimension. II. Orthogonality of the Scattering States*

M. GAUDIN†

Institute for Theoretical Physics, State University of New York, Stony Brook, New York 11790

(Received 12 February 1971)

A direct calculation gives the normalization integral for a basis of scattering wavefunctions of interacting bosons in one dimension.

In the preceding, Paper I, we found the closure relation of a basis of scattering wavefunctions for the one-dimensional system of bosons with repulsive δ interaction. Here is given a direct calculation of the normalization integral (I.13). This approach is based on algebraic identities which show once more the interesting structure of Bethe's wavefunctions.

With the notations of Paper I, a convenient basis of scattering states for the system of N repulsive bosons is the following:

$$\psi_{(k)}(x) = \sum_P a(P) e^{i(Pk, x)}, \tag{1}$$

with $x (x_1, x_2, \dots, x_N)$ in the fundamental region D_N of R_N : $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. The k are distinct real momenta in D_N , and the coefficient $a(P)$ is

$$a(P) = \prod_{i < j} \left(1 + \frac{ic}{k_{P_i} - k_{P_j}} \right). \tag{2}$$

So far, the $\psi_{(k)}(x)$ are not normalized.

We calculate the normalization integral

$$\mathcal{N} \binom{k_1 k_2 \dots k_N}{k'_1 k'_2 \dots k'_N} = \int_{D_N} \psi_{(k)}^*(x) \psi_{(k')}(x) d^N x, \tag{3}$$

which is a generalized function, the sum of Fourier transforms of characteristic functions of the domain D_N .

Using the definitions (1) and (2), we have

$$\mathcal{N} = \sum_{P, Q} a^*(P) a'(Q) \int_{D_N} \exp [i((Qk' - Pk), x)] d^N x. \tag{4}$$

Setting

$$Pk - Qk' = q, \tag{5}$$

we calculate the distribution in q ,

$$J_N = \int_{D_N} e^{-i(q, x)} d^N x \\ = \int_{-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_N < \infty} e^{-i(q_1 x_1 + \dots + q_N x_N)} dx_1 \dots dx_N, \tag{6}$$

and we easily find

$$J_N(q) = 2\pi \delta(q_1 + q_2 + \dots + q_N) \\ \times \frac{i^{N-1}}{(q_1 + io)(q_1 + q_2 + io) \dots (q_1 + \dots + q_{N-1} + io)}. \tag{7}$$

Here we derive an equality which will be useful later. From the definition (6) of $J_N(q)$ we have

$$\sum_P J_N(Pq) = (2\pi)^N \delta(q_1) \delta(q_2) \dots \delta(q_N). \tag{8}$$

On the other hand, a known algebraic identity gives us from (7) the result

$$\sum_P J_N(Pq) \\ = 2\pi \delta(q_1 + q_2 + \dots + q_N) \\ \times \sum_{j=1}^N \frac{i^{N-1}}{(q_1 + io) \dots (q_{j-1} + io)(q_{j+1} + io) \dots (q_N + io)} \\ = (2\pi)^N \delta(q_1) \dots \delta(q_N). \tag{9}$$

Now, using (5) and (7), we obtain

$$\mathcal{N} = 2\pi i^{N-1} \delta(k_1 + \dots + k_N - k'_1 - \dots - k'_N) \\ \times \tilde{\Delta} \binom{k_1 + io, k_2 + io, \dots, k_N + io}{k'_1, k'_2, \dots, k'_N}, \tag{10}$$

with the following definition of $\tilde{\Delta}$, a rational function of $\{k\}$ and $\{k'\}$:

$$\tilde{\Delta} \binom{k}{k'} = \sum_{P, Q} a^*(P) a'(Q) \\ \times [(k_{P_1} - k'_{Q_1})(k_{P_2} + k_{P_2} - k'_{Q_1} - k'_{Q_2}) \dots \\ (k_{P_1} + \dots + k_{P_{N-1}} \\ - k'_{Q_1} - \dots - k'_{Q_{N-1}})]^{-1}. \tag{11}$$

In the expression (10), the norm \mathcal{N} appears as the product of an over-all δ function expressing the conservation of total momentum by the boundary value of an analytic function of $\{k\}$ in $\text{Im } k > 0$.

Now the fundamental identity proved in the Appendix [Eq. (A11)] is used to write $\tilde{\Delta}$ in a form which exhibits its true singularities. We obtain

from (A4)–(A6)

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\left(\begin{matrix} k \\ k' \end{matrix}\right) &= \Delta\left(\begin{matrix} k \\ k' \end{matrix}\right)(k_1 + \cdots + k_N - k'_1 - \cdots - k'_N) \\ &= \sum_R I(R) d(R) \\ &\quad \times \frac{(k_1 + \cdots + k_N - k'_1 - \cdots - k'_N)}{(k_1 - k'_{R1})(k_2 - k'_{R2}) \cdots (k_N - k'_{RN})}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta(k_1 + \cdots + k_N - k'_1 - k'_2 - \cdots - k'_N) \bar{\Delta}\left(\begin{matrix} k_1 + i0 & \cdots & k_N + i0 \\ k'_1 & \cdots & k'_N \end{matrix}\right) \\ = \sum_R I(R) d(R) \delta(k_1 + \cdots - k'_1 - \cdots - k'_N) \\ \times \sum_{j=1}^N \frac{1}{(k_1 - k'_{R1} + i0) \cdots (k_{j-1} - k'_{R(j-1)} + i0)(k_{j+1} - k'_{R(j+1)} + i0) \cdots}. \end{aligned} \quad (15)$$

The equality (9) applied to each term of the sum over R gives for the left-hand side of Eq. (15)

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\left(\begin{matrix} k + i0 \\ k' \end{matrix}\right) \delta(k_1 + \cdots - k'_N) \\ = \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{N-1} \sum_R d(R) I(R) \delta(k_1 - k'_{R1}) \cdots \delta(k_N - k'_{RN}). \end{aligned} \quad (16)$$

Clearly the function $d(R)$ has to be evaluated at the point $k_i = k'_{Ri}$ for all i . This gives from (13) and (14)

$$d(R) = I(R) \frac{\prod_{i < j} (k_i - k_j)^2}{\prod_{i < j} (k_i - k_j)^2 + c^2}. \quad (17)$$

From (10), (16), and (17), we finally obtain

$$\begin{aligned} N\left(\begin{matrix} k_1 \cdots k_N \\ k'_1 \cdots k'_N \end{matrix}\right) &= (2\pi)^N \prod_{i < j} \left(1 + \frac{c^2}{(k_i - k_j)^2}\right) \\ &\quad \times \sum_R \delta(k_1 - k'_{R1}) \cdots \delta(k_N - k'_{RN}). \end{aligned} \quad (18)$$

Together with the previous result on the closure property, the formula (18) expresses the unitarity of the following transformation function introduced in Paper I:

$$\begin{aligned} \langle \{k\} | \{x\} \rangle \\ = (2\pi)^{-N/2} [G(k)]^{-\frac{1}{2}} \psi_{(k)}(x) \\ = (2\pi)^{-N/2} \sum_P \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{i < j} \psi_{Pi, Pj} + i \sum_j k_{Pj} x_j\right), \end{aligned} \quad (19)$$

with both x and k in the domain D_N .

APPENDIX

1. Identity (A4)

Consider the coefficients $a(P)$ of the scattering Bethe's wavefunction as a function of N complex

with the coefficients $d(R)$ given by

$$d(R) = \frac{1}{\delta_N(k_1 - k'_{R1} + ic) \cdots (k_N - k'_{RN} + ic)} \quad (13)$$

and

$$\delta_N = \left| \frac{1}{k_i - k'_j + ic} \right|_N. \quad (14)$$

The only singularities of $\bar{\Delta}$ are the poles $k_i = k'_{Ri}$. Using the expansion (12), we write

numbers $\{k\}$. We choose the rational form

$$a(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left(1 + \frac{\gamma}{k_{Pi} - k_{Pj}}\right), \quad (A1)$$

with $\gamma = ic$. We call $a'(Q)$ the coefficient defined with another set $\{k'\}$, for a current permutation Q , and we note $\bar{a}(P)$, the result of reversing the sign of the constant c (or γ) in $a(P)$. When the k are real, we have $\bar{a}(P) = a^*(P)$. From the definition (A1), we have also

$$\bar{a}(P) = a(PT), \quad (A2)$$

where T is the permutation $[N(N-1) \cdots 1]$.

Let us define the quantity $\Delta_N(k)$ by the following double sum over permutations P and Q :

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \sum_{P, Q} \bar{a}(P) a'(Q) \\ &\quad \times [(k_{P1} - k'_{Q1})(k_{P1} + k_{P2} - k'_{Q1} - k'_{Q2}) \cdots \\ &\quad (k_{P1} + \cdots + k_{PN} - k'_{Q1} - \cdots - k'_{QN})]^{-1}. \end{aligned} \quad (A3)$$

Clearly Δ_N is a rational and completely symmetric function of the k , and separately of the k' . It will be expressed as the quotient of two determinants, in a way reminiscent of the bialternant of the theory of symmetric functions. We have the identity

$$\Delta\left(\begin{matrix} k_1 & \cdots & k_N \\ k'_1 & \cdots & k'_N \end{matrix}\right) = \frac{D_N}{\delta_N}, \quad (A4)$$

with

$$D_N = \left| \frac{1}{(k_i - k'_j)(k_i - k'_j + \gamma)} \right|_N \quad (A5)$$

and Cauchy's determinant

$$\delta_N = \left| \frac{1}{k_i - k'_j + \gamma} \right|_N. \quad (A6)$$

The indices i and j label, respectively, the lines and the columns in (A5) and (A6).

This identity was verified at the lowest order $N = 2$ by noticing that the sum

$$\sum_{P,Q} \bar{a}(P)a'(Q) \frac{1}{k_{P1} - k'_{Q1}}$$

is divisible by $(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)$. We obtain in a straightforward way

$$\begin{aligned} \Delta_2 \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k'_1 & k'_2 \end{pmatrix} &= \left(1 + \frac{c^2 - ic(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)}{(k_1 - k_2)(k'_1 - k'_2)} \right) \\ &\times \frac{1}{(k_1 - k'_1)(k_2 - k'_2)} \\ &+ \left(1 - \frac{c^2 - ic(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)}{(k_1 - k_2)(k'_1 - k'_2)} \right) \\ &\times \frac{1}{(k_1 - k'_2)(k_2 - k'_1)}. \end{aligned} \quad (A7)$$

Subtracting and adding the quantity $[(k_1 - k_2)(k'_1 - k'_2)]^{-1}$, we find a sum of two terms:

$$\Delta_2 = \sum_R I(R)d(R) \frac{1}{(k_1 - k'_{R1})(k_2 - k'_{R2})}, \quad (A8)$$

with $I(R)$ the sign of the permutation R and

$$d(R) = - \frac{(k_1 - k'_{R2} + ic)(k_2 - k'_{R1} + ic)}{(k_1 - k_2)(k'_1 - k'_2)}. \quad (A9)$$

In this form the generalization of (A8) and (A9) is almost obvious and leads us to

$$d(R) = \frac{\prod_{i \neq j} (k_i - k'_{Ri} + ic)}{\prod_{i < j} (k_i - k_j)(k'_j - k'_i)} \quad (A10)$$

and

$$\Delta_N = \sum_R I(R)d(R) \frac{1}{(k_1 - k'_{R1}) \cdots (k_N - k'_{RN})}. \quad (A11)$$

Using Cauchy's identity, one gets (A4).

2. Proof of Identity (A4)

The definition (A3) of Δ_N is equivalent to the following recurrence relation, obtained by multiplying the two sides of Eq. (A3) by $\sum_{i=1}^N (k_i - k'_i)$, setting $PN = r$, $QN = s$, and using the definition of $\bar{a}(P)$ and $a'(Q)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (k_i - k'_i) \Delta_N \\ &= \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \Delta_{N-1} \begin{pmatrix} \cdots k_r \cdots \\ \cdots k'_s \cdots \end{pmatrix} \\ &\times \prod_{j(i \neq r)} \left(1 - \frac{\gamma}{k_j - k_r} \right) \prod_{i(i \neq s)} \left(1 + \frac{\gamma}{k'_i - k'_s} \right). \end{aligned} \quad (A12)$$

The identity (A12) has been proved for $N = 2$ in (A7)-(A11) and now we proceed by induction over N . Assume that (A4) is true to order $N - 1$; then we have

$$\begin{aligned} \Delta_{N-1} \begin{pmatrix} \cdots k_r \cdots \\ \cdots k'_s \cdots \end{pmatrix} &= \frac{\text{cofactor } |D_N|_{rs}}{\text{cofactor } |\delta_N|_{rs}} = \frac{\text{cofactor } |D_N|_{r,s}}{\delta_N} \\ &\times \frac{(-)^{r+s} \prod_{j(i \neq r)} (k_r - k_j) \prod_{i(i \neq s)} (k'_s - k'_i)}{(k_r - k'_s + \gamma) \prod_{j(i \neq s)} (k_r - k'_j + \gamma) \prod_{i(i \neq r)} (k_i - k'_s + \gamma)}. \end{aligned} \quad (A13)$$

We choose the definition

$$|A| = \sum_s (-)^{r+s} a_{rs} \text{cofactor } |a_{rs}|.$$

Substituting in (A12) for Δ_{N-1} given by (A13), we reduce the equality to be proved to

$$\begin{aligned} &\sum (k - k') |D_N| \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \sum_{r,s} (-)^{r+s} \text{cofactor } |D_N|_{rs} (k_r - k'_s + \gamma) e_r e'_s, \end{aligned} \quad (A14)$$

with

$$e_r = \prod_{j=1}^N \frac{k_j - k_r - \gamma}{k'_j - k_r - \gamma}, \quad (A15)$$

$$e'_s = \prod_{i=1}^N \frac{k'_i - k'_s + \gamma}{k_i - k'_s + \gamma}. \quad (A16)$$

Clearly the right-hand side of (A14) is the sum of three determinants of order $N + 1$ obtained by adding to D_N one line and one column of index 0. Thus we have to prove the identity

$$-\gamma^2 \sum (k - k') D_N = D^{(1)} - D^{(2)} + \gamma D^{(3)}, \quad (A17)$$

with the definitions

$$\begin{aligned} D_{00}^{(a)} &= 0, \quad D_{rs}^{(a)} = |D_N|_{rs}, \quad r, s = [1, N], \\ D_{0s}^{(1)} &= e'_s, \quad D_{r0}^{(1)} = k_r e_r, \\ D_{0s}^{(2)} &= k'_s e'_s, \quad D_{r0}^{(2)} = e_r, \\ D_{0s}^{(3)} &= e'_s, \quad D_{r0}^{(3)} = e_r. \end{aligned} \quad (A18)$$

Now we remark that the new line (or column) is a linear combination of those of D_N . By a partial fraction decomposition of e_r and e'_s in the variable γ , we have

$$e_r = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{k_r - k'_j + \gamma}, \quad (A19)$$

$$e'_s = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{f'_i}{k_i - k'_s + \gamma}. \quad (A20)$$

From their definition, (A15) and (A16), these quantities are zero for $\gamma = 0$. Thus we obtain

$$e_r = \gamma \sum_j \frac{f_j}{(k_r - k_j)(k_r - k'_j + \gamma)}, \quad (A21)$$

$$e'_s = \gamma \sum_i \frac{f'_i}{(k_i - k'_i)(k_i - k'_s + \gamma)}, \quad (A22)$$

or in other terms,

$$D_{ro}^{(3)} - \gamma \sum_j f_j D_{rj}^{(3)} = 0. \quad (A23)$$

Thus, by combining the lines for $D^{(1)}$ and $D^{(3)}$, the columns for $D^{(2)}$ and $D^{(3)}$, we obtain

$$D^{(1)} = -D_N \cdot \gamma \left(\sum_i f'_i k_i e_i \right), \quad (A24)$$

$$D^{(2)} = -D_N \cdot \gamma \left(\sum_j f_j k'_j e'_j \right), \quad (A25)$$

$$\begin{aligned} D^{(3)} &= -D_N \cdot \left(\gamma \sum_j f_j e'_j \right) \\ &= -D_N \cdot \gamma \left(\sum_i f'_i e_i \right). \end{aligned} \quad (A26)$$

Substituting for the quantities e_i and e'_j the expressions (A19) and (A20), we add (A24), (A25), and (A26) divided by D_N :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_N} (D^{(1)} - D^{(2)} + \gamma D^{(3)}) &= -\gamma \sum_j (k'_j f_j - k_j f'_j) - \gamma^2 \sum_i f'_i \\ &\quad + \gamma \sum_{j,i} \left(\frac{-k'_j f_j f'_i}{k_i - k'_j + \gamma} + \frac{k_i f'_i f_j}{k_i - k'_j + \gamma} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \frac{f'_i f_j}{k_i - k'_j + \gamma} \right) \\ &= -\gamma^2 \sum_i f'_i + \gamma \sum_i (k_i f'_i - k'_i f_i) + \gamma \sum_{i,j} f'_i f_j. \end{aligned} \quad (A27)$$

It remains to use the definitions of the residues f_i and f'_i from (A15) and (A19):

$$\sum_i f'_i = \left(\text{coefficient of } \frac{1}{\gamma} \text{ in } e'_i \right) = \sum_i (k_i - k'_i). \quad (A28)$$

In the same way, we find

$$\sum_i f_i = \sum_i (k_i - k'_i), \quad (A29)$$

$$\sum_i k_i f'_i = \frac{1}{2} \sum (k'^2 - k^2) - \frac{1}{2} (\sum (k' - k))^2, \quad (A30)$$

$$\sum_i k'_i f_i = \frac{1}{2} \sum (k'^2 - k^2) + \frac{1}{2} (\sum (k' - k))^2. \quad (A31)$$

By using equalities (A28)–(A31), the equality (A27) becomes

$$D^{(1)} - D^{(2)} + \gamma D^{(3)} = -\gamma^2 D_N \cdot \sum (k - k'), \quad (A32)$$

which is exactly the required identity (A17). This completes the proof of the identity (A4).

3. Limiting Cases

$c \rightarrow \infty$: We have for the leading term

$$\bar{a}(P)a'(Q) \propto I(P)I(Q) \frac{c^{N(N-1)}}{\prod_{i < j} (k_i - k_j)(k'_i - k'_j)}.$$

By summing over P the right-hand side of (A3) at $R = Q^{P-1}$ fixed, we deduce from a known identity

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N}{c^{N(N-1)}} &= \frac{1}{\prod_{i < j} (k_i - k_j)(k'_i - k'_j)} \\ &\quad \times \sum_R \frac{I(R)}{(k_1 - k'_{R1}) \cdots (k_N - k'_{RN})}, \end{aligned}$$

which is precisely the limiting form available from (A10) and (A11).

$c \rightarrow 0$: $\bar{a}(P)a'(Q) \rightarrow 1$ and we have

$$\Delta_N = \left| \frac{1}{k_i - k'_j} \right|_N \quad (\text{permanent}).$$

Even in this limit we get a nontrivial identity due to Borchart¹ between this permanent and the quotient of two determinants

$$\left| \frac{1}{k_i - k'_j} \right|_N \cdot \left| \frac{1}{k_i - k'_j} \right|_N = \left| \frac{1}{(k_i - k'_j)^2} \right|_N,$$

which can be proved directly. In a following paper we will show a surprising connection between the bisymmetric $\Delta_N(\frac{k}{k'})$ and Bethe's wavefunction for the spin- $\frac{1}{2}$ fermion system.

* Work supported in part by the U.S. Atomic Energy Commission, under Contract No. AT(30-1)3668B.

† On leave of absence from Service de Physique Théorique, C.E.A. Orme des Merisiers, B.P. No. 2, Gif-sur-Yvette 91, France.

¹T. Muir, *Theory of Determinants* (Dover, New York), Chap. VI, p. 151.

Thermodynamics of the Heisenberg-Ising Ring for $\Delta \geq 1^*$

M. Gaudin†

Institute for Theoretical Physics, State University of New York, Stony Brook, New York 11790

(Received 9 April 1971)

The thermodynamics of the Heisenberg-Ising ring is reduced to the solution of a system of recurrent nonlinear integral equations.

The energy levels E of the Hamiltonian¹

$$H = \sum_{n=1}^M S_{n,x} S_{n+1,x} + S_{n,y} S_{n+1,y} + \Delta(S_{n,z} S_{n+1,z} - \frac{1}{4}), \quad (1)$$

with $S_N \equiv S_1$, are given by the coupled equations (using Bethe's notation)²

$$E = \sum_{\alpha=1}^M (\cos k_{\alpha} - \Delta), \quad (2)$$

$$Nk_{\alpha} = 2\pi\lambda_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^M \psi_{\alpha\beta}, \quad \alpha = [1, M], \quad (3)$$

where the pseudomomenta k_{α} and antisymmetric phases $\psi_{\alpha\beta}$ are parametrized³ in terms of auxiliary quantities φ_{α} :

$$\cot \frac{1}{2} k_{\alpha} = \coth \frac{1}{2} \Phi \tan \frac{1}{2} \varphi_{\alpha}, \quad \Delta = \cosh \Phi \geq 1, \quad (4)$$

$$\cot \frac{1}{2} \psi_{\alpha\beta} = \coth \Phi \tan \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha} - \varphi_{\beta}), \quad (5)$$

$$0 \leq k_{\alpha} \leq 2\pi, \quad -\pi \leq \psi_{\alpha\beta} \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi_{\alpha} \leq \pi. \quad (6)$$

The integer M is related to the magnetic spin component $S_z = \frac{1}{2}N - M$. So far the appropriate sets of integers λ are only known for the restricted class of states for which the momenta are real numbers.⁴

Applying Bethe's method,² it can be shown in the limit of large N that the roots of Eq. (3) in the complex plane of parameters φ_{μ} are grouped in various strings characterized by a common real abscissa φ and an order n . Let us call such a string a complex² $C_n(\varphi)$. We have that $C_n(\varphi)$ is comprised of the set

$$\varphi_{\mu} = \varphi + i\mu\Phi + i\delta_{\mu}\Phi, \quad (7)$$

$$\mu = -(n-1), -(n-3), \dots, n-3, n-1, \quad (8)$$

where δ_{μ} is an exponentially small quantity:

$$\ln(1/\delta_{\mu}) = O(N). \quad (9)$$

Suppose we have ν_n complexes of order n with real abscissas $\varphi_{n,i}$, $i = [1, \nu_n]$. The asymptotic form of the system (3) can be written as a system of equations for the real $\varphi_{n,i}$:

$$Nf_n(\varphi_{n,i}) = 2\pi J_{n,i} + \sum_{m,i}^{\nu_m} [nmp] f_p(\varphi_{n,i} - \varphi_{m,j})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, \nu_n, \quad (10)$$

with $f_n(\varphi)$ a continuous odd function defined by

$$\tan \frac{1}{2} f_n(\varphi) = -\coth \frac{1}{2} n\Phi \tan \frac{1}{2} \varphi, \quad (11)$$

and $[nmp]$ the completely symmetric symbol given by

$$[nmp] = \begin{cases} 1 & p = |m \pm n|, \\ 2 & |m-n| < p < m+n, \quad m+n+p \text{ even}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (12)$$

By using a continuity principle in Δ and making a noncrossing hypothesis for the real $\varphi_{n,i}$, the study of the limit $\Delta \rightarrow \infty$ on the wave function of Eq. (10) permits us to reach the following conclusion: For each order n , the quantum numbers $J_{n,i}$ are integers (or half-integers) forming an increasing sequence on some lattice interval depending on n . This fact allows a fermion-like description of the set of bound states or complex of each order.

Following the method devised by Yang and Yang⁵ for the thermodynamics of the one-dimensional boson system, we express the energy and entropy of the infinite ring as a functional of the density of complex $C_n(\varphi)$: "particle" density $\rho_n(\varphi)$ and "hole" density $\tilde{\rho}_n(\varphi)$. Equations (10) simply give the relations

$$\rho_n + \tilde{\rho}_n = dn^*(\tilde{\rho}_{n+1} + \tilde{\rho}_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

with the convention $\tilde{\rho}_0(\varphi) = 2\pi\delta(\varphi)$ and the notation

$$(dn^*\rho)(\varphi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} dn(\varphi - \varphi') \rho(\varphi') d\varphi'. \quad (13)$$

The elliptic Jacobi function⁶ $\text{dn}(\varphi)$ has the periods 2π and $4i\Phi$. In the limit $\Delta \rightarrow 1$ ($\Phi \rightarrow 0$), it is sufficient to replace $\text{dn}(\varphi)d\varphi$ by

$$(\cosh \frac{1}{2}\pi x)^{-1} \frac{1}{2}\pi dx, \quad x = \varphi/\Phi. \tag{14a}$$

We find that the energy per site is

$$E/N = E_0/N + \sinh\Phi \int_{-\pi}^{+\pi} \text{dn}(\varphi) \tilde{\rho}_1(\varphi) d\varphi, \tag{15}$$

where E_0 is the energy of the antiferromagnetic ground state,⁷ and the entropy per site is

$$S/N = \sum_{n>0} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi [(\rho_n + \tilde{\rho}_n) \ln(\rho + \tilde{\rho}) - \rho_n \ln \rho_n - \tilde{\rho}_n \ln \tilde{\rho}_n]. \tag{16}$$

Minimizing the free energy

$$F = E - TS, \tag{17}$$

with the constraint,

$$\sigma = S_x/N = \frac{1}{2} - M/N, \tag{18}$$

we obtain the equilibrium density of the complex in the form

$$\rho_n(\varphi) = \frac{r_n(\varphi)}{1 + \exp[\epsilon_n(\varphi)/T]}, \quad \tilde{\rho}_n(\varphi) = \frac{r_n(\varphi)}{1 + \exp[-\epsilon_n(\varphi)/T]} \tag{19}$$

where the *pseudoenergies* $\epsilon_n(\varphi)$ are given by a recurrent set of nonlinear integral equations:

$$\begin{aligned} \epsilon_n/T &= \text{dn}^* \{ \ln [(1 + \exp(\epsilon_{n+1}/T)) \{ 1 + \exp(\epsilon_{n-1}/T) \}] \}, \quad n > 1, \\ \epsilon_1/T &= \text{dn}^* \{ \ln [1 + \exp(\epsilon_2/T)] \} - (T^{-1} \sinh\Phi) \text{dn}. \end{aligned} \tag{20}$$

These equations must be completed by the following asymptotic condition:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{-1} \epsilon_n(\varphi)/n = \lambda > 0. \tag{21}$$

This likely determines the whole set of ϵ_n as functions of φ , T , and λ . The parameter λ will be determined by the magnetization constraint.

Now the quantities $r_n = \rho_n + \tilde{\rho}_n$ are given by

$$r_n = + \frac{1}{2\pi} \frac{T^2}{\sinh\Phi} \left. \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\epsilon_n}{T} \right) \right|_{\lambda}; \tag{22}$$

the free energy per site is

$$\frac{F}{N} = \frac{E_0}{N} - \frac{T}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \text{dn}(\varphi) \ln [1 + \exp(\epsilon_1/T)] + \sigma \lambda T; \tag{23}$$

and the magnetization per site is

$$\sigma = (1/2\pi T) \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \text{dn}(\varphi) (\partial \epsilon_1 / \partial \lambda) [1 + \exp(-\epsilon_1/T)]^{-1}. \tag{24}$$

The relation $\partial F / \partial \lambda |_{\sigma} = 0$ or

$$\lambda T = \partial(F/N) / \partial \sigma |_{T = H_0} \tag{25}$$

permits us to interpret λT as the magnetic field H_0 in presence of which the magnetization has the value σ .

The study of the Ising limit ($\Delta \rightarrow \infty$, Δ/T finite) provides a check of the calculation. The recurrence relation (20) can be solved in this case and leads to the correct thermodynamic functions of the Ising model in one dimension. In the zero-temperature limit, $T = +0$, the results of Griffiths⁴ and Yang¹ are obtained. The limiting $|\epsilon_n|$ can be interpreted as an elementary excitation energy above the Fermi level H_0 . In particular the minimum magnetic field H_1 giving a nonzero magnetization is

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} H_0 = H_1 = 2 \sinh\Phi \text{dn}(\pi), \tag{26}$$

which is precisely the value of the energy gap^{8,9} between the antiferromagnetic ground state and the first excited state $S_x = 1$.

In the limit $T = +0$ and $\sigma = +0$, we obtain

$$\epsilon_n = H_1 n - H_1, \quad n > 1; \quad -\epsilon_1 = (\text{energy of spin wave } S_x = 1) - H_1. \tag{27}$$

Finally the limit $\Delta = 1 + 0$ can be easily written by making the substitution (14a) in all the equations; for instance Eq. (20) becomes

$$\frac{\epsilon_n(x)}{T} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{\cosh|\frac{1}{2}\pi(x-x')|} \ln \left\{ \left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon_{n+1}(x')}{T}\right) \right] \left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon_{n-1}(x')}{T}\right) \right] \right\}, \quad (28)$$

which is equivalent to the set of equations recently found by Takahashi¹⁰ in his solution of the same problem for $\Delta = 1$.

I am grateful to Professor C. N. Yang who suggested the problem and to Dr. C. K. Lai for their continued interest in this work and many fruitful discussions.

*Work supported in part by the U. S. Atomic Energy Commission under Contract No. AT(30-1)3668B.

†On leave of absence from Service de Physique Theorique, Commissariat à l'Energie Atomique, Orme des Merisiers, B.P. No. 2, 91 Gif-sur-Yvette, France.

¹C. N. Yang and C. P. Yang, Phys. Rev. 147, 303 (1966), and 150, 321 (1966), and 151, 258 (1966).

²H. A. Bethe, Z. Phys. 71, 205 (1931).

³R. Orbach, Phys. Rev. 112, 309 (1955).

⁴R. Griffiths, Phys. Rev. 133, A768 (1964).

⁵C. N. Yang and C. P. Yang, J. Math. Phys. 10, 1115 (1969).

⁶E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis* (Cambridge U. Press, New York, 1958), 4th ed., Chap. XXII.

⁷L. R. Walker, Phys. Rev. 116, 1089 (1959).

⁸B. Sutherland, private communication.

⁹J. des Cloizeaux and M. Gaudin, J. Math. Phys. 7, 1384 (1966).

¹⁰M. Takahashi, to be published.

DIAGONALISATION D'UNE CLASSE D'HAMILTONIENS DE SPIN

M. GAUDIN

Service de Physique théorique, C.E.N., Saclay, B.P. 2, Gif-sur-Yvette, France

(Reçu le 26 avril 1976, accepté le 24 mai 1976)

Résumé. — On diagonalise une classe à $2N$ paramètres d'hamiltoniens quadratiques dépendant de N spins de grandeur arbitraire. Diverses extensions et applications sont données, en particulier celle de l'oscillateur couplé à une collection de systèmes indépendants à deux niveaux.

Abstract. — We diagonalize a class of quadratic hamiltonians in N spin variables, depending on $2N$ parameters. Various extensions are given, in particular an application to the system formed of a single oscillator coupled to a collection of independent two-level systems.

1. **Introduction.** — Les résultats exposés dans cet article concernant une classe générale d'hamiltoniens de spin ont été obtenus comme des sous-produits de la théorie du système de particules identiques en interaction delta à une dimension [1, 2, 3], théorie dont les détails n'ont pas toujours été publiés. Cependant les résultats en question sont assez intéressants pour mériter d'être considérés indépendamment de leur origine très particulière, et sont assez simples pour être prouvés directement, fournissant encore une illustration de la technique de Bethe-Yang. On obtient ainsi la diagonalisation d'une certaine classe d'hamiltoniens quadratiques dans les variables de spin, pouvant être associés à divers modèles de systèmes quantiques en interaction. Par exemple l'hamiltonien

$$H_0 = \sum_n V_n S_n \cdot S_n$$

qui décrit l'interaction magnétique d'un spin distingué S avec une collection de spin S_n en nombre quelconque, l'intensité des couplages V_n (moments magnétiques) étant arbitraire. On diagonalise de même l'hamiltonien

$$\tilde{H} = \sum_n (aS_n^+ + a^+ S_n^- + \epsilon_n S_n^z) + \omega a^+ a$$

qui décrit l'interaction d'un oscillateur (mode d'un champ de photons ou de phonons par exemple) avec une assemblée de systèmes à deux niveaux, dont les intervalles d'énergie sont arbitraires, soit qu'ils se trouvent dispersés autour d'une valeur centrale (effet Doppler ou largeur naturelle), soit qu'ils puissent représenter quelque chose comme une structure hyperfine.

Dans les deux cas ci-dessus, le problème du calcul des valeurs propres est ramené à la résolution d'équations algébriques couplées dont le nombre n'excède

pas la moitié des systèmes de spin indépendants, c'est-à-dire qu'on est ramené à un problème d'élimination de dimension raisonnable. La forme explicite des états propres et leur normalisation sont aussi connues, de même que la probabilité d'occupation des niveaux.

2. **Permutations : une sous-algèbre commutative.** — Soit π_N l'ensemble des permutations des entiers $1, 2, \dots, N$. On notera les permutations sous forme cyclique ; en particulier on désignera une transposition courante par (jl) , $j \neq l = 1, 2, \dots, N$. Formons les N quantités de l'algèbre de π_N ainsi définies

$$\Xi_j = \sum_{l=1}^N \frac{(jl)}{\epsilon_j - \epsilon_l} \tag{2.1}$$

où les nombres $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ sont des paramètres donnés, distincts en position générale. La somme définissant Ξ_j ne contient pas de terme correspondant à $l = j$. On a évidemment l'identité

$$\sum_{j=1}^N \Xi_j \equiv 0 \tag{2.2}$$

et seulement $N - 1$ quantités Ξ sont linéairement indépendantes, puisque, par hypothèse, la dimension de l'algèbre π_N est $N!$.

Nous avons le théorème suivant

THÉORÈME A. — Les quantités Ξ_j commutent entre elles :

$$[\Xi_j, \Xi_k] = 0 \quad \forall j, k. \tag{2.3}$$

Preuve. — Il suffit de vérifier que les termes *a priori* non nuls se compensent dans l'expression développée du commutateur :

$$\begin{aligned}
 [\Xi_j, \Xi_k] &= \sum_{i \neq j, k} \frac{(jl)(kl) - (kl)(jl)}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)(\varepsilon_k - \varepsilon_i)} + \frac{(jl)(kj) - (kj)(jl)}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)(\varepsilon_k - \varepsilon_j)} + \frac{(jk)(kl) - (kl)(jk)}{(\varepsilon_j - \varepsilon_k)(\varepsilon_k - \varepsilon_i)} \\
 &= \sum_{i \neq j, k} ((jkl) - (kjl)) \sum_{\text{circ.}} \frac{1}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \\
 &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Dans une étude sur la méthode de Bethe et ses généralisations [4], les opérateurs Ξ avaient été obtenus comme des formes limites d'une famille de matrices de transfert commutantes associées à un modèle à six vertex inhomogène. Cette famille commutante avait été introduite par Yang [1] pour résoudre le problème des fermions en interaction delta. Puis Sutherland [3] a étendu la méthode à tous les types de symétrie. Appliquée à nos opérateurs Ξ , cette méthode fournit une base orthogonale remarquable, dépendant de N paramètres arbitraires, pour la décomposition de la représentation régulière de π_N .

Nous nous limiterons dans cet article aux résultats et aux preuves pour la représentation de π_N associée au tableau d'Young à deux lignes, représentation bien connue dont on a une réalisation commode à l'aide de N opérateurs de spin σ_j ($\sigma_j \cdot \sigma_j = 3$) :

$$(lj) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_l \cdot \sigma_j). \tag{2.4}$$

Nous considérerons les opérateurs commutants H_j :

$$H_j = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_j \cdot \sigma_i}{\varepsilon_j - \varepsilon_i} \quad j = 1, 2, \dots, N \tag{2.5}$$

qui diffèrent des Ξ_j par des constantes additives et par un facteur 2 sans importance.

3. Généralisation anisotrope. — On peut généraliser le théorème A en définissant des opérateurs analogues aux H_j , mais dont l'interaction spin-spin est anisotrope

$$\tilde{H}_j = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 w_{ji}^\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_i^\alpha. \tag{3.1}$$

Ces opérateurs \tilde{H}_j , là encore, peuvent être considérés comme des formes dérivées des matrices de transfert inhomogènes introduites par Baxter [5] pour la résolution du modèle à huit vertex, et les résultats de cette section pourraient être déduits de ceux qu'il a donnés ; mais il est plus simple de faire le calcul direct. Quelles sont les conditions sur les coefficients w_{ji}^α pour avoir les commutations $[\tilde{H}_j, \tilde{H}_k] = 0$? On trouve facilement les relations nécessaires et suffisantes :

$$w_{ij}^\alpha w_{jk}^\beta + w_{ji}^\beta w_{ik}^\alpha - w_{ik}^\alpha w_{jk}^\beta = 0 \tag{3.2}$$

pour tous les triplets i, j, k d'indices distincts et les six permutations α, β, γ des indices supérieurs z, x, y , ou $(1, 2, 3)$;

$$(\sigma^z \equiv \sigma^1, \quad \sigma^x \equiv \sigma^2, \quad \sigma^y \equiv \sigma^3).$$

Nous avons résolu le système algébrique (3.2) en faisant l'hypothèse d'antisymétrie

$$w_{ij}^\alpha = -w_{ji}^\alpha \tag{3.3}$$

qui permet de l'écrire sous la forme

$$w_{ij}^1 w_{jk}^3 + w_{jk}^2 w_{ki}^1 + w_{ki}^3 w_{ij}^2 = 0. \tag{3.4}$$

Posons

$$w_{ij}^\alpha = \frac{\Theta_{\alpha+1}(u_{ij})}{\Theta_{\alpha+1}(0) \Theta_1(u_{ij})}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \tag{3.5}$$

où Θ_1 est une fonction impaire, où $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ sont des fonctions paires encore inconnues d'arguments indéterminés $u_{ij} = -u_{ji}$. Les relations (3.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 &\Theta_2(u_{ij}) \Theta_4(u_{jk}) \Theta_1(u_{ki}) \Theta_3(0) + \\
 &+ \Theta_1(u_{ij}) \Theta_3(u_{jk}) \Theta_2(u_{ki}) \Theta_4(0) \\
 &+ \Theta_3(u_{ij}) \Theta_1(u_{jk}) \Theta_4(u_{ki}) \Theta_2(0) = 0. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Sous cette forme on peut constater l'analogie de (3.6) avec les relations quartiques de Riemann entre les 4 fonctions Θ_α de Jacobi (Whittaker et Watson p. 468) [6] pourvu que l'on ait

$$u_{ij} + u_{jk} + u_{ki} = 0, \quad \forall i, j, k. \tag{3.7}$$

Il suffira donc de choisir

$$u_{ij} = u_i - u_j. \tag{3.8}$$

Les quantités u_1, u_2, \dots, u_N sont des paramètres indépendants analogues aux ε du cas isotrope. La définition exacte de Θ_α qui dépend d'un paramètre q est la suivante (dans les notations traditionnelles) [6]

$$\Theta_\alpha(u) = \theta_\alpha \left(\frac{\pi u}{2K}, q \right), \quad q = \exp \left(-\pi \frac{K'}{K} \right). \tag{3.9}$$

On déduit simplement de (3.5) la paramétrisation algébrique suivante des quantités w_{ij}^α :

$$\begin{aligned}
 w_{ij}^1 : w_{ij}^2 : w_{ij}^3 &= cs(u_i - u_j) : ds(u_i - u_j) : ns(u_i - u_j) = \\
 &= \frac{s_i c_i d_j + s_j c_j d_i}{s_i^2 - s_j^2} : \frac{s_i d_i c_j + s_j d_j c_i}{s_i^2 - s_j^2} : \frac{c_i d_i s_j + c_j d_j s_i}{s_i^2 - s_j^2} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$s_i = sn(u_i; k), \quad c_i = cn(u_i; k), \quad d_i = dn(u_i; k)$$

avec les relations

$$c_i^2 + s_i^2 = 1, \quad d_i^2 + k^2 s_i^2 = 1. \tag{3.11}$$

Le cas isotrope où les w^z sont indépendants de α s'obtient en posant $u_j = \varepsilon_j u$ et en prenant la limite $u \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim u w_{ij}^2 &= \frac{1}{\Theta_1'(0)} \frac{1}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \tag{3.12} \\ \lim u \Theta_1'(0) \tilde{H}_j &= H_j. \tag{3.13} \end{aligned} \right.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où la composante magnétique du spin total

$$S^z = \sum_{j=1}^N S_j^z \quad \left(S_j = \frac{1}{2} \sigma_j \right) \tag{3.14}$$

commute avec la suite d'opérateurs \tilde{H}_j , c'est-à-dire le cas où l'on a

$$w_{ij}^2 = w_{ij}^3 \neq w_{ij}^1 \quad (w^1 \leftrightarrow w^2) \tag{3.15}$$

ce qui correspond à la limite $q = 0$, où les fonctions Θ_α dégénèrent en fonctions circulaires. (A la limite $q = 1$, on a aussi $w' = w^2$). On posera dans ce cas pour alléger la notation

$$\left. \begin{aligned} w_{ij} &= \lim_{q \rightarrow 0} 2 q^{1/4} w_{ij}^{2,3} = 1/\sin(u_i - u_j) \\ v_{ij} &= \lim_{q \rightarrow 0} 2 q^{1/4} w_{ij}^1 = \cotg(u_i - u_j) \end{aligned} \right\} \tag{3.16}$$

Avec ces expressions on vérifie directement la relation (3.4) qui s'écrit :

$$v_{ij} w_{jk} + w_{jk} v_{ki} + w_{ki} w_{ij} = 0. \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} c(j_1 j_2 \dots j_M) &= \sum_{P \in \pi_M} \frac{1}{\sin(\omega_{P_1} - u_{j_1})} \frac{1}{\sin(\omega_{P_2} - u_{j_2})} \dots \frac{1}{\sin(\omega_{P_M} - u_{j_M})} \\ &\equiv \left| \frac{1}{\sin(\omega_\alpha - u_{j_\beta})} \right|_M \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $|F\rangle$ désigne l'état ferromagnétique de spin maximum $N/2$, et où les quantités ω_α sont déterminées par le système d'équations (algébriques en $e^{i\omega_\alpha}$)

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^N \cotg(\omega_\alpha - u_l) - \\ &- 2 \sum_{\beta=1}^{M'} \times \cotg(\omega_\alpha - \omega_\beta) = 0, \quad \alpha = [1, M]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nous définissons ainsi la suite d'opérateurs

$$\begin{aligned} \hat{H}_j &= \sum_{l=1}^N \frac{1}{\sin(u_j - u_l)} \times \\ &\times (\sigma_j^x \sigma_l^x + \sigma_j^y \sigma_l^y + \cos(u_j - u_l) \sigma_j^z \sigma_l^z) \end{aligned} \tag{3.18}$$

qui constitue une généralisation des H_j , et qui vérifie le théorème

THÉORÈME B

$$[\hat{H}_j, \hat{H}_k] = [\hat{H}_j, S^z] = 0 \quad \forall j, k. \tag{3.19}$$

Pour terminer cette section signalons que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse d'antisymétrie (3.3) dans le cas $W^2 = W^3$: on montre facilement que la solution (3.16) est équivalente à la plus générale.

4. Diagonalisation de la suite \tilde{H}_j . — Bien qu'il soit possible de diagonaliser les opérateurs anisotropes à trois constantes définis en (3.1) en transposant la méthode de Baxter (Voir réf. [4], Chap. 11), nous nous limiterons au cas anisotrope intermédiaire de la suite \tilde{H}_j commutant avec S^z , telle qu'elle est définie en (3.18).

THÉORÈME C. — Les états propres $|\psi_M\rangle$ des opérateurs \tilde{H}_j , appartenant à la composante de spin total $S^z = N/2 - M$, admettent le développement

$$\begin{aligned} |\psi_M\rangle &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_M \leq N} \times \\ &\times c(j_1 j_2 \dots j_M) S_{j_1}^- S_{j_2}^- \dots S_{j_M}^- |F\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec l'expression du coefficient $c(j)$ comme permanent d'ordre M

La valeur propre associée de \hat{H}_j est donnée par l'expression

$$\hat{h}_j = \sum_{l=1}^N \cotg(u_j - u_l) - 2 \sum_{\alpha=1}^M \cotg(u_j - \omega_\alpha). \tag{4.4}$$

Compte tenu des remarques (3.12) et (3.13), on a le

COROLLAIRE. — Les valeurs propres des opérateurs H_j (formule (2.5)) sont données par les expressions

$$h_j = \sum_{l=1}^N \frac{1}{\varepsilon_j - \varepsilon_l} - 2 \sum_{\alpha=1}^M \frac{1}{\varepsilon_j - E_\alpha} \quad (4.5)$$

où les quantités E_α sont solution du système algébrique

$$\sum_{l=1}^N \frac{1}{E_\alpha - \varepsilon_l} - 2 \sum_{\beta=1}^M \frac{1}{E_\alpha - E_\beta} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M. \quad (4.6)$$

Preuve. — Il est commode de considérer l'hamiltonien suivant

$$H = \sum_{l=1}^N 2 w_l (S^+ S_l^- + S^- S_l^+) + v_l \sigma_l^z \sigma_l^z \quad (4.7)$$

où l'on a distingué un spin particulier (sans indice) dans une collection de $N + 1$ spins. L'hamiltonien H joue donc le rôle d'un quelconque des H_j sur lequel on retombe en remplaçant w_l par w_{jl} , et v_l par v_{jl} , puis N par $N - 1$.

On a la relation, issue de (3.16)

$$w_l^2 - v_l^2 = 1 \quad 1 \leq l \leq N. \quad (4.8)$$

Développant un vecteur propre $|\psi_M\rangle$ d'énergie E sur la base des états individuels de spin, nous avons

$$|\psi_M\rangle = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_M} c(j_1 j_2 \dots j_M) S_{j_1}^- S_{j_2}^- \dots S_{j_M}^- |F\rangle + \sum_{j_1 < j_2 < \dots} e(j_1 j_2 \dots j_{M-1}) S_{j_1}^- S_{j_2}^- \dots S_{j_{M-1}}^- S^- |F\rangle \quad (4.9)$$

où les indices j_α courent de 1 à N et ne couvrent pas le spin distingué. Les amplitudes $c(j)$ et $e(j)$ sont complètement symétriques dans les indices et sont seulement définies pour des indices distincts. On étendra plus loin leur définition au cas d'indices coïncidents.

L'équation aux valeurs propres

$$H |\psi_M\rangle = E |\psi_M\rangle \quad (4.10)$$

nous donne les relations linéaires entre les amplitudes

$$\left(\frac{1}{2} E - v + v_{j_1} + v_{j_2} + \dots + v_{j_M}\right) c(j_1 j_2 \dots j_M) = w_{j_1} e(j_2 \dots j_M) + w_{j_2} e(j_1 j_3 \dots j_M) + \dots + w_{j_M} e(j_1 \dots j_{M-1}). \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{1}{2} E + v - v_{j_1} - v_{j_2} - \dots - v_{j_{M-1}}\right) e(j_1 j_2 \dots j_{M-1}) = \sum_{j \neq j_1, j_2, \dots} w_j c(j_1 j_2 \dots j_{M-1} j) \quad (4.12)$$

où l'on a posé

$$2v = \sum_{l=1}^N v_l. \quad (4.13)$$

Nous chercherons valeur propre et amplitudes sous la forme

$$\frac{1}{2} E = v + E_1 + E_2 + \dots + E_M \quad (4.14)$$

$$c(j_1 j_2 \dots j_M) = \sum_{P \in \pi_M} \frac{w_{j_1}}{E_\alpha + v_{j_1}} \frac{w_{j_2}}{E_\beta + v_{j_2}} \dots \frac{w_{j_M}}{E_\delta + v_{j_M}} \quad (4.15)$$

où P désigne une permutation courante de la suite 1, 2, ..., M ($\alpha = P1, \beta = P2, \dots$). La relation (4.11) sera satisfaite si nous choisissons l'amplitude $e(j)$ de la forme

$$e(j_2 j_3 \dots j_M) = \sum_{\alpha=1}^M e_\alpha(j_2 j_3 \dots j_M) \quad (4.16)$$

avec

$$e_\alpha(j_2 \dots j_M) = \sum_{P \in \pi_{M-1}} \frac{w_{j_2}}{E_\beta + v_{j_2}} \dots \frac{w_{j_M}}{E_\delta + v_{j_M}}. \quad (4.17)$$

Dans e_α , la somme porte sur les permutations d'ordre $M - 1$ où l'entier α a été enlevé de la suite 1, 2, ..., M ; E_α ne figure pas au second membre de (4.17).

Reste à satisfaire la relation (4.12) que nous écrivons sous la forme

$$\left(\frac{1}{2} E + v - v_{j_1} - v_{j_2} - \dots - v_{j_{M-1}}\right) \tilde{e}(j_1 j_2 \dots j_{M-1}) + w_{j_1}^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_{M-1} j_1) + w_{j_2}^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_{M-1} j_2) + \dots = \sum_{j=1}^N w_j^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_{M-1} j) \quad (4.18)$$

après avoir posé

$$\left. \begin{aligned} c(j_1 j_2 \dots j_M) &\equiv w_{j_1} \dots w_{j_M} \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_M) \\ e(j_1 \dots j_{M-1}) &\equiv w_{j_1} \dots w_{j_{M-1}} \tilde{e}(j_1 \dots j_{M-1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

A l'aide des définitions (4.15) et (4.16), le second membre de (4.18) s'écrit

$$\sum_{j=1}^N w_j^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_{M-1} j) \equiv \sum_{\alpha=1}^M r_\alpha e_\alpha(j_1 j_2 \dots j_{M-1}) \quad (4.20)$$

avec

$$r_\alpha = \sum_{j=1}^N \frac{w_j^2}{E_\alpha + v_j} \quad (4.21)$$

Examinons le premier membre de (4.18). A l'aide de (4.8) nous écrivons

$$w_{j_1}^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_{M-1} j_1) \equiv \sum_{p \in \pi_M} \frac{1}{E_\alpha + v_{j_1}} \frac{1}{E_\beta + v_{j_2}} \dots \frac{1}{E_\gamma + v_{j_{M-1}}} \frac{v_{j_1}^2 + 1}{E_\delta + v_{j_1}} \quad (4.22)$$

or, nous avons

$$\frac{v_{j_1}^2 + 1}{(E_\alpha + v_{j_1})(E_\delta + v_{j_1})} = 1 + \frac{E_\alpha^2 + 1}{(E_\alpha + v_{j_1})(E_\delta - E_\alpha)} + \frac{E_\delta^2 + 1}{(E_\delta + v_{j_1})(E_\alpha - E_\delta)} \quad (4.23)$$

et, par conséquent, nous obtenons la décomposition

$$\begin{aligned} &w_{j_1}^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_1) + w_{j_2}^2 \tilde{c}(j_1 j_2 \dots j_2) + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{\pi^{M-1}} \frac{1}{E_\beta + v_{j_2}} \dots \frac{1}{E_\delta + v_{j_{M-1}}} + \frac{1}{E_\alpha + v_{j_1}} \cdot \frac{1}{E_\gamma + v_{j_3}} \dots \frac{1}{E_\delta + v_{j_{M-1}}} + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{E_\alpha + v_{j_1}} \frac{1}{E_\beta + v_{j_2}} \dots \frac{1}{E_\gamma + v_{j_{M-2}}} + \sum_{\alpha=1}^M s_\alpha \tilde{e}_\alpha(j_1 j_2 \dots j_{M-1}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec la définition

$$s_\alpha = 2 \left(\frac{E_1^2 + 1}{E_\alpha - E_1} + \frac{E_2^2 + 1}{E_\alpha - E_2} + \dots + \frac{E_M^2 + 1}{E_\alpha - E_M} \right). \quad (4.25)$$

Au second membre de (4.24), les diverses sommes sur les π_{M-1} peuvent être regroupées après réduction au même dénominateur pour donner

$$\sum_{\alpha=1}^N (E_1 + E_2 + \dots + E_M + v_{j_1} + \dots + v_{j_{M-1}} - E_\alpha) \tilde{e}_\alpha(j_1 j_2 \dots j_{M-1})$$

de sorte que la relation (4.18) s'écrive

$$\sum_{\alpha=1}^M \left\{ \left(\frac{1}{2} E + v + \sum_{\lambda=1}^M E_\lambda \right) - E_\alpha + s_\alpha \right\} \tilde{e}_\alpha(j_1 \dots j_{M-1}) = \sum_{\alpha=1}^M r_\alpha \tilde{e}_\alpha(j_1 \dots j_{M-1}). \quad (4.26)$$

Il suffira donc d'exiger les relations suivantes

$$E - E_\alpha + s_\alpha - r_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M \quad (4.27)$$

pour que nos équations (4.26) soient identiquement satisfaites. A l'aide des définitions (4.21) et (4.25) les relations (4.27) s'écrivent

$$E - E_\alpha + 2 \sum_{\beta=1}^M \frac{E_\beta^2 + 1}{E_\alpha - E_\beta} - \sum_{j=1}^N \frac{v_j^2 + 1}{E_\alpha + v_j} = 0 \quad (4.28)$$

ou encore

$$(N - 2M + 3) \frac{E_\alpha}{E_\alpha^2 + 1} + 2 \sum_{\beta=1}^M \frac{1}{E_\alpha - E_\beta} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{E_\alpha + v_j} = 0. \quad (4.29)$$

Telles sont les équations couplées pour les quantités E_α qui déterminent la valeur de l'énergie E

$$E = 2(E_1 + E_2 + \dots + E_M) + \sum_{i=1}^N v_i \quad (4.30)$$

et les amplitudes (4.15) de l'état propre associé.

Pour achever la preuve du théorème C relatif aux opérateurs \hat{H}_j , il faut remplacer dans l'expression (4.30) la quantité v_i par v_{j_i} , afin de passer de H à \hat{H}_j , puis substituer $N - 1$ à N ; il faut enfin vérifier que le vecteur propre donné par (4.9) et la solution du système (4.28) est bien vecteur propre de tous les opérateurs \hat{H}_i ; il suffira pour cela de montrer que le développement (4.9) est en fait symétrique dans tous les indices de spin y compris le spin distingué.

Effectuons donc le remplacement

$$v_i \rightarrow v_{j_i} = \cotg(u_j - u_i)$$

et posons

$$E_\alpha = \cotg(\omega_\alpha - u_j) \quad (4.31)$$

où les ω_α dépendent *a priori* de l'indice distingué j .

Remarquons déjà que la formule (4.30) coïncide avec l'expression annoncée (4.4). D'autre part les équations couplées (4.29) s'écrivent

$$(N - 2M + 2) \cos(\omega_\alpha - u_j) + 2 \sum_{\beta=1}^M \frac{\sin(\omega_\beta - u_j)}{\sin(\omega_\beta - \omega_\alpha)} - \sum_{i=1}^N \frac{\sin(u_j - u_i)}{\sin(\omega_\alpha - u_i)} = 0. \quad (4.32)$$

Pour montrer que la dépendance dans l'indice distingué j n'est qu'apparente, il suffit de substituer dans (4.32)

$$\frac{\sin(\omega_\beta - u_j)}{\sin(\omega_\beta - \omega_\alpha)} = \cos(\omega_\alpha - u_j) + \sin(\omega_\alpha - u_j) \cotg(\omega_\beta - \omega_\alpha)$$

et l'on obtient finalement

$$\sum_{i=1}^N \cotg(\omega_\alpha - u_i) - 2 \sum_{\beta=1}^M \cotg(\omega_\alpha - \omega_\beta) = 0 \quad (4.33)$$

qui est précisément la formule (4.3) annoncée. Les quantités ω_α sont donc les mêmes pour tous les \hat{h}_j .

Enfin nous avons les amplitudes

$$c(l_1 l_2 \dots l_M) = \left| \frac{w_{l_i}}{E_\lambda + v_{l_i}} \right|_{i, \lambda = \{1, M\}} \equiv \left| \frac{1}{\sin(\omega_\lambda - u_{l_i})} \right|_{M-1} \prod_{\lambda=1}^M \sin(\omega_\lambda - u_j). \quad (4.34)$$

D'après (4.17) nous avons aussi

$$\begin{aligned} e_\alpha(l_1 l_2 \dots l_{M-1}) &= \left| \frac{w_{l_i}}{E_\lambda + v_{l_i}} \right|_{M-1} \quad (\lambda \neq \alpha) \\ &\equiv \left| \frac{1}{\sin(\omega_\lambda - u_{l_i})} \right|_{M-1} \cdot \prod_{\lambda \neq \alpha} \sin(\omega_\lambda - u_j). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Posant

$$v_j = \prod_{\lambda=1}^M \sin(\omega_\lambda - u_j) \tag{4.36}$$

nous obtenons

$$e(l_1 l_2 \dots l_M) = v_j \left| \frac{1}{\sin(\omega_\lambda - u_i)} \right|_M$$

$$e_\alpha(l_1 \dots l_{M-1}) = \frac{v_j}{\sin(\omega_\alpha - u_j)} \left| \frac{1}{\sin(\omega_\lambda - u_i)} \right|_{M-1} \quad (\lambda \neq \alpha)$$

et, par conséquent

$$e(l_1 \dots l_{M-1}) = \sum_{\alpha=1}^M e_\alpha = v_j \left| \frac{1}{\sin(\omega_\lambda - u_i)} \right|_M \tag{4.37}$$

Le facteur v_j est en tête de toutes les amplitudes : les facteurs restants admettent une définition commune conforme à l'expression annoncée en (4.2). Les états $|\psi_M\rangle$ ainsi construits sont donc bien des états propres de la suite commutante \hat{H}_j . La preuve du théorème C serait complète si le comptage des états distincts pouvait être effectué. C'est l'objet de la section suivante.

5. Questions de dénombrement et de normalisation.

— Sans que les preuves soient toujours données, cette section rassemble un certain nombre de remarques et de résultats sur le comptage, la classification et la normalisation des états précédemment construits.

Nous nous limitons d'abord au cas isotrope des opérateurs H_j , cas un peu singulier à cause de la dégénérescence de spin : le vecteur spin total $S = \sum_j S_j$

commute en effet avec les H_j . Dans le cas plus général des \hat{H}_j , la dégénérescence sera levée. Nous avons le

THÉORÈME D. — Les états $|\psi_M\rangle$ définis par les solutions du système (4.6) où les E_α sont finis, appartiennent au spin total

$$S = S^z = \frac{N}{2} - M.$$

Le nombre de solutions distinctes du système (4.6) est en général égal à

$$g_M = C_N^M - C_N^{M-1} = (N-2M+1) \frac{N!}{M!(N-M+1)!}.$$

La preuve, qui fait appel à des résultats classiques de la théorie de l'élimination, est entièrement donnée dans la thèse citée en référence [2] où avait été obtenu le même système d'équations pour la construction des états limites d'un système de fermion de spin 1/2 en interaction delta. On ignorait alors que ces états limites (il s'agit de la limite où l'interaction tend vers zéro) pouvaient servir à construire les vecteurs propres des opérateurs H_j après une simple transformation de conjugaison due à Yang [1].

Le nombre g_M est exactement le nombre d'états de spin total $S = \frac{1}{2}N - M$ obtenus par composition de N spin 1/2. Dans le cas anisotrope intermédiaire

des opérateurs \hat{H}_j où la dégénérescence de spin est levée, le système d'équations (4.3) peut être écrit de la façon suivante, après avoir posé

$$z_i = e^{2iu_i}, \quad \zeta_\alpha = e^{2i\omega_\alpha} \tag{5.1}$$

$$\frac{N-2M+2}{\zeta_\alpha} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{z_i - \zeta_\alpha} - 2 \sum_{\beta=1}^M \frac{1}{\zeta_\beta - \zeta_\alpha} = 0 \tag{5.2}$$

de structure très analogue à (4.3). Par des méthodes semblables à celles qui ont été utilisées en référence [2], on montrerait que le nombre de solutions distinctes de (5.2) est en général C_N^M : en général, c'est-à-dire en position générale des paramètres u_i (ou z_i). Dans le cas de confluence de deux quantités u au premier membre de (4.3), on montre aisément à l'aide d'une analogie électrostatique due à Stieltjes et qui sera décrite plus loin, qu'il existe des solutions de (4.3) où l'un des ω reste compris entre les deux valeurs confluentes des u et possède donc la même valeur limite. Le système à résoudre pour les ω restants correspond aux nouvelles valeurs $N' = N - 2$ et $M' = M - 1$, mais l'amplitude associée donne un état $|\psi_M\rangle$ où deux spins sont couplés à zéro, ces deux spins ne jouant plus aucun rôle dans le spectre.

Les systèmes d'équations (4.29) ou (5.2) admettent une interprétation électrostatique à deux dimensions qui peut être utile pour visualiser la configuration des racines et classer intuitivement certaines familles de solutions. Prenons par exemple l'opérateur (4.7) qui peut donner lieu à deux types d'hamiltonien hermitique

$$H_\pm = \sum_{i=1}^N w_i (\sigma_i^x \sigma_i^x + \sigma_i^y \sigma_i^y) + v_i \sigma_i^z \sigma_i^z. \tag{5.3}$$

w_i et v_i étant réels, mais vérifiant

$$w_i^2 - v_i^2 = \pm 1. \tag{5.4}$$

Pour passer du cas + au cas -, il suffit dans les formules d'effectuer la transformation

$$w_i \rightarrow iw_i, \quad v_i \rightarrow iv_i, \quad \omega_\alpha \rightarrow i\omega_\alpha, \quad E \rightarrow iE.$$

Dans les deux cas l'énergie est donnée par l'expression (4.30) et les équations couplées s'écrivent, dans le premier cas

$$H_+ : \frac{N - 2M + 3}{4} \left(\frac{1}{E_\alpha + i} + \frac{1}{E_\alpha - i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{E_\alpha + v_j} + \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{1}{E_\alpha - E_\beta} = 0. \tag{5.5}$$

et dans le second cas

$$H_- : \frac{N - 2M + 3}{4} \left(\frac{1}{E_\alpha + 1} + \frac{1}{E_\alpha - 1} \right) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{1}{E_\alpha + v_j} + \sum_\beta \frac{1}{E_\alpha - E_\beta} = 0. \tag{5.6}$$

On a donc le problème d'équilibre (stable ou instable) suivant :

M charges mobiles + 1, d'affixes E_α dans le plan, sont en présence de charges fixes de deux types : premier type, des charges $-\frac{1}{2}$ situées aux points d'abscisse réelle $-v_l$ ($l = 1, 2, \dots$); second type, deux charges positives $\frac{1}{4}(N - 2M + 3)$, aux points d'affixes $\pm i$ ou $\pm i$.

Supposons qu'on ait un hamiltonien antiferromagnétique caractérisé par $v_i > 0$, l'analogie électrostatique permet de montrer l'existence d'une classe de solutions réelles pour tous les E_α , voir figure 1

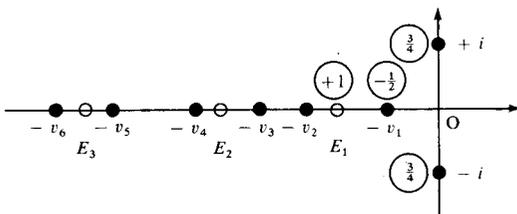


FIG. 1. — ($M = 3, N = 6$).

Cependant cette classe réelle n'est pas la plus nombreuse (il n'existe qu'une seule telle solution pour $M = N/2$) et en général certains des E_α sont complexes (conjugués par paires). Prenons par exemple le système (4.6) relatif à l'hamiltonien isotrope et supposons que les ε_i se répartissent en deux paquets, les uns sont confondus en ε_1 , les autres en ε_2 . On verra dans la section suivante que ce cas correspond tout simplement à coupler les spins 1/2 de chaque paquet

pour former deux grands spins S_1 et S_2 , de grandeur respective s_1 et s_2 . Pour l'état de spin total

$$S = s_1 + s_2 - M,$$

nos équations deviennent :

$$\frac{s_1}{x_\alpha - 1} + \frac{s_2}{x_\alpha + 1} + \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{1}{x_\beta - x_\alpha} = 0, \tag{5.7}$$

avec

$$x_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2E_\alpha}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \tag{5.8}$$

c'est-à-dire que par un changement d'échelle on place le premier paquet en + 1 et le second en - 1. D'après Szégő [7] (Orthogonal Polynomials, p. 144) les x_α ($\alpha = 1, M$) constituent les racines du polynôme de Jacobi

$$P_M^{-(2s_1+1), -(2s_2+1)}(x)$$

qu'on peut encore définir par la formule de Rodrigues dans le cas singulier où les indices supérieurs sont des entiers négatifs. On ne s'étonnera pas en conséquence que des zéros puissent être complexes. Un résultat de Hilbert donne le nombre exact de zéros réels de ce polynôme (Szégő, Réf. [7], p. 145, Théorème 6.72). Supposant $s_1 > s_2$, il faut distinguer deux cas :

a) $M \leq 2s_2$: au plus un seul zéro réel.

b) $M > 2s_2$: un zéro multiple d'ordre $2s_2 + 1$ en - 1 ; les autres zéros sont complexes, conjugués par paires.

D'après une remarque antérieure, ce cas b) est à exclure, puisque nous avons là un cas de confluence des zéros E_α avec les ε_j , ce qui entraîne que les 2 s_2 spins 1/2 ne seraient pas couplés au spin maximum. On a donc l'inégalité attendue $S \geq s_1 - s_2$, lorsqu'on se limite aux solutions de (5.7) ayant toutes leurs racines distinctes.

Enfin, toujours dans le cas isotrope, une dernière remarque sur le système suivant

$$\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{\varepsilon_i - E_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{1}{E_\beta - E_\alpha} = 0 \tag{5.9}$$

qui n'est autre que le système (4.6) étendu au cas de confluence des ε , par paquets de $2s_1, 2s_2, \dots$ comme on le verra dans la section 6.

On sait que, lorsque les nombres $2s_i$ sont tous égaux à $-\frac{1}{2}$ (ce qui n'est pas notre problème où les s_i sont essentiellement positifs), l'analogie électrique de Stieljes permet de classer très simplement toutes les solutions : celles-ci sont toutes réelles et leurs zéros se distribuent arbitrairement entre les ε_i . Le polynôme $P_M(\lambda)$ qui admet les E_α pour zéros est solution de l'équation différentielle de Lamé qui s'écrit, sous sa forme algébrique

$$P_M''(\lambda) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda - \varepsilon_i} \right) P_M'(\lambda) + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\lambda - \varepsilon_i} \right) P_M(\lambda) = 0 \tag{5.10}$$

où les paramètres α_i sont à déterminer pour que la solution $P_M(\lambda)$ soit précisément un polynôme. Ce problème est très directement lié à celui de la séparation de l'équation de Laplace à N dimensions en coordonnées ellipsoïdales, les surfaces coordonnées étant les quadriques homofocales Q_j

$$Q_j : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\lambda_j - \varepsilon_i} = 1 \quad j = [1, N]. \quad (5.11)$$

Où la méthode de séparation peut être étendue aux opérateurs différentiels du type

$$\sum_{i=1}^N A_{v_i}, \quad (5.12)$$

avec

$$A_{v_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{v_i^2 - \frac{1}{4}}{x_i^2}, \quad (5.13)$$

opérateurs qui peuvent être considérés comme des Laplaciens après séparation de certains jeux de variables angulaires de type sphérique. Cependant les valeurs des v_i peuvent être quelconques, c'est-à-dire que les laplaciens intermédiaires A_{v_i} ne sont pas nécessairement les parties radiales de laplaciens de dimension entière. Si maintenant l'on effectue la séparation de l'équation $\sum_i A_{v_i} \varphi = 0$ en coordonnées ellipsoïdales, on trouve exactement (5.9), avec $v_i = 2s_i + 1$, pour les racines des polynômes $P(\lambda)$ qui constituent les facteurs des harmoniques ellipsoïdales associées à (5.12). On notera que les valeurs $v_i = 0, \frac{1}{2}$, correspondant à la disparition du potentiel centrifuge, définissent précisément le cas exceptionnel de Lamé ($s_i = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$) où les racines des $P_M(\lambda)$ sont toutes réelles.

En conclusion, il est intéressant de constater que le problème de déterminer le spectre de nos opérateurs de *spin* est identique à celui de la construction des harmoniques ellipsoïdales d'un certain laplacien *radial* généralisé.

Passons au problème de la normalisation des états. Le lecteur aura pu faire le rapprochement entre la structure des amplitudes (4.2) définissant les états propres simultanés de nos opérateurs H_j et celle des amplitudes obtenues par Richardson pour les états propres de l'hamiltonien d'appariement [8]

$$H_{APP.} = \sum_i \varepsilon_i S_i^z - G \sum_{j,k} S_j^+ S_k^-. \quad (5.14)$$

Les équations couplées (4.6) concernant le cas isotrope de notre problème sont analogues à celles de Richardson pour l'énergie

$$E_{APP.} = \sum_i E_i,$$

à ceci près que le second membre des éqs. (4.6) est égal à G^{-1} , au lieu d'être nul dans notre cas. Nous n'avons pas réussi à construire $H_{APP.}$ comme limite

d'une superposition de \hat{H}_j ; malgré les analogies, les deux problèmes apparaissent comme distincts.

La méthode de Richardson [9] pour le calcul de la norme de $|\psi_M\rangle$ pourrait être transposée au cas général qui est le nôtre et donnerait probablement le résultat suivant

CONJECTURE

$$\langle \psi_M | \psi_M \rangle \equiv \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_M \leq N} c^2(j_1 j_2 \dots j_M) \\ = \det \left| \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \omega_\beta} \right|_M \quad (5.15)$$

où les η_α désignent les premiers membres de (4.3) :

$$\eta_\alpha = \sum_i \cotg(u_i - \omega_\alpha) - 2 \sum'_\beta \cotg(\omega_\beta - \omega_\alpha). \quad (5.16)$$

6. Extension au spin quelconque. — La généralisation des résultats précédents aux hamiltoniens quadratiques dont les spins constituants ont une grandeur quelconque, est presque immédiate.

Sur les N opérateurs \hat{H}_j considérés en (3.18), nous en choisissons P , définis par exemple par les indices $1 \leq j \leq P$. Du fait de l'antisymétrie des coefficients, nous avons

$$\mathcal{K}_0 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \dots + \hat{H}_P = \\ = \sum_{j \leq P} \sum_{l > P} w_{jl} \sigma_j^T \cdot \sigma_l^T + v_{jl} \sigma_j^z \sigma_l^z, \quad (6.1)$$

où l'on a écrit $\sigma^T \cdot \sigma^T$ pour $\sigma^x \sigma^x + \sigma^y \sigma^y$.

La valeur propre associée de \mathcal{K}_0 est donc

$$h_0 = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \dots + \hat{h}_P, \quad (6.2)$$

c'est-à-dire, d'après (4.4)

$$h_0 = \sum_{j \leq P} \sum_{l > P} \cotg(u_j - u_l) - 2 \sum_{j \leq P} \sum_\alpha \cotg(u_j - \omega_\alpha). \quad (6.3)$$

Nous pouvons alors faire confluer les quantités u_1, u_2, \dots, u_P , vers une même valeur u_0 . Nous obtenons :

$$\mathcal{K}_0 = \sum_{l \geq P+1} 2(w_{0l} S_0^T \cdot \sigma_l^T + v_{0l} S_0^z \sigma_l^z) \quad (6.4)$$

avec

$$S_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_P) \quad (6.5)$$

et

$$w_{0l} = 1/\sin(u_0 - u_l), \dots$$

D'après une remarque de la section 5, le couplage des P spins $1/2$ donnera le spin maximum $s_0 = \frac{1}{2}P$, si nous sélectionnons les solutions du système (4.3) de sorte que les ω_α ne confluent avec aucune des valeurs u_0 ou u_j , puisque la confluence d'un ω avec deux u qui l'encadrent entraîne le couplage à zéro des deux spins $1/2$ associés.

Continuant à coupler les autres spins (d'indice supérieur à P) par paquets de taille $2s_1 + 1, 2s_2 + 1$, etc..., nous avons le théorème

THÉORÈME E. — Les opérateurs

$$\hat{\mathcal{H}}_j = \sum_{i=1}^N (w_{ji} S_i^T \cdot S_i^T + v_{ji} S_j^z S_i^z) \quad (6.6)$$

dépendant des N paramètres distincts u_1, u_2, \dots, u_N ; où l'on a posé

$$w_{ji} = 1/\sin(u_j - u_i), \quad v_{ji} = \cotg(u_j - u_i),$$

et où les S_j sont des opérateurs de spin s_j

$$S_j^2 = s_j(s_j + 1), \quad (6.7)$$

commutent entre eux.

Leurs valeurs propres sont données par les expressions

$$\hat{h}_j = s_j \left\{ \sum_{i=1}^N s_i \cotg(u_j - u_i) - \sum_{\alpha=1}^{M'} \cotg(u_j - \omega_\alpha) \right\} \quad (6.8)$$

pour les états dont la déviation de spin est M , c'est-à-dire tels que la composante magnétique du spin total soit

$$S^z = \sum_{j=1}^N s_j - M. \quad (6.9)$$

Les équations couplées qui déterminent les M quantités ω_α sont

$$\sum_{j=1}^N s_j \cotg(u_j - \omega_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{M'} \cotg(\omega_\beta - \omega_\alpha) = 0. \quad (6.10)$$

On écrirait facilement la forme particulière de ce résultat dans le cas isotrope. Nous limitant d'ailleurs à ce dernier cas, rassemblons, pour finir ce paragraphe, quelques opérateurs que les méthodes précédentes diagonalisent :

$$\left\{ \begin{aligned} H_0 &= \sum_{j=1}^N v_j S_0 \cdot S_j & (6.11) \\ S^2 &= \left(\sum_{j=1}^N v_j S_j \right)^2 & (6.12) \\ T &= \sum_{1 \leq j < l \leq N} \frac{1}{\varepsilon_j + \varepsilon_l} S_j \cdot S_l & (6.13) \end{aligned} \right.$$

les paramètres v_j et ε_j étant arbitraires, ainsi que la grandeur des spins s_j .

Plus généralement on diagonalise de la même façon tout hamiltonien de Heisenberg de la forme

$$\frac{1}{4} \sum_j \eta_j H_j = \sum_{j < l} \frac{\eta_j - \eta_l}{\varepsilon_j - \varepsilon_l} S_j \cdot S_l \quad (6.14)$$

où les quantités η_j et ε_j sont arbitraires.

Donnons les expressions des valeurs propres :

a) De H , pour le spin total $S = S^z$:

$$H = s_0 \sum_{j=1}^N s_j v_j - \sum_{\alpha=1}^M \Omega_\alpha \quad (6.15)$$

avec les équations

$$\frac{S^z + 1}{\Omega_\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{v_j - \Omega_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{1}{\Omega_\beta - \Omega_\alpha}, \quad (6.16)$$

$$S^z = s_0 + \sum_j s_j - M \quad \alpha = [1, M].$$

b) De S^2 , pour le spin total $S = S^z$:

$$S^2 = \sum_j s_j v_j^2 + \left(\sum_j s_j v_j \right)^2 + 2 \sum_{j,\alpha} \frac{s_j v_j^2}{\Omega_\alpha - v_j} \quad (6.17)$$

où les équations couplées sont formellement identiques à (6.16).

c) De T , où il suffit de faire la transformation

$$\varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_j^2, \quad \eta_j \rightarrow \varepsilon_j, \quad (6.18)$$

dans les équations du théorème E (à la limite isotrope).

Signalons encore qu'en choisissant $\eta_j = \sin 2u_j$, on a l'hamiltonien

$$\frac{1}{4} \sum_j \eta_j \hat{H}_j = \sum_{j \neq l} \frac{1}{2} \cos(u_j + u_l) S_j^+ S_l^- + S^z \sum_j \cos 2u_j S_j^z,$$

qui n'est pas sans rapport avec l'hamiltonien d'appariement, puisque S^z est une constante du mouvement.

7. Oscillateur couplé à des systèmes indépendants. — Considérons l'hamiltonien anisotrope analogue à (4.7), mais où les spins ont des valeurs arbitraires selon la théorie de la section 6. Le spin distingué est de grandeur s_0 , les autres s_j . Nous avons donc

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{i=1}^N (w_i S_0^T S_i^T + v_i S_0^z S_i^z) \quad (7.1)$$

avec

$$w_i^2 - v_i^2 = 1. \quad (7.2)$$

Compte tenu des résultats du théorème E, nous écrivons les valeurs propres \hat{h}_0 sous la forme analogue à (4.30)

$$\hat{h}_0 = s_0 \left(\sum_{i=1}^N s_i v_i + \sum_{\alpha=1}^M E_\alpha \right) \quad (7.3)$$

où les E_α sont solutions du système algébrique :

$$\sum_{j=1}^N \frac{s_j}{v_j + E_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{1}{E_\alpha - E_\beta} - (S^z + 1) \frac{E_\alpha}{E_\alpha^2 + 1} = 0. \quad (7.4)$$

La correspondance avec les notations du théorème E s'établit en remarquant que l'on a

$$v_i = \cotg(u_0 - u_i), \quad E_\alpha = \cotg(\omega_\alpha - u_0), \quad (7.5)$$

et

$$S^z = s_0 + \sum s_j - M. \quad (7.6)$$

Nous allons examiner une forme limite de l'hamiltonien (7.1) lorsque, les produits $v_i \sqrt{s_0}$ restant finis, la grandeur du spin s_0 augmente indéfiniment et l'algèbre du spin S_0 se contracte en celle de l'oscillateur harmonique.

Choisissons pour S_0 la représentation standard construite à l'aide de deux opérateurs de boson : a et b

$$\left. \begin{aligned} S_0^+ &= ab^+, & S_0^- &= a^+ b, \\ S_0^z &= \frac{1}{2}(b^+ b - a^+ a), & s_0 &= \frac{1}{2}(b^+ b + a^+ a). \end{aligned} \right\} (7.7)$$

Notre hamiltonien (7.1) s'écrit

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{2} (a^+ b S_i^+ + ab^+ S_i^-) + v_i S_i^z (s_0 - a^+ a). \quad (7.8)$$

Nous considérons une limite faible de la matrice d'énergie, dans les conditions

$$\lim w_i = 1, \quad \lim v_i \sqrt{2s_0} = -\varepsilon_i. \quad (7.9)$$

Nous posons

$$\tilde{H} = \lim (s_0/2)^{-1/2} \hat{\mathcal{H}}_0^{\text{tr}} \quad (7.10)$$

où $\hat{\mathcal{H}}_0^{\text{tr}}$ est la matrice $\hat{\mathcal{H}}_0$ tronquée de sorte que les éléments de matrice de a et a^+ soient actuellement finis. Dans ces conditions nous avons les limites

$$\lim \frac{1}{\sqrt{2s_0}} a^+ b = a^+, \quad \lim \frac{1}{\sqrt{2s_0}} ab^+ = a \quad (7.11)$$

et, par conséquent

$$\tilde{H} = \sum_{i=1}^N (a^+ S_i^+ + a S_i^- - \varepsilon_i S_i^z). \quad (7.12)$$

(Il serait loisible d'effectuer ici la transformation canonique $S_i^+ \rightarrow S_i^-, S_i^z \rightarrow -S_i^z$, de façon à présenter \tilde{H} sous une forme plus traditionnelle.)

Pour la suite supposons que l'on ait $s_i = \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas une restriction, puisque les valeurs des ε_i peuvent venir se confondre.

L'opérateur $a^+ a - \sum_i (S_i^z - \frac{1}{2})$ commute visiblement avec l'hamiltonien \tilde{H} . De l'égalité (7.6), on déduit

$$a^+ a - \sum_i (S_i^z - \frac{1}{2}) = M; \quad (7.13)$$

Le nombre entier M est donc positif ou nul.

Les valeurs propres de \tilde{H} sont données par l'expression

$$\tilde{h} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i + \sum_{\alpha=1}^M \tilde{E}_\alpha \quad (7.14)$$

où les \tilde{E}_α sont solutions du système algébrique

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\tilde{E}_\alpha - \varepsilon_j} - 2 \sum_{\beta=1}^M \frac{1}{\tilde{E}_\alpha - \tilde{E}_\beta} - \tilde{E}_\alpha = 0. \quad (7.15)$$

Les états propres limites ont la forme

$$|\tilde{\psi}_M\rangle = \prod_{\alpha=1}^M \left(a^+ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{S_j^-}{\tilde{E}_\alpha - \varepsilon_j} \right) |F\rangle, \quad (7.16)$$

$|F\rangle$ désigne l'état $M=0$, où l'oscillateur est au fondamental et la projection du spin maximum : $S^z = N/2$.

Manifestement l'hamiltonien \tilde{H} représente un oscillateur couplé à un ensemble de systèmes indépendants à deux niveaux. On peut imaginer par exemple un mode électromagnétique couplé à un ensemble d'atomes dont les énergies de résonance sont distribuées autour d'une valeur centrale, par effet Doppler ou du fait de la largeur naturelle. Puisque dans \tilde{H} la grandeur des spins est arbitraire, on peut représenter aussi un système d'atomes plongés dans un champ magnétique inhomogène, etc... Bien sûr, cet hamiltonien est distinct de celui qui décrit le couplage d'un atome unique aux divers modes du champ de photons, et il n'en a pas l'intérêt. Dans l'approximation du champ tournant [10] (C.T.), ce dernier s'écrit schématiquement

$$H_{\text{C.T.}} = \sum_i (a_i^+ S^- + a_i S^+ + \varepsilon_i a_i^+ a_i). \quad (7.17)$$

Son spectre n'est pas connu, sauf quand il y a seulement un ou deux photons en présence au maximum.

Evidemment \tilde{H} et $H_{\text{C.T.}}$ sont équivalents lorsque les énergies d'excitation ε_i sont toutes identiques. Résoudre en ce cas le système d'équations (7.15) équivaut à trouver une solution polynomiale de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} P''(x)(x - \varepsilon) + P'(x)(x^2 - x\varepsilon - N) - \\ - P(x) \left(Mx + \tilde{h} + \left(\frac{N}{2} - M \right) \varepsilon \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

avec degré $P(x) = M$.

L'équation que vérifie le polynôme $P(\varepsilon + x)$ est elle-même équivalente à la récurrence à trois termes qu'on obtient entre les coefficients de $P(\varepsilon + x)$ lorsqu'on écrit l'équation aux valeurs propres $\tilde{H} |\tilde{\psi}\rangle = \tilde{h} |\tilde{\psi}\rangle$ dans la base standard du spin total S . Cette remarque n'a d'autre intérêt que d'indiquer un test de cohérence de notre calcul. En ce qui concerne la résolution d'équations telles que (7.15), on peut

soit se ramener à un problème d'élimination raisonnable si M est petit en construisant les solutions polynomiales d'équations différentielles du type (5.10) ou (7.18), soit résoudre numériquement sur ordinateur en suivant les racines \tilde{E}_z par continuité à partir d'une région où elles sont connues en fonction d'un paramètre qui peut être lié aux ε_z . C'est le cas pour le système (7.15) : si les ε_i deviennent tous très grands, les \tilde{E}_z tendent vers les zéros du polynôme d'Hermite $H_M(i\tilde{E}/\sqrt{2})$; ils sont tous situés sur l'axe imaginaire. On peut suivre les zéros par continuité en faisant décroître la grandeur des ε_i jusqu'à leur valeur actuelle.

Une limite intéressante à étudier est celle où le nombre des systèmes ou des spins couplés devient très grand, de sorte que la distribution des énergies ε_i

devienne continue. Dans certains cas, les racines \tilde{E} se densifient sur des arcs du plan complexe. Les équations du type (4.4) ou (4.6) donnent lieu à une équation intégrale singulière du type de Hilbert; la solution en est bien connue et peut être explicitée, comme nous l'avons déjà fait pour la solution de l'hamiltonien d'appariement [2] : on retombe exactement sur le résultat classique de Bogoliubov. Il semble qu'on obtienne quelque chose d'analogue avec les hamiltoniens plus généraux considérés ici, c'est-à-dire que l'approximation du champ moyen donnerait le résultat asymptotiquement exact pour le fondamental, dans l'hypothèse où les ε_i forment un spectre continu à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$, M/N fini).

Bibliographie

- [1] YANG, C. N., *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1312.
- [2] GAUDIN, M., Thèse Université de Paris (1967) : Rapport CEA R-3569 (1968). Rapport interne DPhT CEN-Saclay (1968).
- [3] SUTHERLAND, B., *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 98.
- [4] GAUDIN, M., *Modèles exacts en mécanique statistique : la méthode de Bethe et ses généralisations*. Note CEA 1559(1)-(1972) et 1559(2)-(1973). CEN-Saclay.
- [5] BAXTER, R., *Ann. Phys.* **70** (1972) 193 ; **70** (1972) 323 ; **76** (1973) 48.
- [6] WITTAKER and WATSON, *Modern Analysis* (IV Ed. Cambridge) 1958, p. 468.
- [7] SZEGO, G., *Orthogonal Polynomials* (Amer. Math. Soc.) 1939.
- [8] RICHARDSON, R. W. and SHERMAN, N., *Nucl. Phys.* **52** (1964) 221.
- [9] RICHARDSON, R. W., *J. Math. Phys.* **6** (1965) 1034.
- [10] HAROCHE, S., *Annls. de Phys.* **6** (1971) 210.

Matrices R de dimension infinie

M. Gaudin

Service de Physique Théorique (*) de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Recu le 3 juin 1988, accepté le 20 juillet 1988)

Résumé. — On donne deux exemples de matrices R de dimension infinie vérifiant les relations de Yang-Baxter.

Abstract. — Two examples are given of infinite dimensional R matrices verifying the Yang-Baxter relations.

1. Définition.

On pourrait sans doute construire des matrices infinies ou des noyaux intégraux vérifiant les relations ternaires de Yang-Baxter, par passage à la limite sur la dimension ou à la limite continue de modèles discrets existants [1]. On voudrait simplement donner ici une preuve directe de la relation ternaire pour deux familles de matrices R , discrètes,

rationnelles dans le paramètre spectral, de dimension infinie.

Pour la première famille, les états du modèle de vertex sont dans \mathbb{Z} , et pour la seconde famille dans $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, c'est-à-dire dans un groupe additif G qui sera réalisé dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} . La structure de R n'est pas originale, mais les points essentiels concernent la structure polaire et la convergence.

Les variables d'état étant notées $\alpha, \beta, \lambda, \mu \dots \in G$ les paramètres $u, v, \tau \in \mathbb{C}$, on définit R et A :

$$\begin{aligned}
 (\alpha\beta | R(u) | \lambda\mu) &= \delta(\alpha + \beta - \lambda - \mu) \cdot (|A|) \\
 &= \delta(\alpha + \beta - \lambda - \mu) \cdot \left[\frac{1}{\beta - \lambda + u} - \frac{1}{\beta - \mu + v} \right].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Le paramètre spectral est u . Le second v est fixé. Pour la première famille, α, β, \dots sont des entiers relatifs de \mathbb{Z} . Pour la seconde, on écrira

$$\alpha = m + \tau n; \quad (m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \tag{2}$$

où τ est un troisième paramètre complexe $\Im m \tau > 0$. Le facteur delta multipliant l'élément A , formule (1), est le symbole de Kronecker dans G et exprime la conservation au vertex, $\alpha + \beta = \lambda + \mu \dots$

Nous voulons établir la relation

$$R_{23} R_{13} R_{12} = R_{12} R_{13} R_{23} \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\rho, \sigma, \tau} (\beta\gamma | R | \sigma\tau) (\alpha\tau | R' | \rho\nu) (\rho\sigma | R'' | \lambda\mu) = \\
 &= \sum_{\rho, \sigma, \tau} (\alpha\beta | R'' | \rho\sigma) (\rho\gamma | R' | \lambda\tau) (\sigma\tau | R | \mu\nu)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

où l'on a écrit R, R', R'' pour $R(u), R(u'), R(u'')$, avec $u = u_2 - u_3 = u_{23}, u' = u_{13}, u'' = u_{12}$. La triple sommation n'est qu'une somme sur une seule variable $\rho \in G$, du fait des relations de conservation. La relation à prouver devient alors

(*) Laboratoire de l'Institut de Recherche Fondamentale du Commissariat à l'Energie Atomique

$$\sum_{\rho \in G} (\beta \gamma |A| \beta + \gamma - \nu - \rho, \nu + \rho)(\alpha, \nu + \rho | \cdot i' | \alpha + \rho, \nu) (\alpha + \rho, \lambda + \mu - \alpha - \rho |A''| \lambda \mu) =$$

$$= \sum_{\rho \in G} (\alpha \beta |A''| \lambda + \rho, \alpha + \beta - \lambda - \rho)(\lambda + \rho, \gamma |A'| \lambda, \gamma + \rho)(\mu + \nu - \gamma - \rho, \gamma + \rho |A| \mu \nu) \quad (5)$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu; \quad \alpha + \beta + \gamma = \lambda + \mu + \nu$$

ou plus explicitement en vertu de (1)

$$\sum_{\rho} \left(\frac{1}{\nu - \beta + \rho + u} - \frac{1}{\gamma - \nu - \rho + v} \right) \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\rho + v'} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\mu - \alpha - \rho + u''} - \frac{1}{\lambda - \alpha - \rho + v''} \right) =$$

$$\sum_{\rho} \left(\frac{1}{\beta - \lambda - \rho + u''} - \frac{1}{\lambda - \alpha + \rho + v''} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{-\rho + v'} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\gamma - \mu + \rho + u} - \frac{1}{\gamma - \nu + \rho + v} \right). \quad (6)$$

On a introduit pour la preuve les paramètres v' et v'' qui seront finalement égaux à v . On note que les éléments polaires sont bien définis pour $u, v \in \dot{\mathbb{C}}$, c'est à dire \mathbb{C} privé des représentants de G, \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

2. Preuve de la relation ternaire.

La remarque essentielle est que, dans les deux cas, les sommes infinies sur G sont normalement convergentes. En effet, par inspection des termes de la série du premier membre de (6), on a uniformément par rapport à v et u, u', u'' , sur tout compact intérieur à $\dot{\mathbb{C}}$:

$$A(\rho) = 0 \left(\frac{1}{|\rho|} \right);$$

$$A'(\rho) = 0(1);$$

$$A''(\rho) = 0 \left(\frac{1}{|\rho|^2} \right); \quad (7)$$

et par conséquent, pour le terme général du premier membre

$$AA'A''(\rho) = 0 \left(\frac{1}{|\rho|^3} \right). \quad (8)$$

Même résultat pour le second membre, les rôles de A et A'' étant inversés. Or les séries $\sum_n |n|^{-3}$, et

$\sum_{n,m} |m + n\tau|^{-3}$ convergent normalement.

Pour effectuer les sommes indiquées en (6), il est alors naturel de décomposer le terme général en éléments simples par rapport à la variable ρ . La convergence uniforme légitime les remaniements nécessaires, le passage à la limite $v' \rightarrow v$, et surtout l'usage d'une régularisation quelconque mais définie, commode pour le calcul des sommes partielles.

La décomposition polaire de $AA'A''$ comprend cinq termes

$$\frac{1}{\nu - \beta + \rho + u} \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\beta - \nu - u + v'} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\gamma - \mu + u + v''} \right)$$

$$\frac{1}{\mu - \alpha - \rho + u''} \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\mu - \alpha + u'' + v'} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\lambda - \beta - u'' + v} \right)$$

$$\frac{-1}{\gamma - \nu - \rho + v} \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v + v'} \right) \left(\frac{1}{\beta - \lambda + u'' - v} - \frac{1}{\beta - \mu - v + v''} \right)$$

$$\frac{-1}{\lambda - \alpha - \rho + v''} \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\lambda - \alpha + v' + v''} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \mu + u + v''} - \frac{1}{\mu - \beta + v - v''} \right)$$

$$\frac{-1}{\rho + v'} \left(\frac{1}{\nu - \beta + u - v'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v + v'} \right) \left(\frac{1}{\mu - \alpha + u'' + v'} - \frac{1}{\lambda - \alpha + v' + v''} \right) \quad (9)$$

La décomposition du second membre $A''A'A$ s'obtient à partir du premier, a) par l'échange

$(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu)$. b) par transposition des matrices A, A', A' , ce qui revient juste à changer le signe de l'argument dans le second terme de A ; en effet

$$(\lambda \mu | R | \beta \alpha) = \delta(\alpha + \beta - \lambda - \mu) \left(\frac{1}{\beta - \lambda + u} - \frac{1}{\mu - \beta + v} \right), \tag{10}$$

d'où la décomposition du second membre de (6), dont les termes sont écrits en correspondance avec ceux du premier membre

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma - \mu + \rho + u} \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\beta - \nu - u + v''} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\gamma - \mu + u + v'} \right) \\ & \frac{1}{\beta - \lambda - \rho + u''} \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\mu - \alpha + u'' + v} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\lambda - \beta - u'' + v'} \right) \\ & \frac{-1}{\gamma - \nu + \rho + v} \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v + v'} \right) \left(\frac{1}{\mu - \alpha + u'' + v} - \frac{1}{\beta - \mu - v + v''} \right) \\ & \frac{-1}{\lambda - \alpha + \rho + v''} \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\lambda - \alpha + v' + v''} \right) \left(\frac{1}{\nu - \beta + u + v''} - \frac{1}{\mu - \beta + v - v''} \right) \\ & \frac{+1}{\rho - v'} \left(\frac{1}{\beta - \lambda + u'' - v'} - \frac{1}{\lambda - \alpha + v' + v''} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \mu + u + v'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v + v'} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

On peut alors effectuer les sommes sur ρ à condition d'introduire une régularisation adaptée. Pour la première famille, $G = \mathbb{Z}$, le plus simple est de choisir . . .

$$f(x) = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho + x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{n + x} = \pi \cotg \pi x. \tag{12}$$

dont le seul intérêt pour la suite est d'être périodique : $f(x + 1) = f(x)$. Pour la seconde famille,

$\rho = m + n\tau$, les choses sont moins directes car la somme régularisée ne saurait être doublement périodique. C'est pourquoi nous traiterons d'abord complètement le cas de la première famille \mathbb{Z} .

Examinons ensuite la définition des termes. Ils sont tous définis dans le domaine des paramètres appelé \hat{C} , sauf pour $v = v'' = v'$ dans les termes dangereux $\beta - \mu = 0$, ce qui correspond à un pôle double du produit initial. Montrons que les contributions relatives au pôle double sont identiques dans les deux membres pour $\beta = \mu$. On obtient au premier membre d'après (9), avec $\lambda - \alpha = \gamma - \nu$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v - v''} \left(\sum_{\rho} \frac{-1}{\gamma - \nu - \rho + v} \right) \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v + v'} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{v - v''} \left(\sum_{\rho} \frac{+1}{\gamma - \nu - \rho + v''} \right) \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v' + v''} \right) \end{aligned} \tag{13}$$

et au second membre, avec $\gamma - \lambda = \nu - \alpha$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v - v''} \left(\sum_{\rho} \frac{-1}{\gamma - \nu + \rho + v} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v + v'} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{v - v''} \left(\sum_{\rho} \frac{1}{\gamma - \nu + \rho + v''} \right) \left(\frac{1}{\gamma - \lambda + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v' + v''} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

La seule différence entre les deux expressions (13) et (14) est le signe de la variable de sommation ρ . Toute régularisation invariante par $\rho \rightarrow -\rho$, comme c'est le cas pour le choix (12), manifeste l'identité des deux membres. Pour la seconde famille la régularisation (25) aura aussi cette propriété.

Puisque la limite $v'' \rightarrow v$ existe dans chaque membre et vaut

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ f(v + \gamma - \nu) \times \left(\frac{1}{\nu - \alpha + u'} - \frac{1}{\gamma - \nu + v' + v} \right) \right\}. \tag{15}$$

Nous poserons donc désormais $v' = v'' = v$, en excluant de considérer les termes polaires $\beta = \mu$. Nous obtenons ainsi le second membre de (6), après sommation

$$\begin{aligned}
 & f(u + \gamma - \mu) ([\nu - \alpha + u']^{-1} - [\beta - \nu - u + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\gamma - \mu + u + v]^{-1}) \\
 & f(u'' + \beta - \lambda) ([\nu - \alpha + u']^{-1} - [\mu - \alpha + u'' + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\lambda - \beta - u'' + v]^{-1}) \\
 & - f(v + \gamma - \nu) ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\gamma - \nu + 2v]^{-1}) \cdot ([\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} - [\beta - \mu]^{-1}) \\
 & - f(v + \lambda - \alpha) ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) \cdot ([\nu - \beta + u - v]^{-1} - [\mu - \beta]^{-1}) \\
 & - f(v) ([\beta' - \lambda + u'' - v]^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \mu + u + v]^{-1} - [\gamma - \nu + 2v]^{-1})
 \end{aligned} \tag{16}$$

et le premier membre

$$\begin{aligned}
 & f(u + \nu - \beta) ([\nu - \alpha + u']^{-1} - [\beta - \nu + u + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\gamma - \mu + u + v]^{-1}) \\
 & f(u'' + \mu - \alpha) ([\nu - \alpha + u']^{-1} - [\mu - \alpha + u'' + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\lambda - \beta - u'' + v]^{-1}) \\
 & - f(v + \gamma - \nu) ([\nu - \alpha + u']^{-1} - [\gamma - \nu + 2v]^{-1}) \cdot ([\beta - \lambda + u'' - v]^{-1} - [\beta - \mu]^{-1}) \\
 & - f(v + \lambda - \alpha) ([\nu - \alpha + u']^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \mu + u + v]^{-1} - [\mu - \beta]^{-1}) \\
 & - f(v) ([\nu - \beta + u - v]^{-1} - [\gamma - \nu + 2v]^{-1}) \cdot ([\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Ceci est valide pour les deux familles.

Montrons l'identité des deux membres pour la première famille. D'après la périodicité issue de (12), nous avons

$$\begin{aligned}
 f(u + \gamma - \mu) &= f(u + \nu - \beta) = f(u), \text{ etc...} \\
 f(v + \gamma - \nu) &= f(v + \lambda - \alpha) = f(v), \tag{18}
 \end{aligned}$$

et les deux premiers termes (les deux premières lignes) de (16) et (17) sont identiques. Restent les seuls coefficients de $f(v)$. On constate que sept facteurs sont identiques dans les deux membres. Reste finalement à prouver, après compensation de deux termes à l'intérieur de chaque membre,

$$\begin{aligned}
 & [\nu - \alpha + u']^{-1} ([\beta - \lambda + u'' - v]^{-1} + [\gamma - \mu + u + v]^{-1}) + [\nu - \beta + u - v] [\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} \equiv \\
 & \equiv [\gamma - \lambda + u']^{-1} ([\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} + [\nu - \beta + u - v]^{-1}) + [\beta - \lambda + u'' - v] [\gamma - \mu + u + v]^{-1} \tag{19}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu des relations de conservation

$$\begin{aligned}
 & [\beta - \lambda + u'' - v]^{-1} [\gamma - \mu + u + v]^{-1} + [\nu - \beta + u - v]^{-1} [\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} \equiv \\
 & \equiv [\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} [\nu - \beta + u - v]^{-1} + [\beta - \lambda + u'' - v]^{-1} [\gamma - \mu + u + v]^{-1}
 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la relation ternaire pour la première famille.

Pour la seconde famille $G = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$, il se trouve que la double limite suivante existe

$$\begin{aligned}
 \xi(z) &= \lim_N \lim_M = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^{+M} \frac{1}{z - (m + n\tau)} \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} \pi \cotg \pi(z - n\tau) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi (\cotg \pi(z - n\tau) - i \epsilon(n)) \tag{21}
 \end{aligned}$$

qui pourrait être exprimée en terme de la primitive $\zeta(z)$ de $p(z)$ dans la notation de Weierstrass [2]. Mais il nous suffit de la propriété suivante qui découle de la définition (20), (21),

$$\begin{aligned}
 \xi(z + a) &= \xi(z), \quad a \in \mathbb{Z} \\
 \xi(z + b\tau) &= \xi(z) + 2\pi i b, \quad b \in \mathbb{Z}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Prenant les limites dans l'ordre inverse, on aurait un résultat distinct

$$\tilde{\xi}(z) = \lim_M \lim_N = \lim_M \sum_{m=-M}^{+M} \frac{\pi}{\tau} \cotg \frac{\pi}{\tau} (z - m), \tag{23}$$

avec la propriété

$$\tilde{\xi}(z + a + b\tau) = \tilde{\xi}(z) - \frac{2\pi ia}{\tau} \cdot \left(\Im m \left(-\frac{1}{\tau} \right) > 0 \right). \quad (24)$$

On choisira par souci de symétrie le régulateur suivant

$$f(z) = " \sum_{\rho} \frac{1}{\rho + z} " = \frac{1}{2} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} + \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \right) = \frac{1}{2} (\xi(z) + \tilde{\xi}(z)). \quad (25)$$

qui vérifie donc d'après (22) et (24)

$$f(z + a + b\tau) = f(z) + \pi i(b - a\tau^{-1}) \quad (26)$$

et l'on conviendra d'écrire $\alpha^* = b - a\tau^{-1}$ (ce qui

n'est pas la conjugaison complexe) si $\alpha = a + b\tau \in G$; d'où

$$f(z + \alpha) = f(z) + i\pi\alpha^*. \quad (27)$$

La preuve de l'égalité des deux membres (16) et (17) pour la seconde famille diffère donc de celle de la première famille du fait des termes linéaires supplémentaires, après les substitutions

$$f(u + v - \beta) = f(u) + i\pi(v^* - \beta^*), \text{ etc ...}$$

Les facteurs de $f(u)$, $f(u'')$, $f(v)$, se compensent évidemment comme dans le cas $G = \mathbb{Z}$. Reste à étudier les termes linéaires. Pour le premier membre (17), on a à considérer les 4 termes où f est remplacé par $(v^* - \beta^*)$ dans la 1ère ligne, $(\mu^* - \alpha^*)$ dans la 2nde, $(\gamma^* - \nu^*)$ dans la 3ème et $(\lambda^* - \alpha^*)$ dans la 4ème. Au second membre (16), on aura successivement $\gamma^* - \mu^*$, $\beta^* - \lambda^*$, $\gamma^* - \nu^*$, $\lambda^* - \alpha^*$. Effectuant la soustraction (17)-(16), on obtient la différence des deux membres

$$\begin{aligned} & (v^* - \beta^* - \gamma^* + \mu^*)([v - \alpha + u']^{-1} - [\beta - v + u + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\gamma - \mu + u + v]^{-1}) \\ & (\mu^* - \alpha^* - \beta^* + \lambda^*)([v - \alpha + u']^{-1} - [\mu - \alpha + u'' + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\lambda - \beta - u'' + v]^{-1}) \\ & + (v^* - \gamma^*) \{ ([v - \alpha + u']^{-1} - [\gamma - v + 2v]^{-1}) ([\beta - \lambda + u'' - v]^{-1} - [\beta - \mu]^{-1}) \\ & - ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\gamma - v + 2v]^{-1}) \cdot ([\mu - \alpha + u'' + v]^{-1} - [\beta - \mu]^{-1}) \} \\ & + (\alpha^* - \lambda^*) \{ ([v - \alpha + u']^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) ([\gamma - \mu + u + v]^{-1} - [\mu - \beta]^{-1}) \\ & - ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) \cdot ([v - \beta + u - v]^{-1} - [\mu - \beta]^{-1}) \} \end{aligned} \quad (28)$$

Or, à la première ligne de (28), on a l'identité issue de (5),

$$v^* + \mu^* - \beta^* - \gamma^* = \alpha^* - \lambda^*; \quad (29)$$

Le facteur global de $(\alpha^* - \lambda^*)$ dans (28) est donc

$$\begin{aligned} & ([v - \alpha + u']^{-1} - [\beta - v - u + v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\gamma - \mu + u + v]^{-1}) \\ & + ([v - \alpha + u']^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) \cdot ([\gamma - \mu + u + v]^{-1} - [\mu - \beta]^{-1}) \\ & - ([\gamma - \lambda + u']^{-1} - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1}) \cdot ([v - \beta + u - v]^{-1} - [\mu - \beta]^{-1}) \\ & \equiv [v - \alpha + u']^{-1} [\gamma - \lambda + u']^{-1} + [\beta - v - u + v]^{-1} [\gamma - \mu + u + v]^{-1} \\ & - [\lambda - \alpha + 2v]^{-1} ([\gamma - \mu + u + v]^{-1} - [v - \beta + u - v]^{-1}) \\ & + [\mu - \beta]^{-1} (-[v - \alpha + u']^{-1} + [\gamma - \lambda + u']^{-1}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Le coefficient de $(\alpha^* - \lambda^*)$ dans (28) est donc nul. On vérifie la même chose pour celui de $(v^* - \gamma^*)$. Ceci achève la vérification analytique des relations ternaires de Yang-Baxter pour les deux familles de matrice R infinies sur \mathbb{Z} et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. Relation d'inversion.

Nous voulons montrer la relation d'unitarité

$$X_{12} \cdot X_{21} = 1, \quad (31)$$

où X_{12} n'est qu'une forme convenablement normalisée de R_{12} :

$$R_{12} = \mathcal{W}_{12} X_{12}; \quad \mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}(u_{12}). \quad (32)$$

Rappelons la définition de R_{12} d'où découle la formule (4):

$$\begin{aligned} R_{12} &= (R(u_{12}) \sigma^{(1)} \sigma^{(2)}) \\ &= \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} (\alpha\beta | R(u_{12}) | \lambda\mu) \sigma_{\alpha\lambda}^{(1)} \sigma_{\beta\mu}^{(2)} \end{aligned} \quad (33)$$

où $\sigma_{\alpha\lambda}^{(1)}$ désigne la base matricielle ordinaire dans $V^{(1)}$. Calculons d'abord le produit matriciel noté $RR' \equiv R(u, v) R(u', v')$. Compte tenu des relations de conservation, nous avons

$$(\alpha\beta | RR' | \nu\rho) = \delta(\alpha + \beta - \nu - \rho) \sum_{\sigma} (\alpha\beta | A | \alpha + \sigma, \beta - \sigma) (\alpha + \sigma, \beta - \sigma | A' | \nu\rho) \quad (34)$$

soit

$$(\alpha\beta | AA' | \nu\rho) M = \sum_{\sigma \in G} \left(\frac{1}{\beta - \alpha - \sigma + u} - \frac{1}{\sigma + v} \right) \left(\frac{1}{\beta - \nu - \sigma - u'} - \frac{1}{\beta - \rho - \sigma + v'} \right). \quad (35)$$

La somme sur σ au second membre est normalement convergente pour les deux familles, car

$$A = 0 \left(\frac{1}{|\sigma|} \right),$$

$$A' = 0 \left(\frac{1}{|\sigma|^2} \right), \\ AA' = 0 \left(\frac{1}{|\sigma|^3} \right).$$

Selon la méthode de la section précédente, on obtient

$$\begin{aligned} (\alpha\beta | AA' | \nu\rho) &= \frac{1}{\alpha - \nu - u + u'} (f(u + \beta - \alpha) - f(u' + \beta - \nu)) \\ &+ \frac{1}{\alpha - \rho - u + v'} (f(v' + \beta - \rho) - f(u + \beta - \alpha)) \\ &+ \frac{1}{\beta - \nu + u' + v} (-f(u' + \beta - \nu) - f(v)) \\ &+ \frac{1}{\beta - \rho + v + v'} (f(v) + f(v' + \beta - \rho)). \end{aligned} \quad (36)$$

On devine qu'une compensation totale des termes est possible si $u' = u$, et $v' = v$.

Pour que les termes de la somme (36) soient définis, plaçons nous dans le cas non-diagonal $\beta - \rho \neq 0$. On constate alors que la somme est nulle

pour $u' = u$, $v' = -v$, en vertu de la périodicité de f dans les cas $G = \mathbb{Z}$, ou de la relation (27) dans les cas $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Le produit $R(u, v) R(u, -v)$ est donc une matrice diagonale dont les éléments se calculent en revenant à (36)

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta | R(u, v) R(u, -v) | \alpha\beta) \\ &= \lim_{\substack{u' \rightarrow u \\ v' \rightarrow -v}} \left\{ \frac{f(u + \beta - \alpha) - f(u' + \beta - \alpha)}{u' - u} + \frac{f(v') + f(v)}{v' + v} \right\} \\ &= \frac{\partial f(v)}{\partial v} - \frac{\partial f(u)}{\partial u}. \end{aligned} \quad (37)$$

D'après (12), on obtient pour la première famille

$$\begin{aligned} f'(v) - f'(u) &= \pi^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \pi u} - \frac{1}{\sin^2 \pi v} \right) \\ &= \pi^2 \frac{\sin \pi(v + u) \sin \pi(v - u)}{\sin^2 \pi u \cdot \sin^2 \pi v} \end{aligned} \quad (38)$$

et, d'après les séries (20) et (25), pour la seconde

$$\begin{aligned} f'(v) - f'(u) &= p(u) - p(v) \\ &= (2K)^2 \left(\frac{1}{sn^2 2Ku} - \frac{1}{sn^2 2Kv} \right) \\ &= \theta_1^2(0) \cdot \frac{\theta_1(v + u) \theta_1(v - u)}{\theta_1^2(u) \theta_1^2(v)}. \end{aligned} \quad (39)$$

dans les notations de Weierstrass pour p , avec $2 \omega_1 = 1$, $2 \omega_2 = \tau$; puis celles de Jacobi

$$2K = \pi \theta_3^2(0), \quad 2K' = \pi \theta_4^2(0), \quad \tau = i \frac{K'}{K}. \tag{40}$$

Posant selon les cas

$$\mathcal{W}(u) = \pi \frac{\sin \pi(v-u)}{\sin \pi u \cdot \sin \pi v},$$

ou

$$\theta_1'(0) \frac{\theta_1(v-u)}{\theta_1(v) \theta_1(u)}. \tag{41}$$

nous avons donc le résultat suivant

$$R(u, v) R(u, -v) = -\mathcal{W}(u) \mathcal{W}(-u). \tag{42}$$

Or, nous avons la propriété de symétrie dans l'échange $1 \Leftrightarrow 2$:

$$R_{12}(v) \equiv (R(u_{12}, v) \sigma^{(1)} \sigma^{(2)}) = -R_{21}(-v). \tag{43}$$

qu'on vérifie à l'aide de la définition (1)

$$(\beta \alpha | R(u, v) | \mu \lambda) = -(\alpha \beta | R(-u, -v) | \lambda \mu). \tag{44}$$

On en déduit

$$R_{12} \cdot R_{21} = \mathcal{W}(u_{12}) \mathcal{W}(u_{21}), \tag{45}$$

d'où la matrice normalisée X_{12} vérifiant la relation (31).

4. Equivalence à une limite continue de matrices R de symétrie \mathbb{Z} .

Pour montrer cette équivalence, il nous suffira de calculer les transformées de Fourier sur G des éléments de matrice R , comme si l'on voulait obtenir les poids du "modèle de face" [3] associé au modèle de vertex de dimension infinie, dans l'hypothèse où les matrices de transformation seraient les noyaux de Fourier. Traitant d'abord le cas de la première famille $G = \mathbb{Z}$, on introduit la base complète d'exponentielles sur $[0,1]$

$$\{e^{2\pi i n x}\}, \quad x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S_1.$$

et la définition (1) permet d'écrire

$$\sum_{\beta, \mu} (\alpha \lambda | R | \mu \beta) e^{2\pi i(\beta x + \mu y)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\lambda - \alpha - n - u} - \frac{1}{n + v} \right) e^{2\pi i(n(x-y) + \alpha x + \lambda y)}. \tag{46}$$

Or, dans les domaines

$$u \in \dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - \{\mathbb{Z}\}, \quad y \in \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{\mathbb{Z}\},$$

la série suivante converge

$$\sum_n \frac{e^{2\pi i n y}}{u - n} = \pi \frac{e^{2\pi i |y| u}}{\sin \pi u} \tag{47}$$

où l'on a introduit le symbole $[y]$ pour la fonction périodique de y dont la restriction à l'intervalle $]-1, +1[$ est $[y] = y - \frac{1}{2} \epsilon(y)$. Au point de discontinuité $y = 0$, la somme de la série vaut $f(u) = \pi \cotg \pi u$. On obtient ainsi, en notant $\bar{v} = -v$,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \mu} (\alpha \lambda | R(u, v) | \beta \mu) e^{2\pi i(\beta x + \mu y)} &= \\ &= \pi \frac{e^{2\pi i [x-y] u}}{\sin \pi u} \cdot e^{2\pi i(\lambda x + \alpha y)} \\ &+ \pi \frac{e^{2\pi i [x-y] \bar{v}}}{\sin \pi \bar{v}} \cdot e^{2\pi i(\lambda y + \alpha x)} \end{aligned} \tag{48}$$

ou encore, en introduisant le vecteur de V_∞ , $\varphi_x = \{e^{2\pi i n x}\}$, et opérant dans $V_\infty \otimes V_\infty$:

$$R(\varphi_x \otimes \varphi_y) = q(x-y) \varphi_y \otimes \varphi_x + p(x-y) \varphi_x \otimes \varphi_y \tag{49}$$

avec $p(x) = \pi \frac{e^{2\pi i \bar{v} [x]}}{\sin \pi \bar{v}}, \quad q(x) = \pi \frac{e^{2\pi i u [x]}}{\sin \pi u};$
 $p(0) + q(0) = \mathcal{W}(u).$

On constate ainsi l'équivalence du modèle de dimension infinie $G = \mathbb{Z}$, avec un modèle conservatif à "deux vertex", labellés par des variables continues $x, y \in S_1[0,1]$, avec une matrice R , ou noyau integral, ainsi définie

$$(xy | A | xy) = p(x-y); \quad (yx | A | xy) = q(x-y).$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= \iint_0^1 dx dy (p(x-y) \sigma_{xx}^{(1)} \sigma_{yy}^{(2)} \\ &+ q(x-y) \sigma_{xy}^{(1)} \sigma_{yx}^{(2)}) \end{aligned} \tag{50}$$

avec

$$(x' | \sigma_{xy} | y') = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (51)$$

ce qui est précisément la limite continue formelle du modèle généralisé à r composante (Babelon [4] ; Schultz [5], restreint à la symétrie \mathbb{Z}_r . A ce stade, mentionnons que la méthode de décomposition polaire utilisée section 2 est immédia-

tement transposable au cas trigonométrique de symétrie $\mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, et fournit ainsi une preuve dont le mécanisme est clair. Dans le cas $G = \mathbb{Z}$, il suffit de remplacer le terme polaire $[\nu + u]^{-1}$ ($\nu \in G, u \in \mathbb{C}$) par son correspondant périodique $\frac{\pi}{r} \cotg \frac{\pi}{r} (\nu + u)$ ($\nu \in \mathbb{Z}_r$). Au facteur de Kronecker près sur \mathbb{Z}_r , on a ainsi l'élément de matrice R

$$\begin{aligned} (\alpha\beta | A_r | \lambda\mu) &= \frac{\pi}{r} \left[\cotg \frac{\pi}{r} (\beta - \lambda + u) - \cotg \frac{\pi}{r} (\beta - \mu + v) \right] \\ &= \frac{\pi}{r} \frac{\sin \frac{\pi}{r} (\mu - \lambda + v - u)}{\sin \frac{\pi}{r} (\beta - \lambda + u) \cdot \sin \frac{\pi}{r} (\beta - \mu + v)}. \end{aligned} \quad (52)$$

ce qui est bien la forme trigonométrique du modèle \mathbb{Z}_r (Tracy) [6]. La preuve de la relation ternaire est calquée sur la précédente : on a la décomposition (16) et (17) des deux membres en substituant \cotg aux termes polaires, avec en tête les facteurs $f(u), f(u''), f(v)$ résultant des sommes finies sur $\rho \in \mathbb{Z}_r$:

$$f(v) = \sum_{\nu=1}^r \frac{\pi}{r} \cotg \frac{\pi}{r} (\nu + v) = \pi \cotg \pi v. \quad (53)$$

Les compensations entre les termes se font suivant la correspondance indiquée, et l'on utilise enfin la seule identité

$$\cotg x_1 \cotg x_2 + \cotg x_2 \cotg x_3 + \cotg x_3 \cotg x_1 = 1, \quad \text{si } \sum_i x_i = 0. \quad (54)$$

On revient à la forme usuelle de la solution trigonométrique par transformation de Fourier sur \mathbb{Z}_r de l'expression (52) selon le schéma (46), et l'on obtient les coefficients $q_{k1} = q_{k-1}$ et p_{k1} du modèle à r composantes

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_{\nu=1}^r \frac{\pi}{r} \cotg \frac{\pi}{r} (u - \nu) e^{2\pi i \frac{\nu k}{r}} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi u} e^{2\pi i \left[\frac{k}{r} \right] u}. \quad (\text{si } k = 0, \pi \cotg \pi u) \end{aligned} \quad (55)$$

et de même pour p_k en remplaçant u par \bar{v} . Rappelons que la matrice R du modèle conservatif à deux types de vertex (direct et échange)

$$R_{12} = \sum_{k,1 \in \mathbb{R}_r} p_{k1} \sigma_{kk}^{(1)} \sigma_{11}^{(2)} + q_{k1} \sigma_{k1}^{(1)} \sigma_{1k}^{(2)}, \quad (56)$$

est essentiellement définie par

$$\begin{cases} q_{k1} = (\coth u + \epsilon(k-1)) \\ p_{k1} = -(\coth \eta + \epsilon(k-1)) e^{\eta_{k1}}, \quad \eta_{k1} + \eta_{1k} = 0. \end{cases} \quad (57)$$

Il suffit d'effectuer la substitution $u \rightarrow iu, \eta = -iv, \eta_{k1} = i\pi\epsilon_{k1}$, pour obtenir (55).

Le cas de la seconde famille est plus intéressant. Examinons d'abord la transformée de Fourier sur $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ de la matrice R de dimension infinie en introduisant la base

$$\varphi_x(\alpha) = e^{-2\pi i(\alpha \Lambda x)}; \quad \alpha \Lambda x = mx_2 - nx_1. \quad (58)$$

$$\alpha = (m, n) \in G; \quad x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2. \quad (59)$$

De façon analogue à (46), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\beta, \mu} (\alpha \lambda | R | \beta \mu) e^{-2\pi i(\beta \Lambda x + \mu \Lambda y)} &= \\ &= p(x - y) e^{-2\pi i(\lambda \Lambda y + \alpha \Lambda x)} \\ &\quad + q(x - y) e^{-2\pi i(\lambda \Lambda x + \alpha \Lambda y)} \end{aligned} \quad (60)$$

avec $p(x) = \xi(x, \bar{v}), q(x) = \xi(x, u)$ et la définition de la distribution en x notée $\xi(x, u)$

$$\begin{aligned} \xi(x, u) &= \sum_{\alpha \in G} \frac{e^{2\pi i(\alpha \Lambda x)}}{u + \alpha} \\ &= \sum_{m, n} \frac{e^{-2\pi i(m x_2 - n x_1)}}{u - (m\tau + n)}. \end{aligned} \quad (61)$$

La relation (60) manifeste l'équivalence avec un modèle de vertex où chaque état est labellé par deux variables continues x_1, x_2 . On notera aussi x le point représentatif $x = x_1 \tau + x_2$ dans le parallélogramme des périodes. La série (61) définit une distribution

comme transformée de Fourier de la fonction $[u + \alpha]^{-1}$ à "croissance lente" sur \mathbb{Z}^2 . En fait, à l'intérieur du domaine $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ la série converge vers une fonction continue de x ; elle est éventuellement discontinue sur les bords, mais la distribution est méromorphe dans la variable complexe u . On peut calculer explicitement cette fonction analytique de u (mais pas précisément de x)

$$\xi(x, u) = e^{2\pi i u x_1} \frac{\theta_1(u + x_1 \tau + x_2) \theta_1'(0)}{\theta_1(x_1 \tau + x_2) \theta_1(u)}. \quad (62)$$

Pour prouver (62), on constate que les deux membres ont la même propriété de périodicité en x_1, x_2 et de quasi-périodicité en u . De plus les résidus des pôles en u sont identiques,

$$\begin{aligned} \xi(x, u + 1) &= e^{2\pi i x_1} \xi(x, u), \\ \xi(x, u + \tau) &= e^{-2\pi i x_2} \xi(x, u). \end{aligned} \quad (63)$$

Finalement, la seule singularité de $\xi(x)$ en x est le point du tore $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

On pourrait s'étonner d'obtenir une solution elliptique à un modèle de vertex conservatif, quand on sait que les seules solutions (de dimension finie) sont celles de Schultz, essentiellement données en (56),

(57). Ceci s'explique par le fait de la limite continue ou de la dimension infinie. En effet, la solution elliptique convient, dans le cas conservatif, à un modèle de face, et non pas à un modèle de vertex. On vérifie en effet que dans le cas discret fini, il s'en faut de peu que la solution elliptique ne convienne, en ce sens que la relation ternaire n'est violée que si deux indices d'état de la "matrice S à trois corps", c'est à dire l'un ou l'autre membre de la relation de Yang-Baxter, sont égaux. Cette contrainte disparaît évidemment à la limite continue, où le modèle de face et le modèle de vertex deviennent probablement équivalents.

Se pose maintenant le problème du spectre. Les éléments de la matrice de monodromie sont bien définis puisque les sommes intermédiaires sont alors finies. Il n'en est pas de même pour la matrice de transfert qui strictement n'est pas définie, car la somme des éléments diagonaux n'est pas convergente. Il s'en faut cependant d'une seule soustraction indépendante du paramètre spectral, et la dérivée par rapport à celui-ci de la matrice de transfert est parfaitement définie; l'algèbre de Zamolodchikov étant aussi définie, on en conclut que la dérivée de la matrice de transfert constitue une famille commutante. Reste à étudier l'éventuelle limite des équations couplées de Sutherland lorsque le nombre de composantes augmente indéfiniment.

Bibliographie

- | | |
|---|--|
| [1] BAXTER, R. J., "Exactly solved models in statistical mechanics" (Academic Press, N-Y), 1982. | [4] BABELON, O., DE VEGA, H. J., VIALLET, C. M., <i>Nucl. Phys. B</i> 190 (1981) 542; <i>B</i> 200 (1982) 266. |
| [2] WHITTAKER, E. and WATSON, G., "Modern Analysis", Cambridge 1958. | [5] PERK, J. H. H. and SCHULTZ, C. L., <i>Phys. Lett. A</i> 84 (1981) 407. |
| [3] Pour la correspondance vertex-IRF on peut voir : DATE, E., JIMBO, M., MIWA, T. and OKADO, M., "Solvable Lattice models", RIMS-590, Kyoto, 1987. | [6] TRACY, C. A., <i>Physica</i> 16D (1985) 203; <i>J. Stat. Phys.</i> , 42 (1986) 311. |

The periodic Toda chain and a matrix generalization of the Bessel function recursion relations

V Pasquier and M Gaudin

Service de Physique Théorique†, Centre d'Etudes de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Received 17 February 1992

Abstract. We obtain the quantization conditions of the periodic Toda lattice in the Baxter form:

$$\Lambda(u)Q(u) = i^N Q(u + i\hbar) + i^{-N} Q(u - i\hbar)$$

Λ is the 'transfer matrix' containing the information about the spectrum and Q is an integral operator commuting with Λ . The logarithms of the matrix elements of Q are the generating functions of the canonical Bäcklund transformation. The requirement that Q is analytic and vanishes when u goes to infinity completely determines the spectrum of Λ .

The Toda lattice [1–4] is a one-dimensional chain of equal masses with exponential interactions between nearest neighbours. When the chain is finite, either the first and last masses are decoupled (the open chain) or they are coupled together (the periodic chain). Both systems are completely integrable in the sense that one can construct as many constants of the motion as they possess degrees of freedom. The two mechanical systems however, behave quite differently. The open chain has a continuous spectrum while the periodic chain has quantum states and a discrete spectrum.

In this paper, we are concerned with the determination of the spectrum of the periodic chain. This problem was considered by Gutzwiller [5] who separated the variables and derived recursion relations of the type:

$$-Q_{v-1} + Q_{v+1} = \Lambda(v) Q_v \quad (1)$$

where $\Lambda(v)$ is a polynomial whose coefficients are the unknown constants of the motion. Sklyanin [6, 7] greatly simplified the derivation of (1) using the R matrix formalism. Moreover, he suggested to interpret it as a Bethe ansatz equation defining an analytical function $Q(v)$.

In this paper, we derive (1) using the methods of statistical mechanics [9]. $\Lambda(v)$ is the 'transfer matrix' and Q is an integral operator commuting with Λ . The matrix elements of Q turn out to be the exponential of the generating function of the canonical Bäcklund transformation [1, 4]. Diagonalizing simultaneously Λ and Q , we recover (1) as an equation for their eigenvalues. The requirement that Q is entire

† Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Energie Atomique.

and goes to zero when v goes to infinity in the imaginary direction determines both Q and the polynomial Λ . It generalizes to higher degrees the case of degree one $\Lambda = v$ where it is known that the unique solution of (1) vanishing in the imaginary direction is the Bessel function K_ν † [8] considered as a function of the index.

The equations of motion of the periodic Toda lattice derive from the Hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N e^{(q_{i+1}-q_i)} \quad (2)$$

where the index i is defined modulo N . They take the form

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i-q_{i+1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Their integrability results from the following Lax pair representation [4, 6]: Define matrices L_i and M_i by

$$\begin{aligned} L_i &= \begin{pmatrix} u - p_i & e^{q_i} \\ -e^{-q_i} & 0 \end{pmatrix} \\ M_i &= \begin{pmatrix} u & e^{q_i} \\ -e^{-q_{i+1}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

The system of equations (3) is equivalent to the auxiliary problem:

$$\dot{L}_i = M_{i-1} L_i - L_i M_i. \quad (5)$$

Consider the monodromy matrix

$$T(u) = L_1(u) L_2(u) \cdots L_N(u). \quad (6)$$

From (2)

$$\dot{T}(u) = [M_N, T(u)]. \quad (7)$$

Therefore, the trace of $T(u)$, $\Lambda(u)$ is independent of the time. It is a polynomial of degree N in u whose coefficients are the constants of motion

$$\Lambda(u) = u^N - P u^{N-1} + \left(\frac{P^2}{2} - H \right) u^{N-2} + \cdots \quad (8)$$

P is the momentum, H the Hamiltonian.

In quantum mechanics, the p_i are replaced by the operators $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}$ so that the matrix elements of L_i do not commute. Their commutation relation can be expressed

† Our convention is $K_\nu(z) = (1/\sin \pi \nu) (I_\nu(z) - I_{-\nu}(z))$.

as follows [4, 6]. Define the matrix $\overset{1}{L}$ and $\overset{2}{L}$ to be respectively $L \otimes 1$ and $1 \otimes L$ and the 4×4 R matrix

$$R(u) = \begin{pmatrix} u - i\hbar & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & u & -i\hbar & \cdot \\ \cdot & -i\hbar & u & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & u - i\hbar \end{pmatrix} \tag{9}$$

Then

$$R(u_1 - u_2) \overset{1}{L}_i(u_1) \overset{2}{L}_i(u_2) = \overset{2}{L}_i(u_2) \overset{1}{L}_i(u_1) R(u_1 - u_2). \tag{10}$$

L_i commutes with L_j if $i \neq j$. The commutation relations of the matrix elements of $T(u)$ follow in a straightforward way from (10) and are given by the same expression

$$R(u_1 - u_2) \overset{1}{T}(u_1) \overset{2}{T}(u_2) = \overset{2}{T}(u_2) \overset{1}{T}(u_1) R(u_1 - u_2). \tag{11}$$

It follows that the $N - 1$ coefficients of the trace of $T, \Lambda(u)$, are conserved quantities in involution.

To diagonalize $\Lambda(u)$, we shall adapt the method used by Baxter in the eight-vertex model case [9]. We construct a family of integral operators $Q(u)$ which satisfy the matrix relation:

$$\Lambda(u)Q(u) = i^N Q(u + i\hbar) + i^{-N} Q(u - i\hbar) \tag{12}$$

and such that $Q(u), Q(v), \Lambda(v)$ commute for all values of u and v .

In (12), Q is a matrix with rows and columns indexed by the (continuous) variables $(q_1, \dots, q_N), (q'_1, \dots, q'_N)$. As a first step to finding the solution, we consider the equation for the columns of $Q, y_u(q_1, \dots, q_N)$. We take y in the form of a direct product

$$y(q_1 \dots q_N) = \prod_{i=1}^N \varphi_i(q_i) \tag{13}$$

so that the product Λy takes the form:

$$\Lambda(u)y = \text{tr} (L_1 \varphi_1) \dots (L_N \varphi_N). \tag{14}$$

The product Λy decomposes into two terms $y' + y''$ if each of the matrices $L_j \varphi_j$ is lower triangular. Due to the cyclicity of the trace, Λ is not modified if we substitute $\tilde{L}_j = N_j L_j N_{j+1}^{-1}$ to L_j in (6). We take N_j of the form

$$N_j = \begin{pmatrix} 1 & i e^{q'_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

and equate to zero the upper right coefficient of $\tilde{L}_j \varphi_j$; this gives

$$\left(p_j + \frac{1}{i} e^{q_j - q'_{j+1}} + i e^{q'_j - q_j} - u \right) \varphi_j = 0 \tag{16}$$

which is solved by

$$\varphi_j(u) = \exp\left(\frac{1}{\hbar}\left(iu(q_j - q'_{j+1}) - e^{q_j - q'_{j+1}} - e^{q'_j - q_j}\right)\right) \tag{17}$$

and

$$\tilde{L}_j \varphi_j = \begin{pmatrix} -i \varphi_j(u - i\hbar) & 0 \\ * & i \varphi_j(u + i\hbar) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

It follows directly from (18) that (12) is satisfied with y substituted for Q . Let us define the kernel:

$$\begin{aligned} Q_u(q | q') &= \exp \frac{1}{\hbar} \left(iu \left(\sum_{j=1}^N q_j - \sum_{j=1}^N q'_j \right) - \sum_{j=1}^N \left(e^{q'_j - q_j} + e^{q_j - q'_{j+1}} \right) \right) \\ &= \prod_{j=1}^N W_u(q'_j - q_j) \bar{W}_u(q_j - q'_{j+1}) \end{aligned} \tag{19}$$

with

$$\begin{aligned} W_u(q) &= \exp \frac{1}{\hbar} \left(-\frac{i u}{2} q - e^q \right) \\ \bar{W}_u(q) &= \exp \frac{1}{\hbar} \left(\frac{i u}{2} q - e^q \right). \end{aligned} \tag{20}$$

By construction, Q satisfies equation (12) and it follows from a similar analysis that it also satisfies

$$Q(u)\Lambda(u) = i^N Q(u + i\hbar) + i^{-N} Q(u - i\hbar). \tag{21}$$

Note that the logarithms of the matrix elements of Q are the generating functions of the canonical transformation [1, 4]. It may be useful to visualize Q as shown in figure 1.

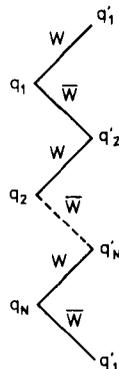


Figure 1. Visualization of matrix Q .

We can repeat the argument of Baxter [9] to show that operators $Q(u)$ with different spectral parameters u commute. Let us introduce the permutation operator C :

$$(Cf)(q_1, q_2, \dots, q_N) = f(q_2, q_3, \dots, q_1) \tag{22}$$

and the kernel \hat{Q}

$$\begin{aligned} Q_u(q | q') &= (Q_u C)(q | q') = (C Q_u)(q | q') \\ &= \prod_{j=1}^N W_u(q'_j - q_{j+1}) \bar{W}_u(q_j - q'_j). \end{aligned} \tag{23}$$

The equality

$$\hat{Q}(u)Q(v) = \hat{Q}(v)Q(u) \tag{24}$$

is realized if there exists functions $A_u(q)$ which satisfy the identity

$$\begin{aligned} A_{u-v}(q_1 - r_1) &\int_{-\infty}^{+\infty} dq \bar{W}_u(q_1 - q) W_u(q - q_2) W_v(r_1 - q) \bar{W}_v(q - r_2) \\ &= A_{u-v}(q_2 - r_2) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \bar{W}_v(q_1 - q) W_v(q - q_2) W_u(r_1 - q) \bar{W}_u(q - r_2). \end{aligned} \tag{25}$$

for all values of u, v, q_1, q_2, r_1, r_2 (as shown diagrammatically in figure 2).

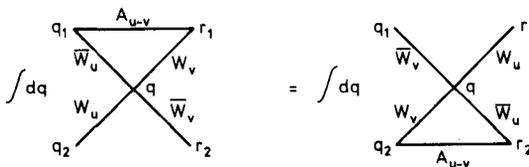


Figure 2. Diagrammatical representation of $A_u(q)$.

A simple calculation gives

$$A_u(q) = (\cosh q/2)^{\frac{i\pi}{k}}. \tag{26}$$

Now, for u real, the operators $Q(u)$ and $\hat{Q}(u)$ are Hermitian conjugates and commute with C . Therefore, there exists a unitary operator D independent of u which diagonalizes $Q(u)$ simultaneously for all values of u . Moreover, in the basis of momentum eigenstates, the matrix elements of Q vanish like $\exp(-\pi N|u|/2)$ when u goes to infinity on the real line. Multiplying (12) by D to the right and D^{-1} to the left, we obtain an equation for the eigenvalue matrices Q_d and Λ_d . The eigenvalue matrix $Q_d(u)$ is entire and vanishes when u tends to infinity in the real direction.

We now consider (12) as a scalar equation and argue that $\Lambda(u)$ is completely determined by the requirement that Q is an entire function going to zero sufficiently

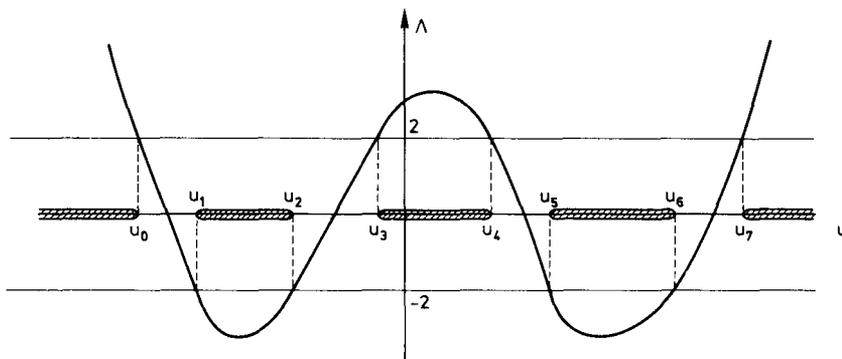


Figure 3. The polynomial $\Lambda(u)$. Shaded, the intervals where $|\Lambda| \geq 2$.

fast when $\pm u$ goes to infinity. We first obtain this result in a WKB approximation, then we show how the quantization conditions obtained by Gutzwiller result from these requirements.

Let us look for a solution of (12) in the form

$$Q(u) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(i S(u) + \frac{N\pi}{2}u\right)\right). \tag{27}$$

This gives

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S(u+i\hbar)} + e^{-\frac{i}{\hbar}S(u-i\hbar)} = \Lambda(u)e^{-\frac{i}{\hbar}S(u)}. \tag{28}$$

We expand S in powers of \hbar

$$S(u) = S_0(u) + \frac{\hbar}{i}S_1(u) + \dots \tag{29}$$

and develop (28) to order 1 to obtain

$$2 \cosh S'_0 = \Lambda(u) \tag{30}$$

$$S'_1 = \frac{1}{2}S''_0 \tanh S'_0 \tag{31}$$

which yields formally

$$Q(u) = \frac{1}{\sqrt{\sinh S'_0(u)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^u S'_0(p) dp\right). \tag{32}$$

At this point, we must determine the branches of the phase $S_0(u)$. For this, we make the assumption that the zeros of $Q(u)$ accumulate on the intervals $|\Lambda(u)| \geq 2$ on the real axis. The $N - 1$ intervals not containing $\pm\infty$ are called intervals of instability and coincide with the regions where the ‘classical motion’ of u is confined [2, 3] (figure 3). We therefore take the system of cuts defined by $|\Lambda| \geq 2$, that is it to say $[-\infty, u_0]$, $[u_1, u_2]$, $[u_3, u_4]$, $[u_5, u_6]$, $[u_7, +\infty]$, on figure 3. We choose the determination of S'_0 so that Q is exponentially decreasing when u goes to plus or minus infinity. The resulting conformal mapping $S'_0(u)$ is represented in figure 4. S'_0 is a continuous function of u except across the cuts. For Q to define a uniform

function of u , $S(u)$ must be defined modulo $2\pi\hbar$ in the complex plane minus the cuts. This gives the conditions:

$$\int_{C_k} S'(u)du = 2\pi\hbar n_k \quad 1 \leq k \leq N-1 \tag{33}$$

where the C_k are contours of integration encircling the intervals of instability $|\Lambda| \geq 2$. On these intervals, Q is approximated by $Q^{WK\bar{B}}(u + i0) + Q^{WK\bar{B}}(u - i0)$. The $n-1$ integers n_k count the number of zeros of Q on the k th interval of instability. To first order in \hbar , (33) gives the quantization conditions:

$$\int_{u_{2k-1}}^{u_{2k}} \cosh^{-1} \left| \frac{\Lambda(p)}{2} \right| dp = \pi\hbar \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \tag{34}$$

Such conditions are precisely what one would expect from the correspondence principle applied to the solution of the Hamilton–Jacobi equation [3]:

$$S(u_1, \dots, u_{N-1}, q_N, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \int^{u_k} \cosh^{-1} \left(\frac{|\Lambda(p)|}{2} \right) dp + Pq_N - Et \tag{35}$$

where the real variables u_k are constrained to move on the $N-1$ intervals of instability. The solution so constructed vanishes as $\exp((-N\pi/2\hbar)|u|) \sin((Nu/\hbar)\log Nu)$ when u goes to $\pm\infty$.

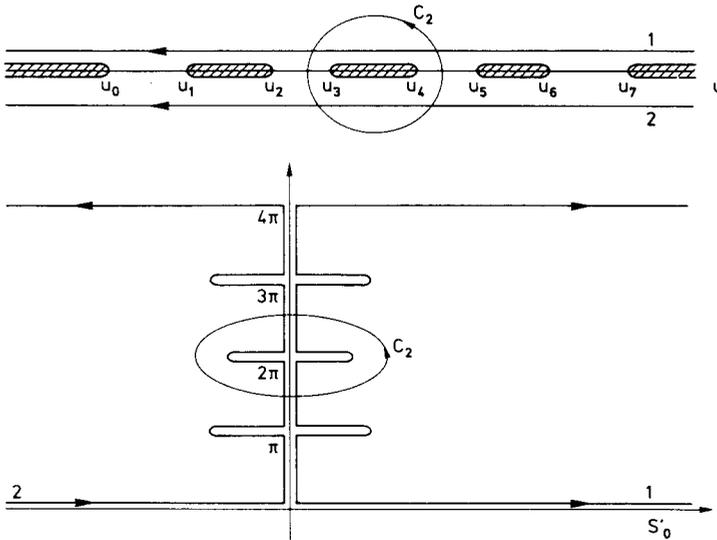


Figure 4. The conformal mapping $S'_0(u)$.

We now look for a solution of (12) which has the same asymptotics as the semiclassical approximation and obtain the quantization conditions in terms of a Hill determinant [5, 8]. We consider the recursion relation satisfied by the auxiliary function

$$\varphi(u) = \prod_{k=1}^N \sinh \pi \left(\frac{u}{\hbar} + \delta_k \right) Q(u) \tag{36}$$

where δ_k are unknown real numbers. It admits two independent entire solutions φ_+ and φ_- which tend to zero when u goes to plus or minus $i\infty$ respectively, and which increase exponentially like $e^{(N\pi/2\hbar)|u|}$ in the real direction. We then ask for the function:

$$Q(u) = \frac{\varphi_+(u) - \lambda\varphi_-(u)}{\prod_{k=1}^N \sinh \pi((u/\hbar) + \delta_k)} \quad (37)$$

to be regular. This determines the coefficients δ_k and produces the quantization conditions. Due to the denominator, (37) has the correct behaviour $\exp -(N\pi/2\hbar)|u|$ at infinity.

Let us substitute (36) in (12) and set

$$u = i\hbar v$$

$$P(v) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^N \Lambda(i\hbar v). \quad (38)$$

We obtain the following recursion relations for φ :

$$\varphi(v-1) + (-)^N \varphi(v+1) = \hbar^N P(v)\varphi(v). \quad (39)$$

Equation (37) has two independent solutions φ_+ , φ_- distinguished by their asymptotic behaviour. We set

$$\varphi_{\pm}(v) = \theta_{\pm}(v)/\pi_{\pm}(v) \quad (40)$$

with

$$\pi_+(v) = \prod_{k=1}^N \hbar^v \Gamma(v+1 - iu_k)$$

$$\pi_-(v) = \prod_{k=1}^N \hbar^{-v} \Gamma(1-v + iu_k) \quad (41)$$

where iu_k are the roots of the polynomial $P(v) = \prod_1^N (v - iu_k)$. θ_{\pm} are the solutions of the following recursion relations:

$$\theta_+(v-1) = \theta_+(v) + \frac{\theta_+(v+1)}{P(v)P(v+1)}$$

$$\theta_-(v+1) = \theta_-(v) + \frac{\theta_-(v-1)}{P(v)P(v-1)} \quad (42)$$

determined so that $\theta_+(+\infty) = \theta_-(-\infty) = 1$. So, φ_+ defines an entire function which vanishes when v goes to $+\infty$ and φ_- an entire function which vanishes when v goes to $-\infty$. They both increase as $\exp(\frac{1}{2}\pi N|v|)$ for v very large in the imaginary direction. To obtain Q with the correct asymptotic behaviour, we look for a linear combination of φ_+ and φ_- divisible by $\prod_{k=1}^N \sin \pi(v - i\delta_k)$. This can be achieved if two conditions are satisfied. First, there must exist N real numbers δ_k such that

for $v = i\delta_k$ modulo an integer, the two solutions φ_+ and φ_- are proportional, and second, the proportionality coefficient $\lambda = \varphi_+(i\delta_k)/\varphi_-(i\delta_k)$ must be independent of k .

The first condition is realized if the Wronskian

$$W(\varphi_+, \varphi_-) = \varphi_+(v+1)\varphi_-(v) - \varphi_+(v)\varphi_-(v+1) \tag{43}$$

vanishes for v equal to $i\delta_k$ modulo an integer.

A direct calculation gives

$$W(\varphi_+, \varphi_-) = \theta(v) \prod_{k=1}^N \pi^{-1} \sin \pi(v - iu_k) \tag{44}$$

where $\theta(v)$ is the infinite tridiagonal determinant of Hill's [8]:

$$\theta(v) = \begin{vmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ -\frac{1}{P(v)} & & & \frac{1}{P(v)} & \\ & & -\frac{1}{P(v+1)} & 1 & \frac{1}{P(v+1)} \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix}. \tag{45}$$

To evaluate the v dependence of θ , one observes that θ is analytic except at the roots of P , iu_k , where it has simple poles. It is periodic with period 1 and tends to 1 when v tends to infinity in the imaginary direction. It follows that

$$\theta(v) = 1 + \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \cot \pi(v - iu_k) = \prod_{k=1}^N \frac{\sin \pi(v - i\delta_k)}{\sin \pi(v - iu_k)} \tag{46}$$

with $\sum_k u_k = \sum_k \delta_k$ and $\sum_k \varepsilon_k = 0$. Setting θ to zero determines the δ_k in terms of the N residues ε_k of $\theta(v)$ at $v = iu_k$.

The second condition yields the quantization conditions:

$$\frac{\varphi_+(i\delta_1)}{\varphi_-(i\delta_1)} = \frac{\varphi_+(i\delta_2)}{\varphi_-(i\delta_2)} = \dots = \frac{\varphi_+(i\delta_N)}{\varphi_-(i\delta_N)}. \tag{47}$$

Assuming that δ_k, u_k are real, $\varphi_+(i\delta_k)$ and $\varphi_-(i\delta_k)$ are complex conjugates. Therefore (47) defines N phases that must be equal. These are precisely the quantization conditions obtained by Gutzwiller from a different point of view.

To conclude, the eigenfunctions of the commuting set of operators $Q(u)$ are generalizations of the modified Bessel function K_{iu} which occur in the lowest degree case, $\Lambda(u) = iu$. In that case, there is only one value of δ equal to zero and no quantization condition (47).

Acknowledgments

We thank Denis Bernard and Patrick Dorey for discussions which renewed our interest in Toda lattices.

References

- [1] Toda M 1981 *Theory of Nonlinear Lattices (Springer Series in Solid-State Sciences 20)* (Berlin: Springer)
- [2] Kac M and Van Moerbeke P 1975 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **72** 1627
- [3] Flaschka H and McLaughlin D W 1976 *Prog. Theor. Phys.* **55** 438
- [4] Gaudin M 1983 *La Fonction d'Onde de Bethe (Collection du CEA)* (Paris: Masson)
- [5] Gutzwiller M C 1981 *Ann. Phys.* **133** 304
- [6] Sklyanin E K 1985 *Lecture Notes in Physics* **226** 196
- [7] Sklyanin E K 1990 *Integrable and Superintegrable Systems* ed B A Kupershmidt (Singapore: World Scientific)
- [8] Whittaker E and Watson G 1958 *Modern Analysis* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [9] Baxter R J 1982 *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (New York: Academic)

Une preuve de la relation étoile-triangle du modèle elliptique Z_N de Zamolodchikov

M. Gaudin

Service de Physique théorique(*) de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Received 16 July 1990, accepted 20 November 1990)

Résumé. — On donne une preuve de la relation étoile-triangle pour une généralisation elliptique du modèle de Fateev et Zamolodchikov de symétrie Z_N .

Abstract. — We give a proof of the star-triangle relation for an elliptic generalisation of the Fateev and Zamolodchikov model with symmetry Z_N .

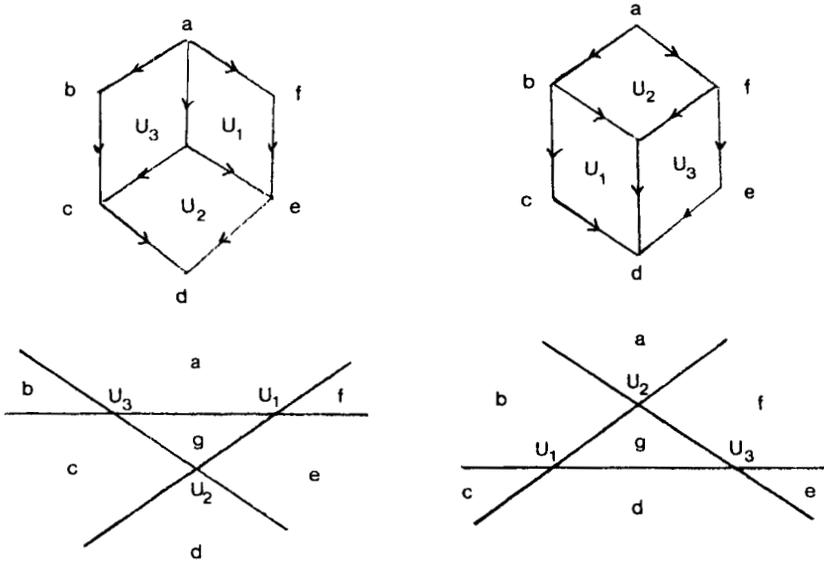
Pour un modèle de faces (IRF) en mécanique statistique des réseaux bidimensionnels [1, 2] l'équivalent de la relation de Yang-Baxter est la relation de l'hexagone entre les poids associés aux vertex, fonctions des variables des faces adjacentes. Cette relation ternaire est traduite fidèlement par les schémas ci-dessous et s'exprime ainsi:

$$\sum_g (ab|U_3|gc) (gc|U_2|ed) \cdot (ag|U_1|fe) \equiv \sum_g (bc|U_1|gd) (ab|U_2|fg) (fg|U_3|ed). \tag{1}$$

$\forall a, b, c, d, e, f \in Z_N$

(*) Laboratoire de l'Institut de Recherche Fondamentale du Commissariat à l'Energie Atomique.

Chacun des trois poids $U_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ est fonction de quatre variables sur Z_N .



Faisons l'hypothèse de factorisation des poids U_α , de sorte que les variables se découpent selon les deux diagonales d'un vertex. Nous posons, de façon asymétrique

$$\begin{aligned} (ab|U_3|gc) &= W_3(a, c) V_3(g, b) \\ (ab|U_1|gc) &= W_1(c, a) V_1(b, g) \\ (ab|U_2|gc) &= W_2(b, g) V_2(a, c), \end{aligned} \tag{2}$$

de sorte que la relation de l'hexagone (1) se décompose en deux relations étoile-triangle indépendantes possédant une invariance circulaire formelle

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_g V_3(e, g) V_1(c, g) V_2(a, g) = W_3(a, c) W_1(e, a) W_2(c, e). \tag{3}$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_g V_3(g, b) V_1(g, f) V_2(g, d) = W_3(f, d) W_1(d, b) W_2(b, f). \tag{4}$$

où \mathcal{N} est une constante (indépendante des variables sur Z_N). Les relations (3) et (4) se réduisent à une seule, si nous faisons l'hypothèse de symétrie

$$\begin{cases} W_\alpha(a, b) = W_\alpha(b, a) \\ V_\alpha(a, b) = V_\alpha(b, a) \end{cases} \tag{5}$$

Nous nous proposons de trouver une solution de la relation étoile-triangle du type d'Onsager (3), qu'on pouvait d'ailleurs prendre comme point de départ. Nous l'écrivons sous la forme

$$\mathcal{N} \Psi(a_1 a_2 a_3) = \Phi(a_1 a_2 a_3) \tag{6}$$

soit

$$\mathcal{N}W_1(a_2, a_3)W_2(a_3, a_1)W_1(a_1, a_2) = \sum_a V_1(a_1, a)V_2(a_2, a)V_3(a_3, a) \tag{7}$$

où nous supposons que les arguments a_α, a varient sur des ensembles Z_N translatés par des paramètres indéterminés $u, u_\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a &= u + n & , & \quad n \in Z_N \\ a_\alpha &= u_\alpha + n_\alpha & , & \quad n_\alpha \in Z_N. \end{aligned} \tag{8}$$

Dans un premier temps cependant, nous relaxons la stricte périodicité N qu'impliquent (8) pour V et W , en la remplaçant par une quasi-périodicité, c'est à dire que $V(a_\alpha, \dots)$ est multiplié par un facteur constant dans une translation N .

$$V_\alpha(a_\alpha + N, a) = e^{N\Lambda_\alpha} V_\alpha(a_\alpha, a) \tag{9}$$

Nous supposons que le produit $\prod_\alpha V_\alpha(a_\alpha, a)$ est effectivement de période N en a , afin que la somme soit définie. Il suffira ensuite d'effectuer la transformation $V_\alpha \rightarrow V_\alpha \exp(-\Lambda_\alpha a_\alpha)$ pour obtenir une solution sur Z_N , ou N -périodique en a_α .

Dans cette hypothèse, suivant une méthode de double récurrence analogue dans son principe à celle utilisée en (3) et (6), mais portant sur des objets différents, nous allons montrer l'existence d'une solution de(7), telle que V, W soient des fonctions paires et symétriques de leurs arguments, ainsi définies [2, 6]

$$V_1(a_1, a) = \prod_{\pm} G\left(\frac{1}{2} + \xi_1 \pm a_1 \pm a\right) \tag{10}$$

$$W_1(a_2, a_3) = \prod_{\pm} G\left(\frac{1}{2} + \eta_1 \pm a_2 \pm a_3\right), \tag{11}$$

où ξ_α, η_α désignent six paramètres supplémentaires. $V_\alpha(W_\alpha)$ est un produit de 4 fonctions G et se présente donc comme un produit du type $g(a + b)g(a - b)$ où g est paire.

La fonction méromorphe $G(z)$, qui est une généralisation elliptique de la fonction Gamma d'Euler, est essentiellement définie par la récurrence

$$G(z + 1) = \theta_1\left(\frac{\pi z}{N}\right) G(z) = \theta(z)G(z) \tag{12}$$

où $\theta_1(z|\tau)$ est la fonction théta impaire de "périodes" π et $\pi\tau$. Les premières propriétés de G , appelée $\Gamma_{\tau, N}$ en référence [4], sont les relations fonctionnelles :

$$G(z)G(1 - z)\theta_1(\pi z|N\tau)C_N(\tau) = 1, \tag{13}$$

$$G(z + N)G(1 - z) = 1 \tag{14}$$

Nous introduisons maintenant les fonctions auxiliaires sur Z_N , notées v et w résultant de l'application de l'opérateur translation Y sur V et W , $Y f(a) = f(a + 1)$.

$$v(a, b) = \frac{V(a, b + 1)}{V(a, b)} = v(-a, b) = v^{-1}(a, -b - 1), \tag{15}$$

$$w(a, b) = \frac{W(a, b + 1)}{W(a, b)} = w(-a, b). \tag{16}$$

Ce sont des fonctions paires de leur premier argument.

Preuve de la relation $\mathcal{N}\Psi = \Phi$.

L'idée est de montrer que Ψ et Φ obéissent aux trois mêmes relations de récurrence $\hat{R}_\alpha \Phi = 0$ sur chaque paire de variables, et sont donc proportionnelles si la cyclicité entraîne l'unicité de l'état "invariant" solution de $\hat{R}_\alpha \Phi = 0$.

d'après (10, 11), (15) et (16), nous avons

$$v_1(a_1, a) = \prod_{\pm} \frac{\theta\left(a \pm a_1 + \xi_1 + \frac{1}{2}\right)}{\theta\left(a \pm a_1 - \xi_1 + \frac{1}{2}\right)} \equiv \frac{h\left(a_1, \xi_1 + a + \frac{1}{2}\right)}{h\left(a_1, -\xi_1 + a + \frac{1}{2}\right)}, \tag{17}$$

$$w_1(a_3, a_2) = \prod_{\pm} \frac{\theta\left(a_2 \pm a_3 + \eta_1 + \frac{1}{2}\right)}{\theta\left(a_2 \pm a_3 - \eta_1 + \frac{1}{2}\right)} \equiv \frac{h\left(a_3, \eta_1 + a_2 + \frac{1}{2}\right)}{h\left(a_3, -\eta_1 + a_2 + \frac{1}{2}\right)}, \tag{18}$$

où la fonction h de période N dans ses deux variables

$$h(x, y) = \theta(x+y)\theta(x-y)\theta_4^2(0) \equiv \theta_1^2\left(\frac{\pi x}{N}\right)\theta_4^2\left(\frac{\pi y}{N}\right) - \theta_4^2\left(\frac{\pi x}{N}\right)\theta_1^2\left(\frac{\pi y}{N}\right), \tag{19}$$

est paire et antisymétrique ; c'est l'analogie elliptique de la forme $x^2 - y^2$.

Identité.

Entre les fonctions h , il est facile de prouver l'identité suivante :

$$\sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} \epsilon_1 \epsilon_2 h(a, a_1 + \xi_1) h(a, a_2 + \xi_2) h(a_1 - \xi_1, a_2 - \xi_2) \equiv 0 \tag{20}$$

La somme sur les signes ϵ_1, ϵ_2 , "inclus" dans ξ_1, ξ_2 , comprend 4 termes. Après mise en facteur de la quantité

$$\prod_{\epsilon_1 \epsilon_2} \theta_4^4(a)\theta_4^2(a_1 \pm \xi_1)\theta_4^2(a_2 \pm \xi_2)$$

Il reste à montrer

$$\sum_{\epsilon_1 \epsilon_2} \epsilon_1 \epsilon_2 (\text{sn}^2 a - \text{sn}^2(a_1 + \xi_1)) (\text{sn}^2 a - \text{sn}^2(a_2 + \xi_2)) \cdot (\text{sn}^2(a_1 - \xi_1) - \text{sn}^2(a_2 - \xi_2)) \equiv 0, \tag{21}$$

ce qu'on vérifie immédiatement pour les coefficients de sn^4, sn^2 , et du terme constant.

Nous établissons maintenant trois relations entre les $v_\alpha(a, \dots)$.

Posant par commodité

$$a'_\alpha = a_\alpha + \frac{1}{2}, \tag{22}$$

nous avons d'après (17)

$$v_1(a, a_1) = h(a, \xi_1 + a'_1) / h(a, -\xi_1 + a'_1) \tag{23}$$

Divisant les quatre termes de l'identité (20), avec $a_\alpha \rightarrow a'_\alpha$, par $h(a, -\xi_1 + a'_1) \cdot h(a, -\xi_2 + a'_2)$, nous obtenons de (20) et (23) la relation entre v_1 et v_2

$$\begin{aligned} R_3(a) \equiv & v_1(a, a_1) v_2(a, a_2) h(a'_1 - \xi_1, a'_2 - \xi_2) + h(a'_1 + \xi_1, a'_2 + \xi_2) \\ & - v_1(a, a_1) h(a'_1 - \xi_1, a'_2 + \xi_2) - v_2(a, a_2) h(a'_1 + \xi_1, a'_2 - \xi_2) \equiv 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Nous avons ainsi trois identités

$$R_\alpha(a) \equiv 0 ; \tag{25}$$

Considérons alors la quantité Φ donnée par le second membre de (7). D'après (25) nous avons évidemment

$$\sum_a R_3(a) V_1(a_1, a) V_2(a_2, a) V_3(a_3, a) \equiv 0 \tag{26}$$

et d'après (15) et (24)

$$h(a'_1 - \xi_1, a'_2 - \xi_2) \sum_a V_1(a_1 + 1, a) V_2(a_2 + 1, a) V_3(a_3, a) + \dots \equiv 0 \tag{27}$$

soit

$$\hat{R}_3 \Phi = 0 \tag{28}$$

où \hat{R}_3 désigne l'opérateur agissant sur les fonctions de a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} \hat{R}_3 \Phi \equiv & h(a'_1 - \xi_1, a'_2 - \xi_2) Y_1 Y_2 \Phi \\ & + h(a'_1 + \xi_1, a'_2 + \xi_2) \Phi \\ & - h(a'_1 - \xi_1, a'_2 + \xi_2) Y_1 \Phi - h(a'_1 + \xi_1, a'_2 - \xi_2) Y_2 \Phi \end{aligned} \tag{29}$$

La fonction $\Phi(a_1 a_2 a_3)$ vérifie donc les trois relations de récurrence

$$\hat{R}_\alpha \Phi = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Les relations récurrentes (29), ou les opérations \hat{R} s'expriment sous une forme intéressante en introduisant la translation t telle que

$$t_1 \Phi(a_1) = \Phi\left(a_1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad Y_\alpha = t_\alpha^2, \tag{31}$$

posant $\Phi' = t_1 t_2 t_3 \Phi = \Phi(a'_1, a'_2, a'_3)$,

$$\hat{R}_3 = t_1 t_2 R_3 \tag{32}$$

la relation (29) s'écrit

$$R_3 \Phi' \equiv \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} \epsilon_1 \epsilon_2 h(a_1 - \xi_1, a_2 - \xi_2) t_1^{\epsilon_1} t_2^{\epsilon_2} \Phi' = 0 \tag{33}$$

avec l'expression des nouveaux opérateurs

$$R_3 = Q_1 P_2 - Q_2 P_1 \quad \text{et circ.} \tag{34}$$

où (Q_α, P_α) désignent trois couples d'opérateurs s'écrivant d'après (19) :

$$\begin{cases} Q_\alpha = \theta_1^2 (a_\alpha - \xi_\alpha) t_\alpha - \theta_1^2 (a_\alpha + \xi_\alpha) t_\alpha^{-1} \\ P_\alpha = \theta_4^2 (a_\alpha - \xi_\alpha) t_\alpha - \theta_4^2 (a_\alpha + \xi_\alpha) t_\alpha^{-1} \end{cases} \tag{35}$$

On peut noter incidemment que ce "spineur", pour les valeurs du paramètre ξ , $\xi +$ une demi période, joue un rôle dans la construction du "vecteur" S_α , base de l'algèbre de Sklyanin⁵⁾ (une déformation elliptique des quaternions) en vertu de la formule

$$h_\alpha(x, y) = \epsilon_\alpha \tilde{\psi}(x) q_{\alpha+1} \psi(y) ; (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

avec

$$\psi(y) = \begin{pmatrix} \theta_1^2(y) \\ \theta_4^2(y) \end{pmatrix}, \tilde{\psi} = -i\sigma_2 \psi,$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= (1, 1, i, 1), \\ \epsilon_\alpha q_{\alpha+1} &= \left(\mathbb{1}, \frac{1}{k'} (ik\sigma_2 - \sigma_3), \frac{1}{k'} (i\sigma_2 - k\sigma_3), \sigma_1 \right). \end{aligned}$$

pour $k = 0$, q se réduit à

$$q_\alpha = (\mathbb{1}, -\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1).$$

L'indice de représentation de l'algèbre S_α , $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, est donné par $2\xi = \nu$, modulo une période.

Preuve de $\hat{R}\Psi = 0$.

Ayant établi les récurrences (30), $\hat{R}\Phi = 0$, nous montrons que le premier membre de (7) vérifie ces mêmes récurrences, c'est à dire

$$\hat{R}\Psi = 0. \tag{36}$$

D'après la définition (16) nous avons

$$\begin{aligned} Y_1 \Psi &= w_2(a_3, a_1) w_3(a_2, a_1) \cdot \Psi \\ Y_2 \Psi &= w_1(a_3, a_2) w_3(a_1, a_2) \cdot \Psi \end{aligned} \tag{37}$$

$$Y_1 Y_2 \Psi = w_3(a_2 + 1, a_1) w_3(a_1 a_2) w_2(a_3 a_1) w_1(a_3, a_2) \Psi \tag{38}$$

Utilisant les expressions (18) des w

$$w_1(a_3, a_2) = \frac{h(a_3, a'_2 + \eta_1)}{h(a_3, a'_2 - \eta_1)} \tag{39}$$

nous avons

$$w_3(a_2 + 1, a_1) w_3(a_1 a_2) \equiv \varphi(a_1 + a_2) \equiv \prod_{\pm} \frac{\theta\left(a'_1 + a'_2 + \eta_3 \pm \frac{1}{2}\right)}{\theta\left(a'_1 + a'_2 - \eta_3 \pm \frac{1}{2}\right)}. \tag{40}$$

L'égalité à prouver (36), s'écrit donc d'après (29), (37-38) et (40)

$$\begin{aligned} & \varphi'(a_1 + a_2) w_2(a_3 a_1) w_1(a_3 a_2) h(a'_1 - \xi_1, a'_2 - \xi_2) + h(a'_1 + \xi_1, a'_2 + \xi_2) \\ & - w_3(a_2, a_1) w_2(a_3, a_1) h(a'_1 - \xi_1, a'_2 + \xi_2) \\ & - w_3(a_1, a_2) w_1(a_3, a_2) h(a'_1 + \xi_1, a'_2 - \xi_2) = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

ou, après substitution des expressions (39) pour les w

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1 + a_2) \quad h(a_3, a'_1 + \eta_2) \quad h(a_3, a'_2 + \eta_1) \quad h(a'_1 - \xi_1, a'_2 - \xi_2) \\ & + \quad \quad \quad h(a_3, a'_1 - \eta_2) \quad h(a_3, a'_2 - \eta_1) \quad h(a'_1 + \xi_1, a'_2 + \xi_2) \\ & - w_3(a_2, a_1) \quad h(a_3, a'_1 + \eta_2) \quad h(a_3, a'_2 - \eta_1) \quad h(a'_1 - \xi_1, a'_2 + \xi_2) \\ & - w_3(a_1, a_2) \quad h(a_3, a'_1 - \eta_2) \quad h(a_3, a'_2 + \eta_1) \quad h(a'_1 + \xi_1, a'_2 - \xi_2) = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Or l'égalité (42) coïncidera avec l'identité (20)

$$\sum \epsilon_1 \epsilon_2 h(a_3, a'_1 + \eta_2) h(a_3, a'_2 + \eta_1) h(a'_1 - \eta_2, a'_2 - \eta_1) \equiv 0, \tag{43}$$

s'il existe une fonction $C(a_1, a_2)$ telle que l'on ait la proportion

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) \quad h(a'_1 - \xi_1, a'_2 - \xi_2) & = C \cdot h(a'_1 - \eta_2, a'_2 - \eta_1) \\ \quad \quad \quad h(a'_1 + \xi_1, a'_2 + \xi_2) & = C \cdot h(a'_1 + \eta_2, a'_2 + \eta_1) \\ w_3(a_2, a_1) \quad h(a'_1 - \xi_1, a'_2 + \xi_2) & = C \cdot h(a'_1 - \eta_2, a'_2 + \eta_1) \\ w_3(a_1, a_2) \quad h(a'_1 + \xi_1, a'_2 - \xi_2) & = C \cdot h(a'_1 + \eta_2, a'_2 - \eta_1) \end{cases} \tag{44}$$

On obtient de (44-2)

$$C(a_1 a_2) = \frac{\theta(a'_1 + a'_2 + \xi_1 + \xi_2)}{\theta(a'_1 + a'_2 + \eta_1 + \eta_2)}, \tag{45}$$

à condition de choisir la relation

$$\xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2. \tag{46}$$

On obtient ensuite de (44-1)

$$\varphi(a_1 + a_2) = \frac{\theta(a'_1 + a'_2 - \eta_1 - \eta_2) \theta(a'_1 + a'_2 + \xi_1 + \xi_2)}{\theta(a'_1 + a'_2 + \eta_1 + \eta_2) \theta(a'_1 + a'_2 - \xi_1 - \xi_2)}, \tag{47}$$

qui s'identifie avec l'expression de φ donnée en (40), à condition de choisir

$$\eta_3 + \frac{1}{2} = \xi_1 + \xi_2 \quad ; \quad \eta_3 - \frac{1}{2} = -(\eta_1 + \eta_2). \tag{48}$$

Les conditions (46) et (48) se réduisent aux seules suivantes :

$$\begin{cases} \xi_\alpha + \eta_\alpha = \frac{1}{2} \\ \sum_\alpha \xi_\alpha = 1 \end{cases} \implies \sum_\alpha \eta_\alpha = \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Il reste enfin à vérifier que les relations (44-3) et (44-4) sont cohérentes avec l'expression (39) des w_3 , compte tenu des conditions (49).

Nous avons donc démontré que, si les trois paramètres ξ_α sont liés par la relation $\sum \xi_\alpha = 1$, dans l'hypothèse que le produit $\prod_\alpha V(a_\alpha, a)$ soit de période N en a , les fonctions Φ et Ψ obéissent au même système de double récurrence (30), (36).

Les poids V et W , formules (10) et (11), correspondent aux fonctions v et w données par

$$\begin{aligned} v_1(a, a_1) &= \frac{h\left(a, \xi_1 + a_1 + \frac{1}{2}\right)}{h\left(a, -\xi_1 + a_1 + \frac{1}{2}\right)}, \\ w_1(a_3, a_2) &= \frac{h(a_3, a_2 - \xi_1 + 1)}{h(a_3, a_2 + \xi_1)}. \end{aligned} \tag{50}$$

Que reste-t-il à prouver pour conclure que Φ est proportionnelle à Ψ ? (relation (6)).

Il est clair que, si Φ et Ψ obéissent aux mêmes récurrences, il en sera de même pour les fonctions Φ^Λ et Ψ^Λ modifiées par le même facteur exponentiel

$$\Phi^\Lambda(a_1 a_2 a_3) = e^{-(\Lambda_1 a_1 + \Lambda_2 a_2 + \Lambda_3 a_3)} \Phi(a_1 a_2 a_3). \tag{51}$$

Supposons que les constantes Λ_α et les paramètres u_α, u puissent être choisis de sorte que Φ^Λ soit de période N dans chaque variable a_α . Alors les trois opérateurs de récurrence modifiés sont représentés par des matrices finies, de dimension $N \times N \times 1$. L'unicité du vecteur propre commun Φ^Λ , relatif à la valeur propre zéro, ou encore la non-dégénérescence de cette valeur propre, équivaut à l'existence d'un seul "invariant" ou état dont le moment déformé, $R = Q \wedge P$, est nul [7]. La compatibilité des 3 conditions est assurée par les relations de commutation issues de (34) et (35) :

$$[R_1, R_2] = [Q_3, P_3] R_3 \quad \text{et circ.} \tag{52}$$

Dans cette seule hypothèse, qui est probablement vérifiée en position générale des paramètres, il suffit d'imposer quatre conditions cycliques Z_N , pour prouver la relation (7), où \mathcal{N} est indépendant des n, n_α .

Conditions cycliques.

La première est la condition sur le sommand de Φ :

$$\prod_\alpha V_\alpha(a_\alpha, a) = N\text{-périodique en } a.$$

Or, nous avons

$$\frac{V(a_1, a + N)}{V(a_1, a)} = \prod_{n=0}^{N-1} v_1(a_1, a + n) \tag{53}$$

et, en vertu des formules (13) et (14),

$$\frac{V(a_1, a + N)}{V(a_1, a)} = \prod_{\pm} \frac{\theta_1\left(\pi\left(u \pm u_1 + \xi_1 + \frac{1}{2}\right) \middle| N\tau\right)}{\theta_1\left(\pi\left(u \pm u_1 - \xi_1 + \frac{1}{2}\right) \middle| N\tau\right)} \tag{54}$$

La première condition cyclique s'écrit donc

$$\prod_{\alpha=1}^3 \prod_{\pm} \frac{\theta_N\left(u \pm u_\alpha + \xi_\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\theta_N\left(u \pm u_\alpha - \xi_\alpha + \frac{1}{2}\right)} = 1 \tag{55}$$

où l'on a adopté la notation rapide $\theta_N(u) = \theta_1(\pi u|N\tau)$.

Reste à exprimer que $e^{-\Lambda_\alpha a_\alpha} V(a_\alpha, a)$ est de période N en a_α , ou autrement dit, que les fonctions Φ et Ψ ont les mêmes multiplicateurs dans les translations N . Ce qui nous donne les trois conditions cycliques supplémentaires :

$$\prod_{\pm} \frac{\theta_N(u_1 \pm u_2 - \xi_3)}{\theta_N(u_1 \pm u_2 + \xi_3)} \cdot \frac{\theta_N(u_1 \pm u_3 - \xi_2)}{\theta_N(u_1 \pm u_3 + \xi_2)} = \prod_{\pm} \frac{\theta_N\left(u_1 \pm u + \xi_1 + \frac{1}{2}\right)}{\theta_N\left(u_1 \pm u - \xi_1 + \frac{1}{2}\right)} \equiv e^{N\Lambda_1}. \quad (56)$$

Telles sont les quatre relations entre les 4 paramètres u_α, u , les ξ_α étant donnés. On peut encore écrire ces conditions de symétrie Z_N sous la forme

$$\prod_{\alpha} \frac{h_N\left(u + \xi_\alpha + \frac{1}{2}, u_\alpha\right)}{h_N\left(-u + \xi_\alpha + \frac{1}{2}, u_\alpha\right)} = 1. \quad (57)$$

$$\frac{h_N(u_1 - \xi_3, u_2)}{h_N(u_1 + \xi_3, u_2)} \cdot \frac{h_N(u_1 - \xi_2, u_3)}{h_N(u_1 + \xi_2, u_3)} \cdot \frac{h_N\left(u_1 - \xi_1 + \frac{1}{2}, u\right)}{h_N\left(u_1 + \xi_1 + \frac{1}{2}, u\right)} = 1. \quad (58)$$

avec la définition

$$\begin{aligned} h_N(x, y) &= \theta_1^2(\pi x|N\tau)\theta_4^2(\pi y|N\tau) - \dots \\ &= \theta_4^2(\pi x|N\tau)\theta_4^2(\pi y|N\tau) \{ \operatorname{sn}^2(2K_N x; k_N) - \operatorname{sn}^2(2K_N y; k_N) \} \times k_N. \end{aligned} \quad (59)$$

Elles admettent des solutions évidentes comme $u_\alpha = u = 0$ et $u_\alpha = u = \frac{1}{2}$, mais il en existe probablement d'autres qu'on doit pouvoir suivre par continuité à partir de l'une ou l'autre limite circulaire.

Limite circulaire.

Les relations limites ($q \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, \theta_1 \sim \sin \pi u$) nous donnent

$$\prod_{\alpha} (\cos 2\pi(u + \xi_\alpha) + \cos 2\pi u_\alpha) = \{u \rightarrow -u\}.$$

Soit $(\cos 2\pi(u_1 - \xi_3) - \cos 2\pi u_2)(\cos 2\pi(u_1 - \xi_2) - \cos 2\pi u_3) \times$ (60)
 $\times (\cos 2\pi(u_1 - \xi_1) + \cos 2\pi u) = \{u_1 \rightarrow -u_1\}$

et circ.

En dehors des deux solutions isolées, $u_\alpha = u = 0$ (ou $\frac{1}{2}$), mentionnées plus haut, nous avons obtenu, après un calcul un peu long, la paramétrisation suivante des 4 conditions cycliques

$$\cos 2\pi u_\alpha \cdot \cos 2\pi \xi_\alpha = \rho \cos 2\pi u \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \rho(2\rho + 1) \cos^2 2\pi u &= \prod_{\alpha} \cos 2\pi \xi_{\alpha}. \\ \left(\Rightarrow \frac{\rho^2}{2\rho + 1} \cos 2\pi u &= \prod_{\alpha} \cos 2\pi u_{\alpha} \right) \end{aligned} \tag{62}$$

où, les ξ_{α} étant donnés avec $\sum \xi_{\alpha} = 1$, ρ et u_{α} restent fonctions du paramètre u . On peut encore écrire les relations (61) sous la forme

$$\sin^2 \pi (u_{\alpha} + \xi_{\alpha}) + \sin^2 \pi (u_{\alpha} - \xi_{\alpha}) - 2\rho \sin^2 \pi u = 1 - \rho. \tag{63}$$

La constante $\Lambda_{\alpha}(u_{\alpha}, u)$ est donnée par l'expression

$$\text{th} \left(\frac{1}{2} N \Lambda_{\alpha} \right) = -\frac{\rho}{\rho + 1} \cdot \text{tg} 2\pi u_{\alpha} \cdot \text{tg} 2\pi \xi_{\alpha}. \tag{64}$$

de sorte que le poids V^{Λ} , N -périodique dans les deux arguments, est

$$V^{\Lambda}(a_{\alpha}, a) = e^{-a_{\alpha} \Lambda_{\alpha}(u_{\alpha}, u) - a \Lambda_{\alpha}(u, u_{\alpha})} V(a_{\alpha}, a) \tag{65}$$

On a $\sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}(u, u_{\alpha}) = 0$ en vertu de (55).

Il serait utile d'examiner proprement les divers cas limites et la correspondance avec les modèles connus. Signalons la limite

$$\begin{aligned} \text{Im } u = \text{Im } u_{\alpha} = -\infty, \quad \rho &\longrightarrow -\frac{1}{2} \\ \lim \left(u_{\alpha} - u - \frac{1}{2} \right) &= v_{\alpha} \end{aligned} \tag{66}$$

$$e^{2\pi i(v_{\alpha} + \xi_{\alpha})} + e^{2\pi i(v_{\alpha} - \xi_{\alpha})} = 1, \tag{67}$$

qui est la "courbe de Fermat" d'un cas self-dual [2, 4, 8, 10]. la généralisation elliptique de (61) ou (63) pour paramétriser les conditions cycliques (56) n'est pas évidente. Pour $\rho = -1$, $e^{N\Lambda} = -1$, la généralisation de (63) serait

$$\text{sn}^2 2K \left(u_{\alpha} + \xi_{\alpha} + \frac{1}{2} \right) + \text{sn}^2 2K \left(u_{\alpha} - \xi_{\alpha} + \frac{1}{2} \right) = 2 \text{sn}^2 2K u \tag{68}$$

avec la notation $k_N \text{sn}^2(u; k_N) = (\theta_1^2/\theta_4^2) \left(\frac{\pi u}{2K} |N\tau \right)$ ce qui correspond à l'équation 5.17 en référence (4), si l'on identifie les paramètres $2u$ du présent travail avec $(u/2\zeta)$, ($\zeta N = K$), du précédent ; $(u_{\ell}/2\zeta)$ et $(u_{-\ell}/2\zeta)$ correspondant à $2(u + \xi)$ et $2(u - \xi)$, mais rien n'est encore vérifié à ce sujet.

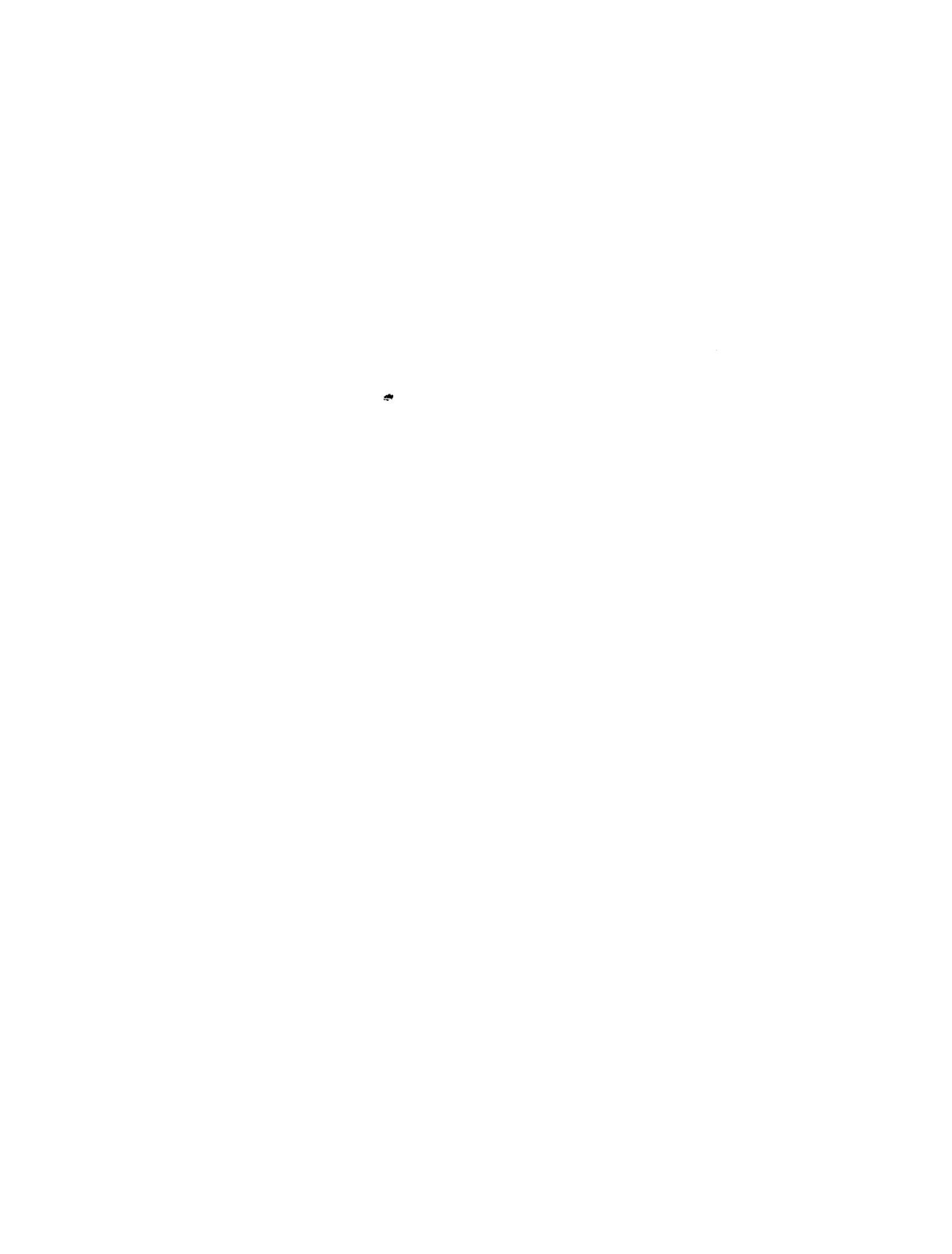
Le lien entre les poids ici construits et l'interchangeur A construit en (10) selon la méthode de Bazhanov [9] reste aussi à préciser.

Bibliographie

- [1] BAXTER R.J., Exactly solved models in statistical mechanics, A.P. London (1982).
- [2] FATEEV V.A. and ZAMOLODCHIKOV A.B., Self-dual solutions of the star triangle relations in Z_N models, *Phys. Lett. A* **92** (1982) 37.
- [3] BAXTER R.J., PERK J.H.H. and AU YANG H., New solutions of the star triangle relations for the chiral Potts model, *Phys. Lett. A* **128** (1988) 138.
- [4] B.M. COY, J.H. PERK, S. TANG and C.H. SAH, Commuting transfer matrices for the 4-state self-dual chiral Potts model with a genus 3 uniformizing Fermat curve, *Phys. Lett.* **125A** (1987) 9.
- [5] E.K. SKLYANIN, Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equations. Representation of quantum algebra Translated *Funktional'nyi Analizi Ego Prilozheniya* **17** (1983) 33-48.
- [6] AU-YANG H., PERK J.H.H., Onsager's star triangle equations : master key to integrability, Tanigushi symposium (1989).
- [7] BERNARD D. and LECLAIR A., q -deformation of $SU(1,1)$ conformal Ward identities and q -strings, PUPT-1123 (1989).
- [8] BAXTER R.J., The superintegrable chiral Potts model, *Phys. Lett. A* **133** (1988).
- [9] BAZHANOV V.V. et STROGANOV Yu.G., Chiral Potts model as a descendant of the six-vertex model Preprint CMA-R34-89, A paraître dans *J. Stat. Phys.*
- [10] M. GAUDIN, Sur la nouvelle solution à deux rapidités des relations de Yang-Baxter. Note CEA N-2601 Mai 1989; Un descendant du modèle des huit vertex ? (1990) soumis au *J. Phys.*

Cet article a été imprimé avec le Macro Package "Editions de Physique Avril 1990".

Modèles exacts non intégrables



SOLUTION EXACTE D'UN PROBLÈME MODÈLE A TROIS CORPS. ÉTAT LIÉ

M. GAUDIN et B. DERRIDA

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires, BP N° 2, 91190 Gif-sur-Yvette, France

(Reçu le 16 juillet 1975, accepté le 25 août 1975)

Résumé. — Le problème de l'état lié de trois particules en interaction delta à une dimension est ramené à la résolution d'un système d'équations aux différences. Dans un cas particulier qui constitue un des plus simples parmi les modèles non triviaux pour un système quantique à trois corps

$$(m_1 = m_2 = m_3; \quad g_3 = 0; \quad g_1 = g_2 < 0)$$

l'énergie de liaison de l'état fondamental est obtenue en résolvant une équation transcendante. Le résultat est cohérent avec celui de Dodd, obtenu par résolution numérique des équations de Faddeiev.

Abstract. — The problem of the bound state of three massive particles, interacting in one dimension via a two-body delta potential, is reduced to the solution of a system of finite difference equations. In a particular non trivial case the ground state energy is given exactly by a transcendental equation. The result agrees with Dodd's value obtained by numerical solution of Faddeiev's equations.

1. **Position du problème général.** — Notre point de départ est l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ de trois particules de masses m_1, m_2, m_3 , en interaction mutuelle de type delta à une dimension

$$-\left(\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{1}{m_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2}\right) - E\Psi + (g_1 \delta(x_2 - x_3) + g_2 \delta(x_1 - x_3) + g_3 \delta(x_2 - x_1)) \Psi = 0. \quad (1)$$

Nous limitant dans ce travail à la question de l'état lié, nous ne traitons pas le cas où les constantes d'interaction g_1, g_2, g_3 seraient positives. On sait que l'éq. (1) est aussi celle d'un problème d'optique ondulatoire à deux dimensions. Le problème de diffusion (scattering) des trois particules quantiques décrites par (1) est en effet équivalent à un problème de diffraction d'une onde optique incidente par trois lames concurrentes infiniment minces et réfringentes. Mais ceci correspond à proprement parler au cas d'énergie positive qui sera traité ailleurs. Renvoyant pour les travaux antérieurs aux auteurs cités [1-5], nous exposons en évitant au maximum les calculs le détail de la solution d'un cas particulier non trivial.

Après séparation du mouvement du centre de masse, Ψ est une fonction des coordonnées relatives et peut s'écrire symétriquement en introduisant des coordonnées polaires ρ, θ ; on définit les angles $\theta_j (j = 1, 2, 3)$ par les expressions

$$\theta_1 = 0, \quad \text{tg } \theta_2 = \sqrt{\frac{mm_3}{m_1 m_2}}, \quad (2)$$

$$\text{tg } \theta_3 = -\sqrt{\frac{mm_2}{m_1 m_3}}$$

avec $m = m_1 + m_2 + m_3$.

On a les inégalités

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} < \theta_3 < \pi. \quad (3)$$

En coordonnées polaires les distances relatives s'écrivent sous la forme

$$(x_j - x_k) = \rho \sin(\theta - \theta_i) \sqrt{\frac{m_j + m_k}{m_j m_k}} \quad (i, j, k) = (1, 2, 3). \quad (4)$$

Au lieu des constantes g_i , on introduit les couplages λ_i tels que

$$\lambda_i = -g_i \sqrt{\frac{m_j m_k}{m_j + m_k}} > 0. \quad (5)$$

Introduisons un indice de sommation α variant de 1 à 6 tel que

$$\lambda_{\alpha+3} = \lambda_\alpha, \quad \theta_{\alpha+3} = \theta_\alpha + \pi, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (6)$$

nous obtenons, après séparation, l'équation d'onde à deux dimensions

$$\Delta_2 \psi - q^2 \psi + \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^6 \lambda_\alpha \delta(\theta - \theta_\alpha) \psi = 0, \quad (7)$$

pour la fonction intrinsèque $\psi(\rho, \theta)$ d'énergie de liaison

$$B = -q^2.$$

On ne connaît de solution à l'éq. (1) que dans ce qu'on peut appeler le cas trivial, ou cas sans diffraction, réalisé lorsque les couplages et les masses vérifient les deux relations

$$\frac{g_1}{m_2 + m_3} = \frac{g_2}{m_1 + m_3} = \frac{g_3}{m_1 + m_2} = -2a. \quad (8)$$

La fonction d'onde de l'état lié est alors la suivante

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \dots e^{-a\{m_1 m_2 |x_1 - x_2| + m_1 m_3 |x_1 - x_3| + m_2 m_3 |x_2 - x_3|\}} \quad (9)$$

et correspond à l'énergie de liaison

$$q^2 = a^2(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)(m_2 + m_3) = \frac{|g_1 g_2 g_3|}{8a}. \quad (10)$$

Dans le cas général on sait réduire le problème de trouver une fonction vérifiant (7) à la résolution d'un système d'équations aux différences finies. Soit ε la parité de l'état ψ qui, au vu de l'hamiltonien, est un bon nombre quantique

$$\varepsilon \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + \pi). \quad (11)$$

Etendons la définition de ψ aux valeurs négatives de r par la formule

$$\psi(-r, \theta) = \varepsilon \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + \pi). \quad (12)$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} \psi_\alpha(r) &= \psi(r, \theta_\alpha) \\ r_{\alpha\beta} &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_{\alpha\beta})^{1/2} \\ \theta_{\alpha\beta} &= |\theta_\alpha - \theta_\beta| \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

On notera

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha+3}(r) &= \psi_\alpha(-r) = \varepsilon \psi_\alpha(r) \\ r_{\alpha,\beta+3}(r, r') &= r_{\alpha\beta}(r, -r') \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Il est facile d'établir que l'éq. (7) augmentée des conditions à l'infini est équivalente aux équations intégrales couplées

$$\psi_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^3 \lambda_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(qr_{\alpha\beta}) \psi_\beta(r') dr', \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (15)$$

où $K_0(z)$ désigne la fonction de Hankel décroissant en $e^{-|z|}$ à l'infini (z réel). On a montré [9] que l'opérateur intégral défini par (15) contracte les fonctions de la classe $C_{\xi=1/\sqrt{2}}$ ainsi définie

$$\psi_\alpha(r) \in C_{\xi_\alpha},$$

si

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{q\rho} \log \psi_\alpha(\rho) = -\xi_\alpha. \quad (16)$$

On pose $\xi_\alpha = \sin \gamma_\alpha$ et par conséquent

$$\frac{\pi}{4} < \gamma_\alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

On définit la transformée

$$\chi_\alpha(\omega) = \int_0^\infty \psi_\alpha(r) e^{-qr \sin \omega} dr. \quad (18)$$

Considérée comme fonction analytique de ω , elle est sûrement holomorphe dans la région

$$\text{Re} \sin \omega + \sin \gamma_\alpha > 0$$

et, sur l'axe réel, dans l'intervalle

$$-\gamma_\alpha < \omega < \gamma_\alpha + \pi. \quad (19)$$

On montre alors que l'équation intégrale (15) est équivalente aux trois équations aux différences finies

$$\begin{aligned} &[\chi_\alpha(\omega) + \varepsilon \chi_\alpha(\omega + \pi)] (2q \cos \omega - \lambda_\alpha) = \\ &= \sum_{\beta(\neq \alpha)} \lambda_\beta [\chi_\beta(\omega + \theta_{\alpha\beta}) + \varepsilon \chi_\beta(\omega + \pi - \theta_{\alpha\beta})] \end{aligned} \quad (20)$$

relations valides dans tout le domaine de prolongement des fonctions χ_α à partir de l'intervalle réel

$$-\gamma < \omega < \gamma; \quad \gamma = \text{Min}_\alpha \gamma_\alpha. \quad (21)$$

Dans le cas des masses égales et de la parité positive, on a

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \\ \theta_{23} &= \frac{\pi}{3}, \quad \varepsilon = +1 \end{aligned} \quad (22)$$

et le système (20) prend la forme

$$\begin{aligned} &[\chi_1(\omega) + \chi_1(\omega + \pi)] (2q \cos \omega - \lambda_1) = \\ &= \lambda_2 \left[\chi_2 \left(\omega + \frac{\pi}{3} \right) + \chi_2 \left(\omega + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \\ &+ \lambda_3 \left[\chi_3 \left(\omega + \frac{\pi}{3} \right) + \chi_3 \left(\omega + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

avec les deux autres équations obtenues par permutation circulaire des indices.

L'objet du présent article est d'exposer la solution correspondant au cas particulier non trivial

$$m_1 = m_2 = m_3; \quad g_1 = g_2 \neq 0; \quad g_3 = 0.$$

Rappelons que le cas trivial correspond ici à $g_1 = g_2 = g_3$, puisque les masses sont égales. Donnons un raccourci de la solution dans ce dernier cas. On a $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3$. Prenant comme fonction inconnue

$$f(\omega) = \chi\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \chi\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (24)$$

le problème trivial consisterait à trouver une solution paire de l'équation aux différences issue de (23)

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2q \cos \omega + 1}{2q \cos \omega - 1} f(\omega) = 0 \quad (25)$$

telle que $f(\omega)$ soit holomorphe dans l'intervalle réel

$$-\gamma - \frac{\pi}{3} < \omega < \gamma + \frac{\pi}{3} \quad (26)$$

et tende vers zéro à l'infini. La représentation intégrale (18) et l'équation fonctionnelle (25) permettent de décrire les propriétés analytiques essentielles de f . Donnons brièvement le résultat : l'abscisse de convergence est évidemment telle que $\cos \gamma = 1/2q$. Pour la valeur $\gamma = \pi/3$, c'est-à-dire $q = 1$, $f(\omega)$ est 2π -périodique et méromorphe et, de fait, proportionnelle à $(2 \cos \omega + 1)^{-1}$. On en déduit

$$\chi(\omega) = \left(\sin \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1}$$

qui est la transformée de $\exp\left(-\rho \sin \frac{2\pi}{3}\right)$, la fonction d'onde du cas trivial étant d'après (9)

$$\psi(\rho, \theta) = \exp \left[-\frac{1}{2} \rho \left\{ |\sin \theta| + \left| \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| + \left| \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right| \right\} \right] \quad (27)$$

Nous constaterons que la solution du cas non trivial, que nous donnons maintenant, est beaucoup plus complexe, bien que l'équation aux différences soit très semblable à (25).

2. Méthode de solution de l'équation aux différences.

— Nous traitons désormais le cas particulier défini par le choix :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0$$

et nous nous restreignons à la détermination de l'énergie de l'état fondamental, pour laquelle on

calcule aisément une borne variationnelle avec la fonction d'essai $\exp(-\alpha |x_1 - x_3| - \alpha |x_2 - x_3|)$; on trouve $q^2 > \frac{1}{2}$. Sa parité est positive. Nous avons $\chi_1(\omega) \equiv \chi_2(\omega)$ et nous posons

$$f(\omega) = \chi_1\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \chi_1\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (28)$$

L'éq. (23) nous donne la relation

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = x(\omega) f(\omega) \quad (29)$$

avec

$$x(\omega) = \frac{\cos \omega}{\cos \omega - \frac{1}{2q}}. \quad (30)$$

Le problème consiste à trouver une fonction analytique réelle, paire, solution de l'équation aux différences (29), nulle à l'infini et holomorphe dans l'intervalle

$$-\frac{\pi}{3} - \gamma < \omega < \frac{\pi}{3} + \gamma. \quad (31)$$

Ces propriétés résultent de la représentation (18). La fonction sera aussi positive sur l'axe réel, puisque la fonction d'onde du fondamental est positive.

D'après (18), f est holomorphe dans l'intersection des domaines

$$\begin{aligned} \Re \omega \sin \left(\omega + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \gamma > 0, \\ \Re \omega \sin \left(\omega + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \gamma > 0, \end{aligned} \quad (32)$$

qui contient donc toute la bande

$$-\frac{\pi}{3} \leq \Re \omega \leq +\frac{\pi}{3}. \quad (33)$$

Pour définir l'abscisse de convergence γ on a évidemment

$$\cos \gamma = \frac{1}{2q} \quad (34)$$

avec les inégalités

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{3},$$

la première résultant de la borne variationnelle.

A l'aide de la relation fonctionnelle (29) on montre facilement que f est méromorphe dans le plan, les pôles étant situés sur l'axe réel aux abscisses

$$\pm \gamma_n, \quad \gamma_n = \gamma + n \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (35)$$

l'ordre de multiplicité étant $|[n/6] + 1|$.

Par analogie avec la théorie des équations différentielles à coefficients périodiques, on est conduit à itérer l'éq. (29) de façon à former une équation d'incrément 2π . On obtient

$$f(\omega + 2\pi) + f(\omega - 2\pi) = X(\omega)f(\omega) \quad (36)$$

où la fonction X , $\pi/3$ -périodique, a la définition suivante :

$$X(\omega) = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \end{vmatrix} + 2 \quad (37)$$

où l'on a posé

$$x_n = x(\omega_n), \quad \omega_n = \omega + n\frac{\pi}{3}. \quad (38)$$

Le calcul donne

$$X(\omega) = 2 \frac{D(\omega) + D_0}{D(\omega) - D_0}, \quad (39)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} D(\omega) &= 9 \cos^2 \gamma - \cos^2 3\omega, \\ D_0 \equiv D(\gamma) &= 16 \cos^4 \gamma \left(\frac{3}{2} - \cos^2 \gamma\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Ce résultat montre que la solution associée à l'état fondamental ne peut être 2π -périodique, contrairement à ce qui se passe pour le cas trivial où l'on obtient après calcul analogue sur l'éq. (25), $X \equiv 2$. Cependant la valeur $\cos \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}}$ correspondant à $q = 1/\sqrt{6}$ est admissible pour le problème de scattering (état lié à deux particules diffusé par la troisième) et il existe pour cette valeur exceptionnelle une solution périodique facile à construire.

Toujours guidé par l'analogie avec les équations différentielles, on montre que la solution $f(\omega)$ est une somme de deux fonctions $g(\omega)$ et $\tilde{g}(\omega)$

$$f(\omega) = g(\omega) + \tilde{g}(\omega) \quad (41)$$

admettant des facteurs de périodicité tels que

$$\left. \begin{aligned} g(\omega + 2\pi) &= \eta^{-1}(\omega) g(\omega) \\ \tilde{g}(\omega + 2\pi) &= \eta(\omega) \tilde{g}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

avec

$$X(\omega) = \eta(\omega) + \eta^{-1}(\omega) \quad (43)$$

c'est-à-dire

$$\eta(\omega) = \frac{\sqrt{D(\omega)} + \sqrt{D_0}}{\sqrt{D(\omega)} - \sqrt{D_0}} \quad (44)$$

de sorte que l'éq. (36) est vérifiée.

Le multiplicateur η contient l'irrationalité \sqrt{D} qui joue un rôle essentiel dans toute la suite. Si l'on remarque que la surface de Riemann de la courbe algébrique en $e^{i\omega}$ définie par $y = \pm \sqrt{D}$ possède deux feuillettes, il existe plusieurs dissections admissibles du plan complexe ω pour que $\eta(\omega)$ soit monovalué dans la plan ainsi coupé. Nous avons choisi le système de coupures qui rend le plus aisé l'étude du comportement asymptotique de f au voisinage de $\omega = \infty$.

Nous coupons donc le plan par les segments C_n

$$C_n : \operatorname{Re} \omega = n\frac{\pi}{3}, \quad -\lambda < \operatorname{Im} \omega < +\lambda \quad (45)$$

où l'on a défini $\lambda > 0$ de sorte que l'on ait

$$3 \cos \gamma = \cosh 3\lambda. \quad (46)$$

La fonction $\sqrt{D} \equiv \sqrt{\cosh^2 3\lambda - \cos^2 3\omega}$ est alors une fonction impaire de période $2\pi/3$, vérifiant

$$\sqrt{D(-\omega)} = \sqrt{D\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{D(\omega)} \quad (47)$$

la branche choisie étant positive dans le premier feuillet sur les intervalles $[0, \pi/3]$, $[2\pi/3, \pi]$, ... Elle est réelle le long des coupures. Au voisinage de

$$\operatorname{Im} \omega = +\infty,$$

nous utiliserons

$$\sqrt{D} = \frac{i}{2} e^{-3i\omega} \sqrt{(1 - e^{6\lambda+6i\omega})(1 - e^{-6\lambda+6i\omega})}. \quad (48)$$

Nous verrons que l'irrationalité qui est celle de η sera aussi celle des fonctions g et \tilde{g} . Or nous voulons construire une fonction f méromorphe, donc uniforme. Soient ω et $\tilde{\omega}$ deux points de même affixe dans le plan ω mais appartenant à des feuillettes différents de la surface de Riemann, nous prendrons

$$\tilde{g}(\tilde{\omega}) = g(\omega). \quad (49)$$

D'après un théorème classique, la condition d'uniformité (49) est équivalente aux relations sur les coupures

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n\pi}{3} + iv \pm 0\right) &= \tilde{g}\left(\frac{n\pi}{3} + iv \mp 0\right) \\ -\lambda \leq v \leq +\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (50)$$

Le choix (49) est compatible avec (42) puisque la définition de η entraîne

$$\tilde{\eta}(\omega) = \eta^{-1}(\omega).$$

L'analyse conduit à chercher $g(\omega)$ comme solution paire de l'équation

$$g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + g\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = x(\omega) \tilde{g}(\omega) \quad (51)$$

qui entraîne

$$\tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \tilde{g}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = x(\omega) g(\omega),$$

et par conséquent (29). La solution g devra être méromorphe dans le plan coupé, et en fait sur l'un et l'autre feuillet. Les seules singularités non polaires à distance finie étant les points de ramification de $\sqrt{\Delta}$. Les seuls pôles de g sont d'ailleurs donnés par (35).

Par itération de (51) on obtient

$$\left. \begin{aligned} g(\omega + 2\pi) &= P_0(\omega) \tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - P_1(\omega) g(\omega) \\ \tilde{g}(\omega + 2\pi) &= P_0(\omega) g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - P_1(\omega) \tilde{g}(\omega) \end{aligned} \right\} (52)$$

où les fonctions rationnelles périodiques P_0, P_1 sont définies par la récurrence

$$P_{n+1} + P_{n-1} + X\delta_{n0} = x_n P_n \quad -6 \leq n \leq +6$$

avec

$$P_6 = P_{-6} = 0, \quad P_5 = P_{-5} = 1. \quad (53)$$

De (52) et (42) on déduit

$$\tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) / g(\omega) = \frac{P_1(\omega) + \eta^{-1}}{P_0(\omega)} \equiv \frac{P_0\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}{P_1(\omega) + \eta(\omega)}$$

$$g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) / \tilde{g}(\omega) = \frac{P_1(\omega) + \eta}{P_0(\omega)} \equiv \frac{P_0\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}{P_1(\omega) + \eta^{-1}}. \quad (54)$$

On en déduit aussi que le produit $g(\omega) \tilde{g}(\omega)$, qui est uniforme et méromorphe dans le plan ω , est proportionnel à $P_0(\omega)$, à un facteur $\pi/3$ -périodique près. Calculant explicitement P_0 à partir de (53), on obtient

$$P_0(\omega) = \frac{R(\omega)}{\cos^2 3\gamma - \cos^2 3\omega} \quad (55)$$

avec

$$R(\omega) = 2(\cos \omega - \cos \gamma) \times (8 \cos^3 \omega - 9 \cos \omega - 3 \cos \gamma). \quad (56)$$

Comme g n'est défini pour l'instant qu'à un facteur méromorphe $\pi/3$ -périodique près, nous posons

$$g(\omega) \tilde{g}(\omega) = R(\omega) C(\omega) \quad (57)$$

avec C méromorphe ;

$$C(\omega) = C\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right).$$

Introduisons le quotient

$$E(\omega) = g(\omega) / \tilde{g}(\omega). \quad (58)$$

E est méromorphe sur l'un et l'autre feuillet et vérifie en vertu de (54) et (58) les seules relations

$$E(\omega) \tilde{E}(\omega) = 1 \Leftrightarrow E(\omega) E(\tilde{\omega}) = 1, \quad \omega \in C_n \quad (59)$$

$$E(\omega) E\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{P_1(\omega) + \eta(\omega)}{P_1(\omega) + \eta^{-1}(\omega)} \equiv h(\omega) \quad (60)$$

$$h(\omega) = \frac{A(\omega) - \xi \sqrt{\Delta(\omega)}}{A(\omega) + \xi \sqrt{\Delta(\omega)}}. \quad (61)$$

Le calcul explicite nous donne

$$A(\omega) \equiv \cos \omega (8 \cos^3 \omega - 9 \cos \omega - 3 \cos \gamma) + \sqrt{3} \sin \omega (\cos \omega - \cos \gamma) (8 \cos^2 \omega - 3)$$

$$\xi = \sqrt{6 - 4 \cos^2 \gamma} = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4 \cos^2 \gamma} \quad (63)$$

avec les propriétés, pénibles à vérifier directement, mais découlant de celles des P_n :

$$A(-\omega) \equiv A\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \quad (64)$$

$$A^2(\omega) - \xi^2 \Delta(\omega) \equiv R(\omega) R\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right). \quad (65)$$

Avec la normalisation définie par (57) on a

$$g(\omega) g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = (A(\omega) - \xi \sqrt{\Delta(\omega)}) C(\omega) \quad (66)$$

qui, à l'aide de (64), permet de vérifier tout de suite la récurrence (51).

Nous aurons donc la solution générale de notre équation aux différences si nous savons construire la solution générale des relations (59), (60).

Définissons la fonction $e(\omega)$

$$e(\omega) = \frac{h(\omega) h\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{h\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) h\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right)} \quad (67)$$

c'est-à-dire, d'après (61)

$$e(\omega) = \frac{A_0 - \xi \sqrt{\Delta}}{A_0 + \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_1 - \xi \sqrt{\Delta}}{A_1 + \xi \sqrt{\Delta}} \times \frac{A_{-1} + \xi \sqrt{\Delta}}{A_{-1} - \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_{-2} + \xi \sqrt{\Delta}}{A_{-2} - \xi \sqrt{\Delta}} \quad (68)$$

avec la notation $A_n = A(\omega_n)$.

On déduit de (67) et (68) les relations

$$\left. \begin{aligned} e(\omega) e(\omega_1) &= \frac{h^3(\omega)}{h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2})} \\ e(\omega) \tilde{e}(\omega) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Supposons qu'on sache construire la solution de l'équation fonctionnelle

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\omega) \varphi(\omega_1) &= h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2}) \\ \varphi(\omega) \tilde{\varphi}(\omega) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

toute la difficulté consiste à trouver une de ces fonctions φ pour laquelle la fonction $(e\varphi)^{1/3}$ soit uniforme et méromorphe sur l'un et l'autre feuillet. Si l'on appelle $E_0(\omega)$ une solution méromorphe des relations

$$\left. \begin{aligned} E_0(\omega) \tilde{E}_0(\omega) &= 1 \\ E_0(\omega) E_0(\omega_1) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

la solution cherchée pour E s'écrira

$$E(\omega) = E_0(\omega) (e(\omega) \varphi(\omega))^{1/3}. \quad (72)$$

La section suivante est consacrée à la construction de la fonction $\varphi(\omega)$ telle que φ et E soient méromorphes sur la surface constituée des deux feuillets, définie par la dissection $C_n, n \in \mathbb{Z}$.

Pour des fonctions comme E_0 qui est $2\pi/3$ -périodique, ou comme $e(\omega)$ qui est 2π -périodique, méromorphe signifie méromorphe sur la surface de Riemann de la courbe algébrique $(e^{3i\omega}, \sqrt{A})$ dans le premier cas, ou de la courbe $(e^{i\omega}, \sqrt{A})$ dans le second. Mais pour des fonctions comme φ ou E qui n'ont pas de période, il faudrait introduire la surface de Riemann de la courbe transcendante (ω, \sqrt{A}) pour parler de fonctions méromorphes. Nous dirons plus simplement méromorphe et uniforme sur les deux feuillets, le point à l'infini étant exclu. Nous appellerons \hat{S} cette surface privée des points images de $\omega = \infty$.

Nous verrons plus loin que l'uniformisation elliptique de la courbe $(e^{3i\omega}, \sqrt{A})$ peut être introduite avantageusement pour résoudre les équations du genre (71) et sera utile pour le calcul numérique final. En ce cas les fonctions uniformes et méromorphes sur \hat{S} s'expriment à l'aide des fonctions θ . Si l'on inclut le point à l'infini, les fonctions méromorphes sur \hat{S} sont tout simplement les fonctions rationnelles des deux variables $e^{3i\omega}$ et \sqrt{A} .

3. Factorisation de φ . — Puisque nous avons à construire une fonction φ telle que $(e\varphi)^{1/3}$ soit uniforme, il est nécessaire de contrôler les pôles et zéros des diverses fonctions e, φ , et même de connaître exactement leur multiplicité. Commençons par h définie par (61); il suffit de se placer dans le premier feuillet. En vertu de (65), il existe dans une bande de largeur 2π , 16 zéros ou pôles de h qui sont les 8 racines de $R(\omega)$ et les 8 racines de $R\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)$. D'après (56), on a à résoudre une équation du troisième degré en $\cos \omega$. Si l'on pose

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos 3\delta \quad (73)$$

les racines de R sont

$$\cos \omega = \cos \gamma, \quad (74)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \delta, \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \left(\delta \pm \frac{2\pi}{3} \right).$$

Si l'on se restreint légitimement d'après (34) à l'intervalle de variation

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{3},$$

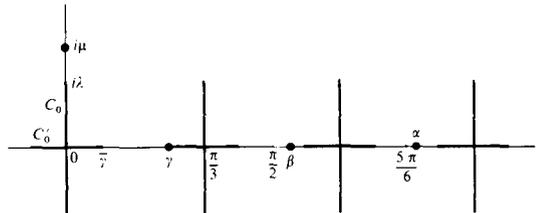
on constate que trois racines sont associées à des angles réels, soient γ, β, α , et la quatrième est associée à un angle imaginaire pur, soit $i\mu$. On a donc

$$R(\omega) \equiv 16(\cos \omega - \cos \gamma) (\cos \omega - \cos \beta) \times (\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cosh \mu). \quad (75)$$

La localisation peut être précisée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mu > \lambda, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \gamma_1, \\ \frac{5\pi}{6} < \alpha < \gamma_2 \end{aligned} \quad (76)$$

illustrée par la figure ci-dessous :



On vérifie aisément sur la définition (62) de $A(\omega)$ les inégalités

$$\begin{aligned} A(\alpha) < 0, \quad A(\beta) > 0, \quad A(\gamma) < 0, \\ \frac{1}{i} A(i\mu) > 0. \end{aligned} \quad (77)$$

On en déduit que dans le premier feuillet $h(\omega)$ a pour zéros

$$-\gamma, \quad \gamma - \frac{\pi}{3}, \quad \pm i\mu, \quad \pm i\mu - \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \quad (78)$$

et pour pôles

$$\begin{aligned} \gamma, \quad -\gamma - \frac{\pi}{3}, \quad \pm \alpha, \quad \pm \beta, \\ \pm \alpha - \frac{\pi}{3}, \quad \pm \beta - \frac{\pi}{3}. \end{aligned} \quad (79)$$

Pôles et zéros sont échangés dans le second feuillet.

Dans une notation symbolique assez claire nous écrivons

$$h(\omega) \sim \frac{(\cos \omega - \cosh \mu) (\cos \omega_1 - \cosh \mu)}{(\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta) (\cos \omega_1 - \cos \alpha) (\cos \omega_1 - \cos \beta)} \times \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\omega - \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \gamma)}, \quad (80)$$

ce qui signifie que $h(\omega)$ a les mêmes zéros et pôles que le second membre dans le premier feuillet uniquement. Passons maintenant à l'étude du second membre de la relation (70) pour φ . Le produit $h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2})$ est $2\pi/3$ -périodique et doit s'exprimer rationnellement en fonction de $\sqrt{\Delta}$, $\cos 3\omega$, $\sin 3\omega$.

Dans ce but, remarquons l'identité suivante qui résulte directement de (54) ou (65) et de la relation

$$g(\omega + 2\pi) = \eta^{-1} g(\omega) :$$

$$\frac{A_1 + \xi \sqrt{\Delta}}{A_0 - \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_3 + \xi \sqrt{\Delta}}{A_2 - \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_5 + \xi \sqrt{\Delta}}{A_4 - \xi \sqrt{\Delta}} \equiv \frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta_0}}{\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_0}}. \quad (81)$$

Si l'on définit $a(\omega)$ par la relation

$$(A_0 - \xi \sqrt{\Delta})(A_2 - \xi \sqrt{\Delta})(A_4 - \xi \sqrt{\Delta}) \equiv (\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_0}) a(\omega). \quad (82)$$

on déduit donc de (81) les propriétés

$$a\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = -a(\omega) = a(-\omega) \quad (83)$$

et les inégalités

$$\sqrt{\Delta(x)} > 0, \quad \sqrt{\Delta(\beta)} < 0, \quad \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} > 0. \quad (88)$$

et l'on peut écrire

$$h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2}) \equiv \eta(\omega) \frac{a(\omega)}{\tilde{a}(\omega)}. \quad (84)$$

Les quotients $\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\mu$ ont les propriétés de méromorphie sur \hat{S} , de périodicité $\pi/3$ et vérifient

$$\eta_\alpha(\omega) \tilde{\eta}_\alpha(\omega) = 1, \quad \eta_\alpha(\omega) = \eta_\alpha(-\omega), \quad \text{etc...} \quad (89)$$

A l'aide de (80) on voit que le premier membre de (84) a les mêmes zéros et pôles dans le premier feuillet que l'expression

$$\eta(\omega) \frac{\cos 6\omega - \cosh 6\mu}{(\cos 6\omega - \cos 6\alpha) (\cos 6\omega - \cos 6\beta)} \quad (85)$$

On vérifie sur la définition que, dans le premier feuillet $\eta_\alpha(\omega)$ est sans zéro et a les pôles de

$$(\cos 6\omega - \cos 6\alpha)^{-1}.$$

et, dans le second feuillet que

$$\tilde{\eta}(\omega) \frac{(\cos 6\omega - \cos 6\alpha) (\cos 6\omega - \cos 6\beta)}{(\cos 6\omega - \cosh 6\mu)}.$$

Idem pour η_β . Par contre $\eta_\mu(\omega)$ a les seuls zéros de $(\cos 6\omega - \cosh 6\mu)$. Pôles et zéros s'échangent dans le second feuillet.

Nous obtiendrons donc la solution de (70) en cherchant quatre fonctions, φ_α, \dots méromorphes sur \hat{S} , solutions des équations

$$\varphi_\alpha(\omega) \varphi_\alpha(\omega_1) = \eta_\alpha(\omega), \quad \varphi_\alpha(\omega) \tilde{\varphi}_\alpha(\omega) = 1. \quad (90)$$

On en déduit la factorisation suivante

$$\frac{a(\omega)}{\tilde{a}(\omega)} \equiv \eta_\alpha(\omega) \eta_\beta(\omega) \eta_\mu(\omega), \quad (86)$$

Idem pour $\varphi_\beta, \varphi_\mu$; la quatrième pour φ_0 est analogue

$$\varphi_0(\omega) \varphi_0(\omega_1) = \eta(\omega), \quad \varphi_0(\omega) \tilde{\varphi}_0(\omega) = 1. \quad (91)$$

avec les définitions

$$\left. \begin{aligned} \eta_\alpha(\omega) &= \frac{\sin 3\alpha \sqrt{\Delta(\omega)} + \sin 3\omega \sqrt{\Delta(\alpha)}}{\sin 3\alpha \sqrt{\Delta(\omega)} - \sin 3\omega \sqrt{\Delta(\alpha)}} \\ \eta_\mu(\omega) &= \frac{\sinh 3\mu \sqrt{\Delta(\omega)} - \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} \sin 3\omega}{\sinh 3\mu \sqrt{\Delta(\omega)} + \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} \sin 3\omega} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

La solution générale de (70) est alors

$$\varphi(\omega) = a_0(\omega) \varphi_0(\omega) \varphi_\alpha(\omega) \varphi_\beta(\omega) \varphi_\mu(\omega) \quad (92)$$

avec $a_0(\omega)$ méromorphe sur \hat{S} et vérifiant

$$a_0(\omega) a_0(\omega_1) = 1, \quad a_0(\omega) \tilde{a}_0(\omega) = 1. \quad (93)$$

4. **Uniformité de E sur \hat{S} .** — D'après (72) il nous faut construire une fonction E méromorphe sur \hat{S} et, par conséquent uniforme, c'est-à-dire que les zéros et les pôles du produit $e(\omega) \varphi(\omega)$ doivent être

triples sur l'un et l'autre feuillet. A l'aide de la définition (67) et du résultat (80), on voit que $e(\omega)$ a dans le premier feuillet les pôles et les zéros de l'expression rationnelle :

$$\left(\frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha)(\cos \omega - \cos \beta)} \right)^3 \cdot \frac{(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)(\cos 3 \omega - \cos 3 \beta)}{(\cos 3 \omega - \cosh 3 \mu)} \times \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_{-1} + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\omega_{-1} - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \gamma)} \right)^2 \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_{-2} - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_{-2} + \gamma)} \quad (94)$$

Donc, en ce qui concerne les pôles ou zéros en $\pm \alpha$, $\pm \beta$, $\pm i\mu$, le problème de la multiplicité triple sera résolu, si nous construisons φ_α , solution de (90), de sorte que φ_α ait dans le premier feuillet les seuls pôles de $(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)^{-1}$ et dans le second feuillet les seuls zéros de $(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)$; de même

$$\varphi_\beta \sim (\cos 3 \omega - \cos 3 \beta)^{-1},$$

$$\varphi_\mu \sim (\cos 3 \omega - \cosh 3 \mu).$$

Puisque les η_α ont la période $\pi/3$, il résulte de (90) que $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\mu$, ont la période $2\pi/3$. Pour résoudre (90) une méthode très valable consisterait à uniformiser la courbe $(e^{3i\omega}, \sqrt{\Delta})$. Mais comme cette uniformisation ne semble pas pouvoir être utilisée d'un bout à l'autre de ce problème, il est plus cohérent et aussi simple à ce point de donner une représentation de φ_α dans la variable ω . Une méthode très générale consiste à introduire l'intégrale de troisième espèce [7]

$$F_b(\omega) = \int_{\pi/6}^b \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \frac{6 \sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \quad (95)$$

On montre aisément que la fonction

$$\phi_b(\omega) = \exp \{ \sqrt{\Delta(\omega)} F_b(\omega) \} \quad (96)$$

est méromorphe sur \hat{S} . Analysant les parties singulières de $F_b(\omega)$, on déduit que

$$\phi_b(\omega) \sim \frac{\cos 3 \omega + \cos 3 b}{\cos 3 \omega - \cos 3 b} \quad (97)$$

On a les propriétés :

$$\phi_b(\omega) = \phi_b(-\omega) = \phi_b\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (98)$$

$$\phi_b(\omega) \phi_b(\omega_1) = 1, \quad \phi_b(\omega) \tilde{\phi}_b(\omega) = 1.$$

Nous avons obtenu les solutions suivantes dont on vérifie facilement qu'elles satisfont les relations (90)

$$\varphi_\alpha(\omega) = \frac{1}{i} \frac{\sin 3 \alpha \sqrt{\Delta} + \sin 3 \omega \sqrt{\Delta(\alpha)}}{\sinh 3 \lambda \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \alpha}} \cdot \exp \left\{ 3 \sqrt{\Delta} \int_{5\pi/6}^{\alpha} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \right\}$$

$$\varphi_\beta(\omega) = \frac{1}{i} \frac{\sin 3 \beta \sqrt{\Delta} + \sin 3 \omega \sqrt{\Delta(\beta)}}{\sinh 3 \lambda \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \beta}} \cdot \exp \left\{ 3 \sqrt{\Delta} \int_{\pi/2}^{\beta} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \right\} \quad (99)$$

$$\varphi_\mu(\omega) = \frac{\sinh 3 \mu \sqrt{\Delta} - \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} \sin 3 \omega}{\sinh 3 \lambda \sqrt{\cosh^2 3 \mu - \cos^2 3 \omega}} \cdot \exp \left\{ -3 \sqrt{\Delta} \int_{i\lambda}^{i\mu} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \right\}.$$

Ces trois fonctions sont des solutions particulières de (90) dont l'arbitraire est essentiellement celui de la borne inférieure des intégrales. Notre principe pour les choisir est de construire des fonctions uniformes au voisinage de l'infini puisqu'il sera néces-

saire de connaître leur comportement asymptotique, et en second lieu de définir les radicaux en coupant le plan de façon à conserver la connexité du domaine où la fonction est monovaluée.

C'est pourquoi les deux radicaux

$$(\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \alpha)^{1/2} \text{ et } (\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \beta)^{1/2}$$

seront définis comme fonctions paires de période $\pi/3$, de sorte que φ_α et φ_β soient impaires. Par contre $(\cosh^2 3 \mu - \cos^2 3 \omega)^{1/2}$ sera choisi impaire, de sorte que φ_μ soit paire. Les branches seront ainsi définies :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \alpha} \Big|_{\omega=i\lambda} &= \sqrt{\Delta(\alpha)} > 0 \\ \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \beta} \Big|_{\omega=i\lambda} &= \sqrt{\Delta(\beta)} < 0 \\ \sqrt{\cosh^2 3 \mu - \cos^2 3 \omega} \Big|_{\omega=i\lambda} &= \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

de sorte que l'on ait la normalisation

$$\varphi_\alpha(i\lambda) = \varphi_\beta(i\lambda) = \varphi_\mu(i\lambda) = 1. \quad (101)$$

Reste à construire φ_0 , méromorphe sur \dot{S} et vérifiant (91). A cette fin on remarque que la fonction $\log \eta(\omega)$ est uniforme dans le plan disséqué par le système de coupures en croix $C_n \cup C'_n$

$$\left. \begin{aligned} C'_n : \left[\gamma + (n-1)\frac{\pi}{3}, -\gamma + (n+1)\frac{\pi}{3} \right] \\ C_n : \left[-i\lambda + n\frac{\pi}{3}, i\lambda + n\frac{\pi}{3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

avec les propriétés

$$\log \eta(\omega_1) = -\log \eta(\omega) = \log \eta(-\omega). \quad (103)$$

On vérifie tout de suite que la fonction ci-dessous est solution de l'équation récurrente (91) si $G(\omega)$ est $\pi/3$ -périodique

$$\varphi_0(\omega) = \exp \left\{ -\frac{3\omega}{\pi} \log \eta(\omega) - 6\sqrt{\Delta(\omega)} G(\omega) \right\}. \quad (104)$$

Pour déterminer G de sorte que φ_0 soit uniforme sur \dot{S} et vérifie l'involution (91), on trouve

$$G(\omega) = \frac{3}{\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{i\lambda} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \frac{\sin 6\omega}{\cos 6\omega' - \cos 6\omega}. \quad (105)$$

Dans (105) le contour va de $\bar{\gamma} = \frac{\pi}{3} - \gamma$ à $i\lambda$ en longeant les coupures C_0 et C'_0 dans le premier quadrant. Le contour peut être déformé à condition de ne pas croiser le pôle de l'intégrant. G est impaire de sorte que φ_0 est paire. On vérifie à l'aide d'un résultat classique [8] (Mushhelishvili) sur les valeurs limites d'intégrales singulières

$$\varphi_0(i\lambda) = 1. \quad (106)$$

On déduit de (101) et (106)

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\mu \varphi_0(i\lambda) = 1. \quad (107)$$

Quelles sont les multiplicités des pôles et zéros de la fonction φ ainsi construite ?

D'après le choix (99), en ce qui concerne les pôles et zéros d'affixe $\pm \alpha, \pm \beta, \pm i\mu$, nous avons

$$\frac{\varphi(\omega)}{a_0(\omega)} \sim \frac{\cos 3\omega - \cosh 3\mu}{(\cos 3\omega - \cos 3\alpha)(\cos 3\omega - \cos 3\beta)} \dots \quad (108)$$

et, par conséquent si $\log a_0$ est holomorphe en ces points, nous aurons d'après (94)

$$e^{(\omega)} \varphi(\omega) \sim \left(\frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha)(\cos \omega - \cos \beta)} \right)^3 \dots \quad (109)$$

de multiplicité triple.

Reste à examiner les points d'affixe $\pm \gamma_n$, où pôles et zéros de φ proviennent de φ_0 et éventuellement de a_0 , encore indéterminé.

En ce qui concerne φ_0 , il suffit de calculer les parties singulières de $\log \varphi_0$ d'après (104) et (105). Dans une notation un peu rapide mais suffisamment claire, nous écrivons

$$\left. \begin{aligned} \text{sing} \left[\frac{3\omega}{\pi} \log \eta(\omega) \right] &= \\ &= \frac{3}{\pi} \sum_{-\alpha}^{+\alpha} (-)^{n-1} \gamma_n \log(\omega^2 - \gamma_n^2) \\ \text{sing} [6\sqrt{\Delta} G(\omega)] &= \\ &= \frac{3}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \gamma \right) \sum_{-\alpha}^{+\alpha} (-)^{n-1} \log(\omega^2 - \gamma_n^2) \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Les pôles et les zéros de φ_0 dans le plan disséqué sont donc ceux du produit formel

$$\varphi_0(\omega) \sim \prod_n (\omega^2 - \gamma_n^2)^{(-)^{n(n+1)}}. \quad (111)$$

Choisissons la fonction $a_0(\omega)$ encore indéterminée de sorte que

$$a_0(\omega) \sim \frac{\cos 3\omega + \cos 3\gamma}{\cos 3\omega - \cos 3\gamma} \sim \prod_n (\omega^2 - \gamma_n^2)^{(-)^{n-1}}. \quad (112)$$

D'après (95)-(97) il suffit de prendre

$$a_0(\omega) = \exp \sqrt{\Delta} \int_{\pi/6}^{\gamma} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{6 \sin 6\omega}{\cos 6\omega' - \cos 6\omega}. \quad (113)$$

pour que a_0 soit paire, méromorphe sur \dot{S} et vérifiant (93).

Dans ces conditions, d'après (111) et (112) nous avons

$$a_0(\omega) \varphi_0(\omega) \sim \prod_n (\omega^2 - \gamma_n^2)^{(-)^n} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (114)$$

Montrons que les pôles et zéros du produit $e(\omega) \varphi(\omega)$ ont tous une multiplicité triple.

Du fait de (109) il suffit de considérer les points $\pm \gamma_n$ auxquels on restreindra l'équivalence \sim : de (94) on déduit

$$e(\omega) \sim \prod_{n=6m} \frac{\omega^2 - \gamma_{n+2}^2}{\omega^2 - \gamma_{n-2}^2} \cdot \left(\frac{\omega^2 - \gamma_{n-1}^2}{\omega^2 - \gamma_{n+1}^2} \right)^2 \quad (115)$$

et de (114)

$$a_0 \varphi_0 \sim \frac{\omega^2 - \gamma_{-1}^2}{\omega^2 - \gamma_1^2} \left(\frac{\omega^2 - \gamma_2^2}{\omega^2 - \gamma_{-2}^2} \right)^2 \left(\frac{\omega^2 - \gamma_{-3}^2}{\omega^2 - \gamma_3^2} \right)^3 \dots \quad (116)$$

et par conséquent

$$(ea_0 \varphi_0)^{1/3} \sim \frac{\omega^2 - \gamma_{-1}^2}{\omega^2 - \gamma_1^2} \cdot \frac{\omega^2 - \gamma_2^2}{\omega^2 - \gamma_{-2}^2} \cdot \dots \cdot \frac{\omega^2 - \gamma_{-5}^2}{\omega^2 - \gamma_5^2} \cdot \frac{(\omega^2 - \gamma_6^2)^2}{(\omega^2 - \gamma_{-6}^2)^2} \cdot \dots \quad (117)$$

Il existe donc une fonction

$$(ea_0 \varphi_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\mu)^{1/3}$$

qui est paire, uniforme et méromorphe sur \hat{S} et vérifiant les relations (59)-(60). En vertu de (107) et (113) on choisit la branche de la racine cubique de sorte que l'on ait

$$(e\varphi)^{1/3} |_{\omega=i\lambda} = 1. \quad (118)$$

Par construction les seuls pôles et zéros de $(e\varphi)^{1/3}$ sont, dans le premier feuillet, ceux du produit formel (117) auxquels il faut ajouter, d'après (109) ceux de

$$\frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta)}$$

5. Méromorphie et croissance de $f(\omega)$. — La construction de la fonction $E(\omega)$ conduisant à une fonction $f(\omega)$ méromorphe n'est pas encore achevée. D'après (57) et (58) nous avons

$$g(\omega) = \sqrt{C(\omega) R(\omega) E(\omega)}, \quad (119)$$

dont le prolongement dans le second feuillet définit

$$\tilde{g}(\omega) = \sqrt{C(\omega) R(\omega) E(\omega)}, \quad (120)$$

avec la branche convenable du radical.

Pour que g soit méromorphe sur \hat{S} , il est nécessaire que tous les pôles et zéros des fonctions CRE et CR/E soient de multiplicité paire. Supposons que C n'ait ni pôle ni zéro sur \hat{S} , sauf peut-être aux points de ramification

$$\pm i\lambda + n \frac{\pi}{3}.$$

Montrons que le choix

$$E(\omega) = E_0(\omega) \frac{1}{a_0(\omega)} (e(\omega) \varphi(\omega))^{1/3} \quad (121)$$

où E_0 sans zéro ni pôle sur \hat{S} vérifie (59), entraîne que $f(\omega)$ soit uniforme dans tout le plan.

Examinons d'abord l'uniformité de g (et \tilde{g}) aux points $\pm \alpha, \pm \beta, \pm i\mu \pmod{2\pi}$.

Nous avons montré l'équivalence (dans le premier feuillet)

$$E(\omega) \sim \frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta)}. \quad (122)$$

Or nous avons

$$R(\omega) \equiv 16(\cos \omega - \cos \gamma) (\cos \omega - \cos \alpha) \times (\cos \omega - \cos \beta) (\cos \omega - \cosh \mu).$$

On en déduit l'uniformité de g et \tilde{g} dans les voisinages en question, et

$$g(\omega) \sim (\cos \omega - \cosh \mu), \quad \tilde{g}(\omega) \sim (\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta). \quad (123)$$

Examinons maintenant les points $\pm \gamma_n$.

D'après (112) nous avons dans le premier feuillet

$$\frac{1}{a_0(\omega)} \sim \frac{\cos 3\omega - \cos 3\gamma}{\cos 3\omega + \cos 3\gamma} \sim (\omega^2 - \gamma^2) \frac{\omega^2 - \gamma_{-1}^2}{\omega^2 - \gamma_1^2} \cdot \frac{\omega^2 - \gamma_2^2}{\omega^2 - \gamma_{-2}^2} \cdot \dots \quad (124)$$

et par conséquent, d'après (114)-(117)

$$\frac{(e\varphi)^{1/3}}{a_0} \sim (\omega^2 - \gamma^2) \times \frac{(\omega^2 - \gamma_2^2)^2 (\omega^2 - \gamma_4^2)^2 (\omega^2 - \gamma_6^2)^3 (\omega^2 - \gamma_8^2)^4 \dots}{(\omega^2 - \gamma_1^2)^2 (\omega^2 - \gamma_3^2)^2 (\omega^2 - \gamma_5^2)^2 (\omega^2 - \gamma_7^2)^4 \dots} \quad (125)$$

où l'on aura noté la multiplicité impaire des zéros en $\pm \gamma, \pm \gamma_6, \pm \gamma_{12}, \dots$

Il résulte de (125) que les deux fonctions $(\cos \omega - \cos \gamma) E$ et $(\cos \omega - \cos \gamma)/E$ ont tous leurs zéros et pôles d'affixes $\pm \gamma_n$ de multiplicité paire.

Précisons : dans le premier feuillet, les zéros de $g(\omega)$ sont :

$$\gamma, \gamma_2, \gamma_4 \quad \text{simples ;}$$

$$\gamma_6, \gamma_8, \gamma_{10} \quad \text{doubles ; etc...}$$

et les pôles :

$$\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5 \quad \text{simples ;}$$

$$\gamma_7, \gamma_9, \gamma_{11} \quad \text{doubles ; etc...} \quad (126)$$

De même pour \tilde{g} , les zéros simples sont $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$ et les pôles simples $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6$. ($g(\omega)$ étant paire on n'a donné que les abscisses positives.)

Nous pouvons donc conclure à l'uniformité de g et \tilde{g} sur \hat{S} , et par conséquent à la méromorphie de f dans le plan ω , à la condition que le produit $\sqrt{CE_0}$ soit uniforme sur \hat{S} .

Nous pouvons aussi conclure de (126)-(127) qu'il est suffisant que C et E_0 soient sans zéro ni pôle sur \hat{S} , sauf peut-être sur les points de branchements, pour que $f \equiv g + \tilde{g}$ ait les propriétés d'holomorphic exigées section 2 en (31) et (35), sauf peut-être aux points

$$\pm i\lambda + n \frac{\pi}{3}$$

que nous nous réservons d'examiner plus loin.

Le mécanisme de construction d'une fonction E vérifiant (59) sur \hat{S} est clair. Toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann peut toujours être décomposée en facteurs élémentaires du type $\phi_b(\omega)$ -(96), les pôles et zéros étant arbitraires. Il est évident qu'on peut toujours trouver dans notre cas un polynôme trigonométrique $C(\omega)$ de période $\pi/3$, s'annulant aux pôles de E et de E^{-1} avec une multiplicité convenable pour que f soit holomorphe dans une région finie quelconque, mais ceci se paye sur la croissance de f . C'est pourquoi seule la considération des propriétés de croissance des diverses fonctions E, R, C achèvera de déterminer f .

5.1 CROISSANCE DE f . — Même ignorant la forme exacte de E_0 encore indéterminée, celle-ci sera du type $\phi_b(\omega)$ comme les autres facteurs qui entrent dans E . Le type de croissance de E est simple à déterminer; les intégrales du type $F_b(\omega)$ qui entrent dans la définition des φ sont holomorphes à l'infini dans chaque demi-plan. Pour $\Im \omega = +\infty$, on a

$$\sqrt{A} \propto \frac{i}{2} e^{-3i\omega} \quad F_b(\omega) = O(1) \quad (127)$$

et par conséquent en général

$$E(\omega) \propto \exp \{ \text{Cte} \cdot e^{3\Im \omega} \}. \quad (128)$$

La fonction f doit tendre vers zéro à l'infini; or, $C(\omega)$, uniforme et méromorphe dans le plan ω , ne peut compenser une telle croissance. Il est donc nécessaire que la constante figurant dans (128) soit nulle. Si l'on examine le terme dominant suivant, on constate que, les fonctions du type $F_b(\omega)$ étant $\pi/3$ -périodique, la contribution qu'elles fournissent en exponentielle est $O(e^{3i\omega})$. En fait les termes dominants proviennent des facteurs $e(\omega)$ et $\varphi_0(\omega)$:

$$e(\omega) = \exp \{ O(e^{i\omega}) \}, \quad \varphi_0(\omega) \Rightarrow \exp \{ O(\omega e^{3i\omega}) \}. \quad (129)$$

Du fait de la relation

$$E(\omega) E(\omega_1) = h(\omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} h(\omega) = 1, \quad (130)$$

la constante figurant dans (128) étant choisie nulle, on a les deux possibilités :

$$a) \lim E(\omega) = +1; \quad b) \lim E(\omega) = -1. \quad (131)$$

Dans le premier cas, on aurait

$$f(\omega) = \sqrt{C(\omega)} O(e^{-2i\omega}) \text{ puisque } R(\omega) = O(e^{-4i\omega}); \quad (132)$$

Dans le second cas, on aurait

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{E} = \pm i \quad (133)$$

et, par conséquent, en vertu de (129), le comportement de

$$\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}$$

serait dominé par celui de

$$i\sqrt{e} + \frac{1}{i\sqrt{e}},$$

c'est-à-dire $O(e^{i\omega})$

$$\Rightarrow f(\omega) = \sqrt{C(\omega)} O(e^{-3i\omega}). \quad (134)$$

On voit donc qu'il est nécessaire que $C(\omega)$ décroisse au moins comme $e^{6i\omega}$ pour $\Im \omega = +\infty$. Dans l'hypothèse a), on aurait $f \propto e^{i\omega}$, ce qui est compatible avec l'équation récurrente (29) pour $\omega = \infty$; dans l'hypothèse b), il faudrait avoir au moins $C = O(e^{12i\omega})$ pour que f s'annule à l'infini et le comportement asymptotique ne serait pas compatible avec (29). Nous sommes donc dans le premier cas

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E = 1. \quad (135)$$

La fonction méromorphe C décroissant comme $e^{6i\omega}$, de période $\pi/3$ est nécessairement de la forme

$$C(\omega) = \frac{1}{\cos^2 3\omega_0 - \cos^2 3\omega}. \quad (136)$$

Or l'étude précédente a montré que f avait les propriétés d'holomorphic voulues si C était sans pôles, sauf peut-être aux points

$$\pm i\lambda + n \frac{\pi}{3}.$$

Mais pour que f soit régulier en ces points, il faut que

$$\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}$$

s'y annule. C'est précisément ce qui se passe si nous choisissons

$$E_0(i\lambda) = -1. \quad (137)$$

En effet, d'après (107), $\varphi(i\lambda) = 1$; et, d'après la définition de e et de a_0

$$e(i\lambda) = a_0(i\lambda) = 1,$$

de sorte que, d'après (118), (121) et (137) on a

$$E(i\lambda) = -1. \tag{138}$$

et, puisque $h = 1$, pour

$$\omega = \pm i\lambda + \frac{n\pi}{3},$$

on conclut :

$$E\left(\pm i\lambda + n\frac{\pi}{3}\right) = -1. \tag{139}$$

La somme

$$\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}$$

est donc divisible par Δ . Nous choisissons donc $\omega_0 = i\lambda$, ou $C(\omega) = 1/\Delta$, ce qui entraîne

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{R(\omega)}{\Delta(\omega)}} \left(\sqrt{E(\omega)} + \frac{1}{\sqrt{E(\omega)}} \right). \tag{140}$$

La branche du radical est choisie de sorte que $\sqrt{E(i\lambda)} = i$, \sqrt{E} étant une fonction impaire réelle, \sqrt{R} étant paire.

La fonction f ainsi construite est uniforme dans tout le plan, et holomorphe dans $\Im m \omega \neq 0$, à condition de choisir E_0 sans zéro ni pôle sur \dot{S} et vérifiant la condition (137).

6. L'équation pour les valeurs propres. — La solution (121) pour $E(\omega)$ est déterminée à une fonction $E_0(\omega)$ près sans zéro ni pôle, uniforme sur \dot{S} et possédant les propriétés (71). Mais nous avons oublié que la fonction $a_0(\omega)$ donnée par l'expression (113) n'est qu'une solution particulière et n'est donc déterminée qu'à un facteur près du type E_0 . C'est donc la fonction E_0^3 qui doit être uniforme sur \dot{S} .

L'uniformisation elliptique sera très commode pour exprimer l'uniformité de E_0^3 sur \dot{S} ; comme elle sera utile pour le calcul numérique de γ , nous y consacrons un paragraphe rapide.

Nous savons que $\log E_0$ est holomorphe sur \dot{S} et, en utilisant la méthode des sections précédentes, on constate aisément que la fonction

$$E_0(\omega) = -\exp \times \left\{ s \sqrt{\Delta(\omega)} \int_0^{\pi/6} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \frac{\sin 6\omega}{\cos 6\omega' - \cos 6\omega} \right\} \tag{141}$$

a toutes les propriétés exigées, sauf peut-être l'uniformité à l'infini. La quantité s sera justement déterminée par la condition que E_0^3 soit uniforme sur \dot{S} .

6.1 UNIFORMISATION ELLIPTIQUE. — Il s'agit d'uniformiser des fonctions de période $2\pi/3$ en ω , méromorphes sur \dot{S} . Si elles étaient méromorphes sur S , ce serait des fonctions rationnelles en $e^{3i\omega}$ et $\sqrt{\Delta}$. Le plan étant disséqué comme décrit section 2, on se convaincra que la correspondance $\omega \rightarrow u$ définie dans les notations de Jacobi par la relation

$$e^{3i\omega} = c^{-3\lambda} \operatorname{sn} \left(K + i\frac{K'}{2} - u; k \right), \quad \sqrt{k} = e^{-3\lambda} \tag{142}$$

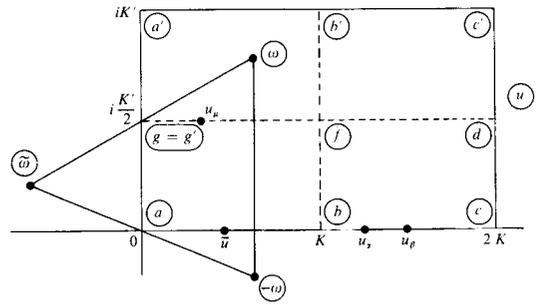
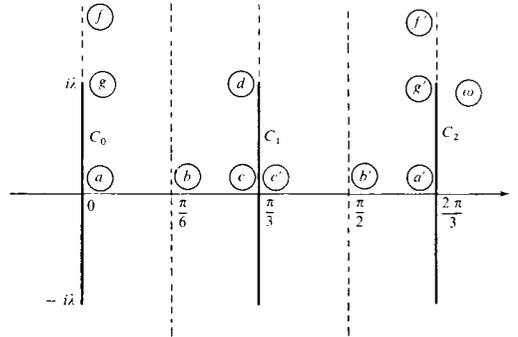
réalise la transformation conforme de la bande

$$\Im m \omega \geq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \omega < \frac{2\pi}{3},$$

coupée par C_0, C_1, C_2 , dans le rectangle

$$0 < \operatorname{Re} u < 2K, \quad 0 \leq \Im m u \leq K',$$

comme l'illustre la figure ci-dessous.



On a les formules de transformation sous forme réelle

$$\begin{aligned} \sin 3\omega &= (1-k) \frac{\operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \\ \cos 3\omega &= \frac{cnu \operatorname{dn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \end{aligned} \tag{143}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sinh 3\lambda \frac{1 + k \operatorname{sn}^2 u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \quad \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2}{3} e^{-3\lambda} du.$$

avec le tableau de correspondance entre valeurs remarquables

Compte tenu de (87) et (143) on a

ω	u	ω	u
0	0	$\bar{\gamma}$	\bar{u}
$\frac{\pi}{6}$	K	$\alpha - \frac{2\pi}{3}$	u_α
$\frac{\pi}{3}$	$2K$	$\beta - \frac{\pi}{3}$	u_β
$i\bar{u}$	$i\frac{K'}{2}$	$i\mu$	$-u_\mu + K + i\frac{K'}{2}$
∞	$K + i\frac{K'}{2}$		

(144)

$$\eta_\alpha(u) = \frac{\theta_2\left(\frac{\pi(u - u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(u - u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)} : (u \rightarrow -u) \quad (147)$$

où le paramètre q intervenant dans les fonctions θ est défini par

$$q = e^{-\tau}, \quad \tau = \pi \frac{K'}{K} \quad (148)$$

On déduit de (146) la fonction $\varphi_\alpha(u)$ qui vaut 1 pour $u = i\frac{K'}{2}$:

$$\varphi_\alpha(u) = i \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(u + u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(u - u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)} \times \exp\left[-\frac{\pi}{2K}(u_\alpha - K) \frac{\theta_3'}{\theta_3}\left(\frac{\pi u}{2K}, \sqrt{q}\right)\right] \quad (149)$$

où l'on s'est arrangé pour que les quantités $\bar{u}, u_\alpha, u_\beta, u_\mu$, soient réelles et vérifient les inégalités

$$0 < \bar{u}, \quad u_\mu < K; \quad K < u_{\alpha,\beta} < 2K.$$

Les formules qui permettent leur calcul à partir de γ sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{k} smu_\mu &= e^{-3\mu} \\ \sqrt{k} sn\bar{u} &= \frac{\sqrt{\cosh^2 3\lambda - \cos^2 3\gamma - \sinh 3\lambda}}{|\sin 3\gamma|} \\ \sqrt{k} smu_\alpha &= \frac{\sqrt{\cosh^2 3\lambda - \cos^2 3\alpha - \sinh 3\lambda}}{\sin 3\alpha} \text{ etc...} \end{aligned} \right\} (145)$$

C'est la transformée de la solution $\varphi_\alpha(\omega)$ donnée en (99). On vérifie que $\varphi_\alpha(u)$ est méromorphe en u en dehors des pôles de θ_3'/θ_3 ou zéros de θ_3 , précisément images de $\omega = \infty$. $\varphi_\alpha(u)$ a seulement deux pôles dans le rectangle $[2K, 2iK']$, situés en u_α et $u_\alpha + iK'$, qui correspondent à $\omega = \pm \alpha \pmod{2\pi/3}$ dans le premier feuillet; les zéros $-u_\alpha, -u_\alpha + iK'$ correspondent à $\tilde{\omega} = \pm \alpha$, mais dans le second feuillet. Ceci confirme le résultat de la section 4

On écrira $\varphi(u)$ la transformée d'une fonction $\varphi(\omega)$ analytique sur \hat{S} . Les propriétés d'équivalence ci-dessous seront utiles :

a) $\varphi(\omega)$, uniforme et méromorphe sur \hat{S} , de période $2\pi/3 \Leftrightarrow \varphi(u)$ de périodes $4K$ et $2iK'$, méromorphe dans le plan u en dehors des images de $\omega = \infty$, c'est-à-dire en dehors des points congruents à

$$K + i\frac{K'}{2}.$$

b) $\varphi(\omega)$ paire ou impaire $\Leftrightarrow \varphi(u + iK') = \pm \varphi(u)$.

c) $\varphi(\omega) = \varphi\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(2K + iK' - u)$.

d) Si ω et $\tilde{\omega}$ ont même affixe dans les deux feuillets $u \leftrightarrow \omega, \quad iK' - u \leftrightarrow \tilde{\omega} \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(u) = \varphi(iK' - u)$.

$$\varphi_\alpha(\omega) \sim \frac{1}{\cos 3\omega - \cos 3\alpha}.$$

Revenons à la fonction E_0 donnée par (141). Dans les notations de Whittaker et Watson [10, p. 523], E_0 s'exprime directement à l'aide de l'intégrale de troisième espèce Π

$$\begin{aligned} E_0(u) &= -\exp \frac{s}{3} \left[\Pi\left(K, i\frac{K'}{2} + K - u\right) - \Pi\left(K, i\frac{K'}{2} - K + u\right) \right] \\ &= -\exp \frac{sK}{3} \left[Z\left(K + \frac{iK'}{2} - u\right) + Z\left(K - \frac{iK'}{2} - u\right) \right], \end{aligned}$$

ou encore, après transformation de Landen,

$$(q \rightarrow \sqrt{q}),$$

A titre d'application, les relations (90) pour la fonction impaire $\varphi_\alpha(\omega)$ sont équivalentes aux suivantes

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\alpha(u) \varphi_\alpha(2K - u) &= \eta_\alpha(u) \\ \varphi_\alpha(u) \varphi_\alpha(-u) &= -1. \end{aligned} \right\} (146)$$

$$E_0(u) = -\exp \left\{ \frac{\pi s}{6} \frac{\theta_3'}{\theta_3} \left(\frac{\pi u}{2K}, \sqrt{q} \right) \right\} \quad (150)$$

La fonction $E_0^3(\omega)$ doit être uniforme et paire : en vertu de b) ceci équivaut à

$$E_0^3(u + iK') = E_0^3(u). \tag{151}$$

La propriété fondamentale des fonctions θ

$$\frac{\theta'}{\theta}(z + i\pi\tau, q) - \frac{\theta'}{\theta}(z, q) = -2i,$$

entraîne donc

$$3 \times \frac{\pi s}{6} \times (-2i) = \text{multiple de } 2\pi i. \tag{152}$$

En conclusion le nombre s est un entier pair.

Il nous reste à exprimer la dernière condition sur la croissance de E qui se traduit par l'égalité (135).

Nous avons

$$E = \frac{E_0}{a_0} (a_0 \varphi_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\mu)^{1/3}. \tag{153}$$

Il suffit de se reporter aux expressions (99) pour $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\mu$, (104) et (105) pour φ_0 , (113) pour a_0 et (141) pour E_0 . Au voisinage de $3m\omega = +\infty$ on obtient

$$\log E(\omega) = \frac{1}{2} H e^{-3i\omega} + O(\omega e^{3i\omega}) \tag{154}$$

où la constante H qui doit être annulée est donnée par la somme

$$H = \int_{5\pi/6}^\alpha + \int_{\pi/2}^\beta - \int_{i\lambda}^{i\mu} - 4 \int_{\pi/6}^\gamma + s \int_0^{\pi/6} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta(\omega)}} - \frac{6}{\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{i\lambda} \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\Delta(\omega)}}. \tag{155}$$

L'équation $H = 0$ est une équation réelle pour γ . Si l'on utilise la paramétrisation elliptique définie dans cette section et les notations du tableau (144) on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^\gamma \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} &= \frac{2\sqrt{k}}{3} (K - \bar{u}), \\ s \int_0^{\pi/6} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} &= \frac{2\sqrt{k}}{3} \cdot sK, \\ \int_{5\pi/6}^\alpha + \int_{\pi/2}^\beta &\equiv \int_{\beta - \frac{2\pi}{3}}^{\alpha - \frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} = 2 \frac{\sqrt{k}}{3} (u_\alpha - u_\beta), \\ \int_{i\lambda}^{i\mu} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} &= \int_\lambda^\mu \frac{dv}{\sqrt{\cosh^2 3v - \cosh^2 3\lambda}} = \\ &= \frac{2\sqrt{k}}{3} (K - u_\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{\bar{\gamma}}^{i\lambda} \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\Delta}} = \\ &= \frac{2\sqrt{k}}{9i} \int_{\bar{u}}^{iK'/2} \log \left\{ \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(K + \frac{iK'}{2} - u \right) \right\} du \end{aligned} \tag{156}$$

et à l'aide de développements rapidement convergents

$$\begin{aligned} -\frac{6}{\pi} S_0 &= \frac{2\sqrt{k}}{3} \cdot \frac{2K}{\pi^2} \times \\ &\times \left\{ \bar{x}^2 + \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-)^{m-1} \cos m\bar{x}}{m^2 \cosh m\tau} \right\}. \end{aligned} \tag{157}$$

On a utilisé la notation $\bar{x} = \pi\bar{u}/2K$. On posera aussi

$$x_\alpha = \frac{\pi u_\alpha}{2K}, \quad x_\beta = \frac{\pi u_\beta}{2K}, \quad x_\mu = \frac{\pi u_\mu}{2K}, \tag{158}$$

$$\sigma = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{(-)^{m-1} \cos m\bar{x}}{m^2 \cosh m\tau}. \tag{159}$$

L'équation $H = 0$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} u_\alpha - u_\beta + u_\mu + 4\bar{u} + (s-5)K + \\ + \frac{2K}{\pi^2} \left[\bar{x}^2 + \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} + \pi^2 \sigma \right] = 0 \end{aligned} \tag{160}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} (x_\alpha - x_\beta + x_\mu + 4\bar{x}) + \left(\frac{\bar{x}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 + \\ + \sigma - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} (5-s). \end{aligned} \tag{161}$$

Le calcul numérique du premier membre pour une valeur donnée de γ est relativement simple pour les raisons suivantes :

- a) Les racines α, β, μ , s'obtiennent très simplement à partir de (73) et (74).
- b) Le module $k = e^{-6\lambda}$ (tel que $\cosh 3\lambda = 3 \cos \gamma$) est petit, et donne un paramètre q de l'ordre de 10^{-4} ; il suffit du premier terme de la série σ pour avoir six chiffres exacts.
- c) Le module étant petit, la fonction $\operatorname{sn} u$ de Jacobi est très proche du sinus et les relations (145) pour le calcul des $x_\alpha, x_\beta \dots$ s'inversent rapidement.

Dans l'intervalle de variation

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{3},$$

nous n'avons trouvé qu'une seule solution, correspondant à $s = 2$:

$$\cos \gamma = 0,692\ 122 \dots \tag{162}$$

Le bilan de (161) est $O(10^{-6})$, avec les valeurs numériques suivantes des diverses quantités utiles :

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= 0,692\ 122 & \frac{x_\mu}{\pi} &= 0,257\ 977\ 3 \\ \sinh 3 \lambda &= 1,819\ 696\ 1 & \frac{x_2}{\pi} &= 0,603\ 442\ 2 \\ \sqrt{k} &= 0,256\ 669\ 3 & \frac{x_\beta}{\pi} &= 0,724\ 548\ 4 \\ q &= 0,000\ 271\ 84 & \frac{\bar{x}}{\pi} &= 0,240\ 435\ 3 \\ \tau &= 8,210\ 280 & \sigma &= 0,000\ 040\ 1 \\ \left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 &= 0,426\ 870\ 6 & & \\ \cosh \mu &= 1,161\ 251\ 5 & & \\ \cos \alpha &= -0,917\ 703\ 0 & & \\ \cos \beta &= -0,243\ 548\ 4 & & \end{aligned} \tag{163}$$

Pour la valeur de $\cos \gamma$ donnée par (162), le bilan de (161), c'est-à-dire premier membre moins second membre, est égal à 0,000 001 0. Le calcul des quelques valeurs voisines nécessaires à l'approximation nous donne pour la pente

$$\frac{\partial(H/2K)}{\partial(\cos \gamma)} \sim 5,81$$

ce qui permet de conclure que nous avons $\cos \gamma$ avec 6 chiffres exacts.

L'énergie de liaison B définie section 1 est telle que

$$2B = (2 \cos^2 \gamma)^{-1} = 1,043\ 77 \dots \tag{164}$$

à comparer avec la valeur 1,044 obtenue par Dodd [4] en résolvant numériquement les équations de Faddeiev. La valeur variationnelle est $2B = 1$.

La méthode d'analyse utilisée dans ce travail pour construire une solution méromorphe de l'équation aux différences n'est pas distincte de celle qui a

été exposée en détail dans le papier cité en référence [9]. Cependant le résultat obtenu ici est plus simple que précédemment puisque nous passons de cinq équations ordinaires couplées à une seule pour déterminer l'énergie de liaison. L'équivalence entre les deux systèmes (si elle existe) semble bien compliquée à établir et réside peut-être dans les théorèmes d'Abel. Le progrès tient à une construction différente de la solution générale de l'équation aux différences. Autrement dit la partie algébrique élémentaire est traitée de façon plus satisfaisante et ceci évite justement l'inversion du système de Jacobi sur lequel nous étions tombés dans le papier cité. Reste irréductible et commune aux deux la partie transcendante qui a son origine dans l'équation

$$\varphi_0\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) = \eta^2(\omega) \varphi_0(\omega).$$

La solution $\varphi_0(\omega)$, qui ne peut être périodique, n'est donc pas uniforme sur la surface de Riemann de la courbe $(\sqrt{\lambda}, e^{3i\omega})$. Cependant on aurait pu utiliser l'uniformisation elliptique pour transformer cette équation. On aurait obtenu

$$\varphi_0(u + 4K) = \eta^2(u) \varphi_0(u)$$

avec les conditions $\varphi_0(u) = \varphi_0(u + iK')$.

Or $\eta(u)$ est une fonction doublement périodique très simple, méromorphe dans tout le plan u et qui admet par conséquent une factorisation. On retombe alors sur le type d'équations aux différences premières qu'avaient rencontrées Mc Guire et Hurst [5] dans un problème de particules impénétrables analogue. La fonction $\varphi_0(u)$ peut alors être construite comme produit infini de facteurs élémentaires dont les zéros et les pôles sont de multiplicité croissante avec le rang, définissant ainsi une fonction manifestement méromorphe. Nous avons préféré utiliser la représentation intégrale (104)-(105) en ω , mais les deux formes sont équivalentes.

Bibliographie

[1] JOST, R., *Z. Angew. Math. Phys.* 6 (1955) 316.
 [2] NUSSENZWEIG, H. M., *Proc. R. Soc. A* 264 (1961) 408.
 [3] MCGUIRE, J. B., *J. Math. Phys.* 5 (1964) 622.
 [4] DODD, L. R., *Aust. J. Phys.* 25 (1972) 507.
 [5] MCGUIRE, J. B. et HURST, C. A., *J. Math. Phys.* 13 (1972) 1595.
 [6] SOMMERFELD, A., *IV Optics* (Ac. Press.).
 [7] OSGOOD, W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie*. II. Chelsea, 1965.
 [8] MUSKHELISHVILI, N. I., *Singular Integral Equation* (Groningen) 1953.
 [9] GAUDIN, M., Preprint D. Ph. T. 1975/43.
 [10] WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, 4^e éd. (Cambridge) 1958.

SUR LE PROBLÈME DE DEUX OU TROIS ÉLECTRONS EN PRÉSENCE D'UN MOMENT LOCALISÉ

M. GAUDIN

Commissariat à l'Énergie Atomique, Division de la Physique, Service de Physique Théorique,
CEN Saclay, B.P. n° 2, 91190 Gif sur Yvette, France

(Reçu le 24 avril 1978, accepté le 13 juillet 1978)

Résumé. — Le problème de mécanique quantique posé par la détermination de la fonction d'onde d'un système d'électrons (deux ou trois) en présence d'un moment magnétique localisé donne lieu, dans un modèle schématique, à un problème aux limites analogue à celui de la diffraction d'une onde par un quadrant ou un octant. La méthode de Sommerfeld, directement adaptée à ce type de problème, conduit à résoudre des relations fonctionnelles linéaires : équations aux différences secondes et plus généralement ce qu'on pourrait appeler des équations aux différences modulaires. La méthode de solution est complètement décrite pour le cas à deux électrons, ce qui conduit à la solution exacte d'un problème à trois corps plus réaliste que dans les précédents modèles unidimensionnels traités par les mêmes méthodes. La solution des relations fonctionnelles pour le cas à trois électrons est à peine abordée dans cet article.

Abstract. — The quantum mechanical problem of finding the wave function of two or three electrons interacting with a localized magnetic moment gives rise, in a schematic model, to a boundary value problem analogous to the diffraction of a wave by a quadrant or an octant. Sommerfeld's method, directly adapted to this problem, leads to the solution of linear functional equation, second difference equations and more generally what one may call modular difference equations. The method of solution is completely described in the case of two electrons, which gives the exact solution for a three body problem more realistic than the preceding one-dimensional problems solved by the same method. Solution of the functional relations for the three electrons case is hardly touched upon in this paper.

1. **Position du problème général.** — Il est établi depuis les travaux de Kondo [1] que le *scattering* d'un électron de conduction par une impureté magnétique dans un métal ne peut être considéré comme un problème à un seul électron, mais doit être traité comme problème à N corps. C'est en gros la statistique de Fermi qui permet de rendre compte du phénomène de minimum de résistivité dans les métaux, mais le comportement singulier à température nulle que donne la méthode de perturbation est l'indice d'une structure complexe de l'état fondamental et des premiers états excités du système électrons-impureté. Tout ceci a fait l'objet de nombreux travaux de physique mathématique, et finalement les méthodes récentes de renormalisation ont permis un pas décisif dans la compréhension du mécanisme de l'effet Kondo.

Cependant, entre l'approche globale du système thermodynamique à un grand nombre de particules et le traitement primitif et simplifié du modèle à un électron dans un champ moyen, il semble qu'on puisse placer l'étude du problème intermédiaire à un petit

nombre d'électrons, mettons deux ou trois. Evidemment il ne s'agit plus là du problème de Kondo proprement dit : ni l'important effet dû au principe d'exclusion, ni l'interaction secondaire induite entre électrons, ni aucun effet collectif ne sont alors considérés. Mais on tient déjà, avec deux électrons en interaction avec l'impureté centrale, le principe de la corrélation élémentaire qui interviendra dans la structure collective, à savoir la diffusion d'un électron incident par le système corrélé électron-impureté. La possibilité de gel ou de fluctuation du moment localisé en fonction de la température est un effet directement dépendant de l'amplitude de retournement de spin en fonction de l'énergie des électrons diffusés. Il paraît donc intéressant d'examiner le système le plus simple qui fournisse une corrélation à deux particules. On est alors conduit au problème suivant : résoudre l'équation de Schrödinger pour la détermination exacte de la fonction d'onde électronique avec $N = 2$, problème préalable à la construction de l'amplitude de diffusion de deux électrons s par l'atome magné-

tique. Ceci est fait dans le modèle schématique le plus simple, déjà utilisé par Kondo et Anderson, où l'interaction coulombienne entre électrons est négligée, l'interaction avec l'impureté étant ponctuelle et effective dans le seul état orbital sphérique. La solution du cas à deux électrons est essentiellement complète bien qu'il reste beaucoup à faire pour l'exploiter, adapter les paramètres et calculer numériquement des amplitudes. Nous avons préféré attaquer le problème à trois électrons dans l'espoir d'une extension possible, mais l'essai reste inachevé.

Description du modèle général.

On notera $1/2 \sigma_0$ le vecteur spin de l'atome magnétique supposé localisé à l'origine; $1/2 \sigma_n$ et r_n ($n = 1, 2, \dots, N$), le spin et la position de l'électron n^o . L'énergie potentielle de l'électron r_n, σ_n en présence de l'impureté a la forme suivante

$$W(r_n, \sigma_n, \sigma_0) = U(r_n) + P_{0n} V(r_n) \quad (1.1)$$

avec la définition

$$P_{0n} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_0 \cdot \sigma_n). \quad (1.2)$$

Les deux fonctions de la distance $U + V$ et $U - V$ sont respectivement les potentiels électron-atome dans l'état triplet ($P_{0n} = +1$) et dans l'état singulet ($P_{0n} = -1$). C'est une hypothèse physique légitime de considérer que la portée r_0 de ces potentiels est négligeable devant les longueurs d'onde électroniques; ces potentiels ne seront donc effectifs que dans le seul état orbital sphérique. La fonction d'onde des N électrons et du moment localisé, dans l'état $|\Psi\rangle$ d'énergie E , sera définie comme :

$$\begin{aligned} \psi(r_1 \sigma_1, r_2 \sigma_2, \dots, r_n \sigma_n; \sigma_0) = \\ = r_1 r_2 \dots r_n \langle r_1 \sigma_1, r_2 \sigma_2, \dots, r_n \sigma_n; \sigma_0 | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

fonction des coordonnées radiales r_i et des composantes magnétiques $\sigma_i^z = \sigma_i = \pm 1$ ($i = 0, 1, \dots, N$). En vertu du principe de Pauli, ψ est une fonction antisymétrique des N indices $1, 2, \dots, N$. On considérera ψ comme un vecteur $\psi(r_1 r_2 \dots r_N)$ à 2^{N+1} composantes obéissant à l'équation de Schrodinger (unités : $\hbar^2/2m = 1$)

$$\sum_{n=1}^N - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_n^2} + (U(r_n) + P_{0n} V(r_n)) \psi = k^2 \psi. \quad (1.4)$$

valide dans le *quadrant* $U \{ r_n \geq 0 \}$. Ici l'énergie totale est positive : $E = k^2$.

On sait que les opérateurs de spin P_{0n} constituent une représentation des transpositions ($0n$) génératrices du groupe symétrique S_{N+1} .

De l'antisymétrie déduisons l'effet d'une permutation des variables orbitales sur ψ ; par exemple

$$\psi(r_3 r_2 r_1 \dots) = - P_{13} \psi(r_1 r_2 r_3 \dots), \quad (1.5)$$

avec $P_{13} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)$.

Notre hypothèse de portée nulle concernant les potentiels ($r_0 k \ll 1$) permet de simplifier l'équation de Schrödinger pour obtenir un problème aux limites très dépourillé. D'après (1.4), on a

$$\Delta_N \psi + k^2 \psi = 0 \quad \text{dans } U(r_n > r_0). \quad (1.6)$$

D'autre part, si l'on intègre sur r_1 ; variant de 0 à r_0 , les deux membres de (1.4), on obtient

$$- \int_0^{r_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} dr_1 + \int_0^{r_0} W(r_1) \psi dr_1 = O(r_0) \quad (1.7)$$

c'est-à-dire dans le domaine $r_2 > 0, r_3 > 0, \dots$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_1} (r_1 r_2 \dots) \Big|_{r_1=r_0} = W(0) r_0 \psi + O(r_0). \quad (1.8)$$

Supposons que la profondeur du potentiel soit telle que le produit $W r_0$ reste fini à la limite de portée nulle, plus précisément

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} W r_0 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (U + V P_{01}) = u + v P_{01}. \quad (1.9)$$

Les paramètres réels u et v suffisent, dans cette hypothèse, à caractériser le potentiel électron-atome. Le modèle schématique qui en résulte conduit donc au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta_N \psi + k^2 \psi = 0, & r_n > 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial r_n} (r_1 \dots r_N) \Big|_{r_n=0} = (u + v P_{0n}) \psi \Big|_{r_n=0} \end{cases} \quad (1.10)$$

ψ étant seulement défini dans le *premier quadrant* \mathbb{R}_N^+ .

Notons que, du fait de l'antisymétrie, les N relations de raccordement (1.11) sont équivalentes. En effet, appliquons sur la première ($n = 1$) la transposition (12), à la fois sur les coordonnées de spin et d'espace :

$$\begin{aligned} (12) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_1} \Big|_{r_1=0} - (u + v P_{01}) \psi \Big|_{r_1=0} \right) &\equiv \\ &\equiv - \left(P_{12} \frac{\partial \psi}{\partial r_2} \Big|_{r_2=0} - (u + v P_{01}) P_{12} \psi \Big|_{r_2=0} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r_2} \Big|_{r_2=0} &= P_{12} (u + v P_{01}) P_{12} \psi \Big|_{r_2=0} \\ &= (u + v P_{02}) \psi \Big|_{r_2=0}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Parti de la première, nous obtenons donc la seconde ($n = 2$) équation (1.11). L'une d'entre elles suffit et donne lieu à autant d'équations sur les frontières de \mathbb{R}_N^+ que la multiplicité du spin total S dans la décomposition $(\frac{1}{2})^N \rightarrow S$ l'indique.

Notons enfin que les équations (1.10), (1.11) obtenues dans l'hypothèse de portée nulle sont identiques à celles que donnerait un modèle de Kondo à une dimension avec un potentiel delta

$$W(x_1) = (u + v P_{01}) \delta(x_1) \quad (1.14)$$

où la coordonnée x_1 de la particule varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme la fonction d'onde est de parité définie dans chaque réflexion $x_n \rightarrow -x_n$ et que le potentiel delta est inefficace dans les états impairs, il suffit de considérer les seuls états pairs, et, dans \mathbb{R}_N^+ , on obtient exactement (1.10)-(1.11) avec $r_n = |x_n|$.

2. Spécialisation à deux et trois électrons. — Le problème aux limites défini par les équations (1.10), (1.11) n'est pas en général séparable puisque les opérateurs P_{0n} ne commutent pas entre eux, sauf dans le cas du couplage au spin maximum $S = \frac{1}{2}(N+1)$ où la fonction de spin est totalement symétrique : $P_{0n} = +1, \forall n$.

Le cas non trivial le plus simple est celui du système à deux électrons, ceux-ci étant couplés au moment localisé pour former un état $S = \frac{1}{2}$. La fonction d'onde antisymétrique la plus générale peut être décomposée en deux fonctions de spin indépendantes

$$\psi(1, 2) = \varphi(r_1, r_2) [01] 2 - \varphi(r_2, r_1) [02] 1, \quad (2.1)$$

où l'on a introduit la notation un peu rapide

$$[01] 2 \equiv (\chi_+^{(0)} \chi_-^{(1)} - \chi_-^{(0)} \chi_+^{(1)}) \chi^{(2)}, \quad (2.2)$$

avec

$$\sigma_n^z \chi_\sigma^{(m)} = \sigma \chi_\sigma^{(m)}, \quad \sigma = \pm 1. \quad (2.3)$$

On a directement

$$\begin{aligned} P_{01} \psi(1, 2) &= -\varphi(r_1, r_2) [01] 2 - \varphi(r_2, r_1) [12] 0 \\ &= (\varphi(r_2, r_1) - \varphi(r_1, r_2)) [01] 2 - \\ &\quad - \varphi(r_2, r_1) [02] 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

d'où les équations du problème pour $N = 2, S = \frac{1}{2}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_2^2} + k^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r_1}(0, r_2) &= (u - v) \varphi(0, r_2) + v \varphi(r_2, 0). \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r_2}(r_1, 0) &= (u + v) \varphi(r_1, 0). \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

La fonction orbitale $\varphi(r_1, r_2)$ n'a pas de symétrie définie dans l'échange $r_1 \leftrightarrow r_2$, si v n'est pas nul.

Pour $N = 3$, nous choisissons de traiter le cas de spin $S = 0$. On a deux fonctions de spin indépendantes, par exemple [01] [23] et [02] [13],

$$\text{(et la relation } [01] [23] + [02] [31] + [03] [12] = 0 \text{).} \quad (2.8)$$

Une fonction d'onde antisymétrique en 2 et 3 s'écrit

$$\psi(1, 2, 3) = \varphi(r_1, r_2, r_3) [02] [13] - \varphi(r_1, r_3, r_2) [03] [12]. \quad (2.9)$$

L'antisymétrie en 1 et 2 donne la condition

$$\begin{aligned} \psi(2, 1, 3) &\equiv \varphi(r_2, r_3, r_1) [03] [12] + \varphi(r_2, r_1, r_3) [01] [23] \\ &\equiv (\varphi(r_2, r_3, r_1) - \varphi(r_2, r_1, r_3)) [03] [12] + \\ &\quad + \varphi(r_2, r_1, r_3) [02] [13]. \\ &= -\psi(1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.10)$$

On en déduit :

- a) l'antisymétrie de $\varphi(r_1, r_2, r_3)$ en r_1 et r_2 ;
- b) la condition cyclique

$$\varphi(r_1, r_2, r_3) + \varphi(r_2, r_3, r_1) + \varphi(r_3, r_1, r_2) = 0, \quad (2.11)$$

qui expriment que la fonction d'espace $\varphi(r_1, r_2, r_3)$ a la symétrie du diagramme d'Young $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$.

Calculons le second membre de (1.11)

$$\begin{aligned} (u + vP_{01}) \psi &\equiv (u\varphi(r_1, r_2, r_3) + \\ &\quad + v\varphi(r_3, r_1, r_2)) [02] [13] + (-u\varphi(r_1, r_3, r_2) \\ &\quad + v\varphi(r_1, r_2, r_3)) [03] [12]; \end{aligned} \quad (2.12)$$

d'où les conditions aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_1}(0, r_2, r_3) = u\varphi(0, r_2, r_3) + v\varphi(r_3, 0, r_2), \quad (2.13)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r_1}(0, r_3, r_2) = -u\varphi(0, r_3, r_2) + v\varphi(0, r_2, r_3). \quad (2.14)$$

Du fait de l'antisymétrie de φ dans les deux premières variables, cette seconde équation (2.14) n'est pas distincte de (2.13). L'ensemble des trois relations (2.11) et (2.13) est complet comme on l'a montré plus haut. On peut le présenter autrement ; symétrisant (2.13) en r_2, r_3 on obtient

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial r_1}(0, r_2, r_3) = (u - v) \varphi'(0, r_2, r_3) \quad (2.15)$$

où l'on a posé

$$\varphi'(r_1, r_2, r_3) = \varphi(r_1, r_2, r_3) + \varphi(r_1, r_3, r_2). \quad (2.16)$$

De même par antisymétrisation de (2.13) en r_2, r_3 et à l'aide de la condition cyclique (2.11), on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_3}(r_1, r_2, 0) = (u + v) \varphi(r_1, r_2, 0), \quad (2.17)$$

qu'on aurait pu déduire aussi des relations équivalentes (1.11), pour $n = 2$ et 3.

Pour $N = 3, S = 0$, on a donc le problème aux limites suivant dans \mathbb{R}_3^+ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_3^2} + k^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial r_1}(0, r_2, r_3) &= w' \varphi'(0, r_2, r_3). \end{aligned} \right. \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r_3}(r_1, r_2, 0) &= w \varphi(r_1, r_2, 0). \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi'(r_1, r_2, r_3) &= \varphi(r_1, r_2, r_3) + \varphi(r_1, r_3, r_2) \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(r_1, r_2, r_3) &= -\varphi(r_2, r_1, r_3) \\ w &= u + v, \quad w' = u - v. \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

3. **La méthode de Sommerfeld.** — Le problème à deux électrons présente quelque ressemblance avec un problème de diffraction par un quadrant. La nature des conditions aux limites incite à rechercher une solution en coordonnées polaires

$$r_1 = \rho \cos \theta, \quad r_2 = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2. \quad (3.1)$$

en utilisant la représentation classique de Sommerfeld [2] pour une onde à deux dimensions :

$$\begin{aligned} \varphi(r_1, r_2) &\equiv \varphi(\rho, \theta) = \\ &= \int_{(C)} d\omega e^{ik\rho \cos \omega} (f_1(\omega - \theta) + f_2(\omega + \theta)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le contour (C) part de $\Im m \omega = +\infty$ dans la vallée $-\frac{\pi}{2} < R\omega < 0$, et revient à $\Im m \omega = +\infty$, dans la vallée $\pi < R\omega < 3\pi/2$; de sorte qu'au voisinage de l'infini on ait $\Re m \cos \omega > 0$. Nous supposons f_1 et f_2 holomorphes pour $\Re m \omega$ assez grand, quel que soit $R\omega$, et tendant vers zéro pour $\Im m \omega = +\infty$, de sorte que l'intégrale converge uniformément par rapport à θ pour ρ positif. La fonction définie par (3.2) satisfait évidemment l'équation d'onde (2.5). La figure 1 montre le contour (C) supposé tout entier dans la région d'holomorphic de f_1 et f_2 .

Exprimons les conditions de raccordement. Nous avons

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \right|_{r_1=0} &= -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2} \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_2} \right|_{r_2=0} &= \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

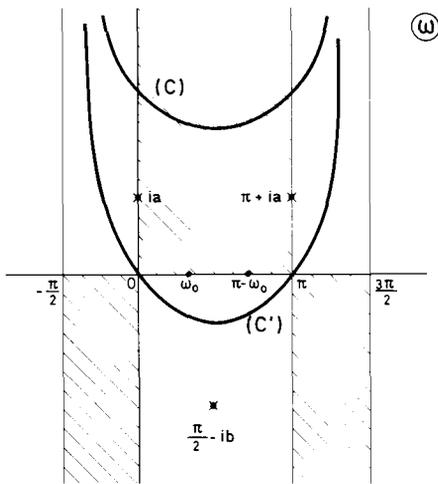


Fig. 1. — Contours pour l'intégrale de Sommerfeld ($N = 2$).

[Contours for Sommerfeld's integral ($N = 2$).]

La condition (2.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} (u + v) \int_{(C)} (f_1(\omega) + f_2(\omega)) e^{ik\rho \cos \omega} d\omega &= \\ = \frac{1}{\rho} \int_{(C)} (-f_1'(\omega) + f_2'(\omega)) e^{ik\rho \cos \omega} d\omega &= \\ = \int_{(C)} -ik \sin \omega (f_1(\omega) - f_2(\omega)) e^{ik\rho \cos \omega} d\omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

où l'on a intégré par partie et tenu compte du comportement à l'infini.

Il suffit donc d'avoir

$$(u + v) (f_1(\omega) + f_2(\omega)) + ik \sin \omega (f_1(\omega) - f_2(\omega)) = 0. \quad (3.5)$$

De façon analogue la relation (2.6) nous donne

$$\begin{aligned} (u - v - ik \sin \omega) f_1\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \\ + (u - v + ik \sin \omega) f_2\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + v(f_1(\omega) + f_2(\omega)) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La relation (3.5) est satisfaite en posant

$$\left. \begin{aligned} f_1(\omega) &= (u + v - ik \sin \omega) \frac{\cos \omega}{u - v - ik \cos \omega} f(\omega) \\ f_2(\omega) &= - (u + v + ik \sin \omega) \frac{\cos \omega}{u - v - ik \cos \omega} f(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Substituant dans (3.6) les expressions ci-dessus de f_1 et f_2 , on obtient pour la seule fonction inconnue $f(\omega)$ l'équation aux différences secondes

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) f(\omega) = 0 \quad (3.8)$$

avec la définition

$$x(\omega) = \frac{2 ik \cos \omega}{(u + v + ik \cos \omega)(u - v - ik \cos \omega)}. \quad (3.9)$$

Ce type d'équation a été rencontré par Jost [3] pour la solution d'un modèle schématique unidimensionnel pouvant illustrer les mécanismes de *stripping* et *break-up*. Nussenzweig [4], puis Mc Guire et Hurst [5] ont aussi obtenu des équations aux différences dans le cadre de divers modèles analogues. Dans un autre domaine de la théorie de la diffusion, la méthode N/D conduit Wanders et Reuss [14] à une équation aux différences secondes qu'ils ramènent à la solution d'équations intégrales. L'équation de Jost a été résolue par Albeverio [15] qui utilise tout l'arsenal de la théorie des fonctions abéliennes, ce qui est

d'ailleurs exactement dans la nature du problème. Dans la solution proposée ici, nous avons essayé de rester le plus près possible de l'analyse élémentaire sur une surface de Riemann. La présentation des solutions dans l'une et l'autre méthode diffère considérablement d'aspect et leur équivalence n'est pas apparente.

D'après nos hypothèses et compte tenu de (3.7), il suffit de chercher les solutions holomorphes par $\Im m \omega$ assez grand, et qui tendent vers zéro plus vite que $\exp - |\Im m \omega|$; ceci afin de satisfaire les équations (2.5) à (2.7) et d'obtenir par conséquent une solution de l'équation de Schrödinger. Il reste cependant à choisir la solution qui satisfasse aussi les conditions asymptotiques imposables à la fonction d'onde, qu'il s'agisse du problème de diffusion ou du calcul du spectre des états liés. Nous ne rentrerons pas dans la discussion des divers cas possibles de problèmes et de paramètres, car ce n'est pas l'objet de ce travail de détailler la solution complète, mais plutôt d'exposer la méthode qui y conduit, le cas $N = 2$ étant une étape avant d'aborder le cas $N = 3$.

4. Le problème de diffusion. — Le but de cette section est de montrer comment les conditions asymptotiques sur la fonction d'onde, dans le problème de diffusion par exemple, permettent de préciser les propriétés d'analyticité et de croissance de la fonction inconnue $f(\omega)$. L'équation aux différences que cette fonction vérifie peut ensuite être résolue complètement par une méthode qui a déjà été décrite et mise en œuvre de façon détaillée dans des travaux récents sur un système à trois corps à une dimension [6, 7].

Appelons $|k_1 k_2 \varepsilon\rangle_{in}$ l'état entrant de deux électrons, dans l'onde s par rapport à l'atome diffuseur, et d'énergie respective k_1^2 et k_2^2 , avec $k_1^2 + k_2^2 = k^2$, la parité d'espace étant ε . Avec $\varepsilon = +1$ la paire est dans l'état singulet, la fonction de spin $S = \frac{1}{2}$ est $\sim [12] 0$; avec $\varepsilon = -1$, la paire est dans l'état triplet couplée au spin $\frac{1}{2}$ du moment localisé pour former un état de spin total $\frac{1}{2}$:

$$\sim [01] 2 + [02] 1.$$

La partie orbitale entrante est donc

$$e^{-i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} + \varepsilon e^{-i(k_2 r_1 + k_1 r_2)}. \quad (4.1)$$

Nous avons à construire les deux fonctions d'onde orbitales dont la partie asymptotique, purement entrante, soit précisément l'expression (4.1). On a noté que, si le paramètre d'interaction r n'est pas nul, la parité ε n'est pas conservée.

A priori la partie asymptotique de l'onde orbitale contient deux sortes de termes :

a) La contribution élastique, c'est-à-dire sans échange d'énergie entre les deux électrons, définie

par les ondes sortantes sphériques de chaque particule (état s par rapport au diffuseur) et dont l'intensité est stationnaire avec la distance comme en (4.1).

b) La contribution diffusée ou inélastique qui, pour un système à deux dimensions, a un comportement attendu en

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{ik\rho} \text{ fonction de } \theta. \quad (4.2)$$

$$\rho = (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}, \quad \theta = \text{tg}^{-1} \frac{r_2}{r_1},$$

d'où l'on extrait directement l'amplitude de diffusion $\langle k'_1 k'_2 \varepsilon' | T | k_1 k_2 \varepsilon \rangle_{s-1,2}$ avec $k'_1 = k \cos \theta$, $k'_2 = k \sin \theta$, c'est-à-dire finalement la distribution d'énergie entre les deux électrons dans l'état final.

Puisque l'intégrale de Sommerfeld (3.2) est essentiellement une transformée de Fourier en ρ , la partie dominante du comportement asymptotique sera déterminée par les singularités de l'intégrand, et la correction que constitue l'onde diffusée sera donnée par la méthode du col. Les ondes du type

$$\exp i(\pm k_1 r_1 \pm k_2 r_2)$$

ne peuvent être dues qu'à la contribution de pôles simples et réels de $f_{1,2}(\omega)$. Définissant $\omega_0 (\equiv \theta_0)$, réel par $k_1 = k \cos \omega_0$, $k_2 = k \sin \omega_0$; $0 \leq \omega_0 \leq \pi/2$. On a

$$k_1 r_1 \pm k_2 r_2 = k\rho \cos(\omega_0 \mp \theta). \quad (4.3)$$

et par conséquent les pôles doivent être situés en $\pm \omega_0$, $\pm \omega_0 + \pi$.

Montrons qu'il suffit de considérer la contribution de deux pôles en ω_0 et $\pi - \omega_0$ pour obtenir une fonction d'onde φ de type factorisé à l'infini, que nous appellerons $\varphi_{k_1 k_2}(r_1, r_2)$.

L'intégrale (3.2) est définie à l'aide d'un contour (C) dans le voisinage de $\Im m \omega = +\infty$. Mais pour obtenir le comportement asymptotique de φ , la définition avec (C) est mauvaise, et il faut se ramener à un contour qui soit tout entier dans une région $\Im m \cos \omega \geq 0$. Le contour déplacé (C') passe alors nécessairement par les deux cols $\omega = 0$ et $\omega = \pi$; il entoure le segment réel $[0, \pi]$ et par conséquent les deux pôles supposés en ω_0 et $\pi - \omega_0$ (voir Fig. 1). L'équivalence des deux contours (C) et (C'), modulo la contribution des deux pôles réels, résulterait d'une hypothèse d'holomorphie de $f_{1,2}(\omega)$ dans toute la bande $\Im m \omega > 0$; $0 \leq R\omega \leq \pi$. On peut cependant admettre l'existence de pôles simples sur la frontière en $R\omega = 0$ pour f_1 , en $R\omega = \pi$ pour f_2 , puisqu'ils donneraient lieu à des ondes évanescentes.

Au voisinage de $\rho = \infty$, la contribution due au contour (C') passant par les deux cols 0 et π , avec les

pentés respectives -1 et $+1$, s'obtient aisément par la méthode de Laplace

$$\varphi \propto (f_1(-\theta) + f_2(\theta)) e^{ik\rho} \int_{-e^{-i\pi/4}, \infty}^{+e^{-i\pi/4}, \infty} e^{-ik\rho\omega^{2/2}} d\omega + (f_1(\pi-\theta) + f_2(\pi+\theta)) e^{-ik\rho} \int_{-e^{i\pi/4}, \infty}^{e^{i\pi/4}, \infty} e^{ik\rho\omega^{2/2}} d\omega. \tag{4.4}$$

L'hypothèse physique de notre problème de diffusion est que la seule onde convergeant sur le diffuseur est l'onde entrante (4.1), partie sphérique de l'onde plane incidente. La partie entrante dans l'expression (4.4) doit donc s'annuler :

$$f_1(\pi - \theta) + f_2(\pi + \theta) = 0, \quad \forall \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{4.5}$$

Compte tenu de (3.7), nous obtenons par prolongement la condition de symétrie

$$f(\pi - \omega) = f(\pi + \omega), \tag{4.6}$$

qui est compatible avec l'équation aux différences.

L'onde diffusée s'écrit alors d'après (4.4) et (3.7)

$$\varphi_{\text{diff.}} \propto (f(\theta) - f(-\theta)) \cos \theta \frac{u+v+ik \sin \theta}{u-v-ik \cos \theta} \times \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} e^{-i\pi/4+ik\rho}. \tag{4.7}$$

Examinons la contribution des deux pôles supposés ; soit f_0 le résidu du pôle de $f(\omega)$ en ω_0 , l'équation récurrente (3.8) et la condition (4.6) entraînent l'existence d'un autre pôle simple de résidu f_0 en $\pi - \omega_0$. Au voisinage des pôles on a

$$\left. \begin{aligned} f_1(\omega - \theta) &\propto \cos \omega_0 \frac{u+v-ik \sin \omega_0}{u-v-ik \cos \omega_0} \frac{f_0}{\omega - \theta - \omega_0} \\ f_2(\omega + \theta) &\propto -\cos \omega_0 \frac{u+v+ik \sin \omega_0}{u-v-ik \cos \omega_0} \frac{f_0}{\omega + \theta - \omega_0} \end{aligned} \right\} \tag{4.8}$$

Définissons les phases $\delta^+(k)$ et $\delta^-(k)$:

$$\delta_{1,2}^+ = -\text{tg}^{-1} \frac{k_{1,2}}{u+v}, \quad \delta_{1,2}^- = \text{tg}^{-1} \frac{k_{1,2}}{v-u}, \tag{4.9}$$

qui seraient les déphasages triplets et singulets de chaque électron en l'absence de l'autre. On déduit de (4.8) la contribution totale des résidus en ω_0 et $\pi - \omega_0$:

$$\varphi_{\text{élast.}}(\rho, \theta) = -2\pi i f_0 \cos \omega_0 \left(\frac{(u+v)^2 + k^2 \sin^2 \omega_0}{(u-v)^2 + k^2 \cos^2 \omega_0} \right)^{1/2} \times \{ e^{ik\rho \cos(\theta+\omega_0)+i(\delta_1^+ - \delta_1^-)} - e^{ik\rho \cos(\theta-\omega_0)-i(\delta_2^+ + \delta_2^-)} - e^{-ik\rho \cos(\theta-\omega_0)+i(\delta_2^+ + \delta_1^-)} + e^{-ik\rho \cos(\theta+\omega_0)+i(\delta_1^- - \delta_2^-)} \}. \tag{4.10}$$

Si l'on normalise $f(\omega)$ de sorte que l'on ait

$$f_0^{-1} = 2\pi i \cos \omega_0 \frac{u+v+ik \sin \omega_0}{u-v-ik \cos \omega_0}, \tag{4.11}$$

la partie dominante de l'onde à l'infini est

$$\varphi_{\text{élast.}} = \varphi_{k_1 k_2}(r_1, r_2) |_{\rho \rightarrow \infty} = (e^{-ik_1 r_1} - e^{-2i\delta_1^- + ik_1 r_1}) (e^{-ik_2 r_2} - e^{-2i\delta_2^+ + ik_2 r_2}). \tag{4.12}$$

La fonction d'onde de parité asymptotique ε , dont la partie entrante est exactement (4.1), est donc

$$\varphi(r_1, r_2) = \varphi_{k_1 k_2}(r_1, r_2) + \varepsilon \varphi_{k_2 k_1}(r_1, r_2); \tag{4.13}$$

$\varphi_{k_1 k_2}$ étant défini par la donnée des pôles réels en ω_0 et $\pi - \omega_0$, $\varphi_{k_2 k_1}$ par $\frac{\pi}{2} - \omega_0$ et $\frac{\pi}{2} + \omega_0$.

Rassemblant la partie élastique et l'onde diffusée, on obtient le comportement asymptotique de

$$\varphi_{k_1 k_2}(r_1, r_2) \varphi_{k_1 k_2}(r_1, r_2) \propto (e^{-ik_1 r_1} - \dots) (e^{-ik_2 r_2} - \dots) + F(\theta, \theta_0; k) \frac{1}{\sqrt{k\rho}} e^{-i\pi/4+ik\rho}. \tag{4.14}$$

D'où l'amplitude inélastique

$$F(\omega, \theta_0; k) = -\cos \omega \frac{u+v+ik \sin \omega}{u-v-ik \cos \omega} \times \sqrt{2\pi} (f(\omega) - f(-\omega)), \tag{4.15}$$

et la matrice de diffusion

$$\langle k'_1 k'_2 \varepsilon' | T | k_1 k_2 \varepsilon \rangle = F(\theta, \theta_0) + \varepsilon F\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + \varepsilon' F\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \theta_0\right) + \varepsilon \varepsilon' F\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} - \theta_0\right). \tag{4.16}$$

On aura noté que l'amplitude de diffusion est donnée très directement par la solution de l'équation aux différences.

Récapitulons enfin les propriétés de $f(\omega)$ que nous avons dû supposer pour construire une onde $\varphi_{k_1, k_2}(r_1, r_2)$ satisfaisant aux conditions physiques :

a) l'holomorphie de $f_{1,2}$ pour $\Im m \omega$ assez grand ; l'holomorphie dans un domaine contenant la bande $\Im m \omega > 0, 0 < R\omega < \pi$, à l'exception toutefois de pôles simples possibles en $R\omega = 0$ et $R\omega = \pi$;

b) l'holomorphie au voisinage et sur le segment réel $[0, \pi]$, en dehors de deux pôles simples de résidu non nul en θ_0 (et $\pi - \theta_0$) ;

c) la relation (4.6).

On déduit immédiatement de (3.7), (3.8) et ce qui précède a) et b), que $f(\omega)$ est méromorphe dans tout le plan ω .

Puisque f_1 et f_2 doivent tendre vers zéro à l'infini (afin d'assurer les propriétés convenables de la densité et du courant à l'origine), $f(\omega)$ doit décroître plus vite que $e^{i\omega}$ pour $\Im m \omega = +\infty$, et par conséquent, d'après (3.8), $f(\omega)$ se comportera en $e^{3i\omega}$ pour $\Im m \omega = +\infty$.

5. Solution de l'équation aux différences (Partie algébrique). — La méthode de solution de l'équation aux différences (3.8) est essentiellement la même que celle qui a été décrite dans un travail cité [6] sur le problème de trois particules en interaction delta. Cette méthode donne en principe les solutions méromorphes de toute équation aux différences secondes dont les coefficients sont des polynômes 2π -périodiques, pourvu que l'incrément soit un sous-multiple de la période.

Notre but n'est pas de détailler la solution complète du problème de diffusion à deux électrons, car nous voudrions aborder aussi le cas $N = 3$. Nous nous contenterons d'exposer la méthode en détail en précisant bien les calculs algébriques initiaux dans cette section. Nous nous restreignons aussi à un cas particulier de paramètres : couplage antiferromagnétique $v > 0$, avec possibilité d'états liés triplets et singulets, c'est-à-dire $u + v < 0$ et $u - v < 0$. On posera

$$u + v = -k \operatorname{sh} a, \quad u - v = -k \operatorname{sh} b; \quad b > a > 0. \quad (5.1)$$

Dans les calculs qui suivent, l'homogénéité nous permet de poser $k = 1$.

Par analogie avec la théorie des équations différentielles du second ordre (voir la preuve dans

Derrida), nous construisons $f(\omega)$ comme superposition de deux fonctions indépendantes sur le corps des fonctions de période $\pi/2$:

$$f(\omega) = g(\omega) + \bar{g}(\omega) \quad (5.2)$$

de sorte que g et \bar{g} aient les propriétés multiplicatives

$$\left. \begin{aligned} g(\omega + 2\pi) &= \eta^{-1}(\omega) g(\omega) \\ \bar{g}(\omega + 2\pi) &= \eta(\omega) \bar{g}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

qui entraînent

$$f(\omega + 2\pi) + f(\omega - 2\pi) = (\eta + \eta^{-1})f(\omega). \quad (5.4)$$

Il suffit de construire g et \bar{g} comme solutions du système

$$\left. \begin{aligned} g\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + g\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) \bar{g}(\omega) &= 0 \\ \bar{g}\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \bar{g}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) g(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

pour que (3.9) soit satisfait. Notant

$$x\left(\omega + n\frac{\pi}{2}\right) = x_n,$$

on déduit de (5.5), par itération, l'équation pour le multiplicateur $\eta(\omega)$:

$$\begin{vmatrix} -x_0 & 1 & 0 & \eta^{-1} \\ 1 & -x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x_2 & 1 \\ \eta & 0 & 1 & -x_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.6)$$

c'est-à-dire

$$\eta + \eta^{-1} = x_0 x_1 x_2 x_3 - (x_0 + x_2)(x_1 + x_3), \quad (5.7)$$

avec

$$x(\omega) = \frac{i(\operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a) \cos \omega}{(\operatorname{sh} a - i \cos \omega)(\operatorname{sh} b + i \cos \omega)}. \quad (5.8)$$

On obtient après calcul

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\eta}} - \sqrt{\eta} &= \frac{8i\sqrt{3}v^2 \sin 2\omega}{\sqrt{\Delta_1(\omega)}}, \end{aligned} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\eta}} + \sqrt{\eta} &= 2\sqrt{\frac{\Delta(\omega)}{\Delta_1(\omega)}}. \end{aligned} \right. \quad (5.10)$$

avec les définitions

$$\Delta_1(\omega) = (\operatorname{sh}^2 2a + \sin^2 2\omega)(\operatorname{sh}^2 2b + \sin^2 2\omega) \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= \sin^4 2\omega + \sin^2 2\omega(\operatorname{sh}^2 2a + \operatorname{sh}^2 2b - 3(\operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a)^4) + \operatorname{sh}^2 2a \operatorname{sh}^2 2b \\ &\equiv (\operatorname{sh}^2 2a' + \sin^2 2\omega)(\operatorname{sh}^2 2b' + \sin^2 2\omega). \end{aligned} \quad (5.12)$$

On calculerait aisément les paramètres a', b' en fonction de a et b . On vérifie que le segment $[a', b']$ est intérieur à $[a, b]$. On prend

$$0 < a < a' < b' < b. \tag{5.13}$$

$\sqrt{\Delta(\omega)}$ sera défini comme la branche réelle positive sur l'axe réel. Elle est uniforme dans le plan coupé par les segments $[ia', ib']$, $[-ib', -ia']$, mod. $\pi/2$. On a aussi les propriétés

$$\sqrt{\Delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\Delta(\omega)} = \sqrt{\Delta(-\omega)}. \tag{5.14}$$

Donnons l'expression

$$\eta(\omega) = \frac{\sqrt{\Delta} - 4i\sqrt{3}v^2 \sin 2\omega}{\sqrt{\Delta} + 4i\sqrt{3}v^2 \sin 2\omega}, \tag{5.15}$$

avec les propriétés

$$\eta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \eta^{-1}(\omega) = \eta(-\omega). \tag{5.16}$$

On appellera (\dot{S}) la surface de Riemann de la courbe (non algébrique) $(\omega, \sqrt{\Delta})$ privée du point à l'infini. On notera $\tilde{\eta}, \tilde{g}$, etc... les prolongements de η, g, \dots dans le second feuillet de (\dot{S}) . On a donc

$$\tilde{\eta}(\omega) = \eta^{-1}(\omega).$$

Sur (\dot{S}) , la fonction η est méromorphe, avec les pôles et zéros simples d'affixes suivantes, dans le premier feuillet (voir Fig. 2)

Pôles : $ia, \quad ib + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Zéros : $-ib + \frac{\pi}{2}, \quad -ia \quad \text{---} \tag{5.17}$

Il est clair que d'après (5.3), l'irrationalité $\sqrt{\Delta}$ intervenant dans le multiplicateur η , la fonction g ne peut être uniforme. Or la fonction f doit être méromorphe dans le plan ω , donc uniforme. Il suffira donc que la fonction \tilde{g} intervenant en (5.2) soit le prolongement de g ; d'où la notation.

Réduction aux différences premières. — Par itération des récurrences (5.5), on obtient

$$\left\{ \tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \right\} g(\omega) = \frac{\eta^{-1} + x_2 x_3 - 1}{x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_3}. \tag{5.18}$$

$$\left\{ \tilde{g}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \right\} g(\omega) = \frac{\eta + x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_3}. \tag{5.19}$$

Après translation $\omega \rightarrow \omega + \frac{\pi}{2}$ dans (5.19) et quotient par (5.18), nous obtenons la relation

$$g\tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \left\{ g\tilde{g}(\omega) \right\} = \frac{x_2 x_3 x_0 - x_2 - x_0}{x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_3}. \tag{5.20}$$

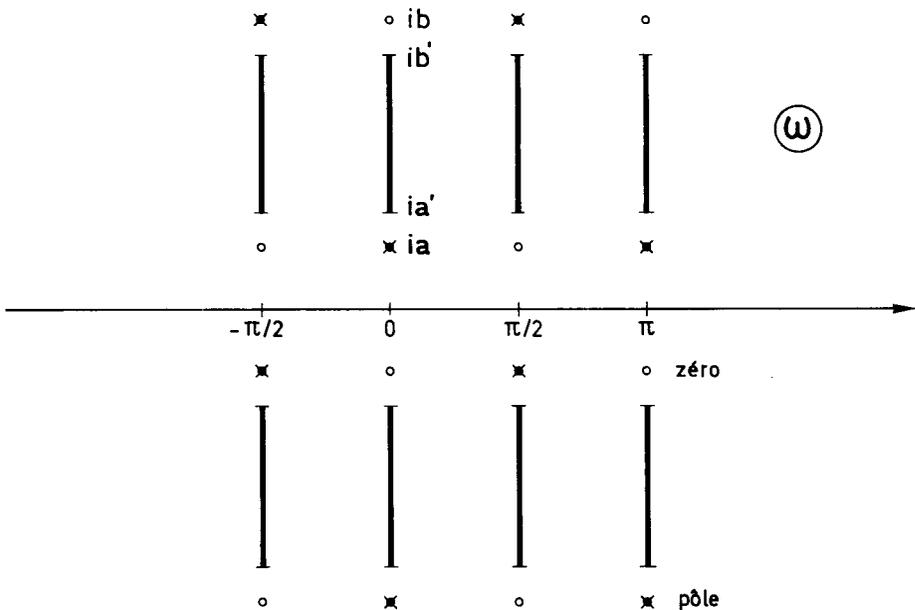


Fig. 2. — Plan coupé pour uniformiser $\sqrt{\Delta}$ et η . Pôles et zéros de η dans le premier feuillet.

[Dissection of the plane for $\sqrt{\Delta}$ and η . Poles and zeros of η in the first sheet.]

Notons en passant l'identité :

$$(x_1 x_2 x_3 - x_1 x_3) (x_2 x_3 x_0 - x_0 - x_2) \equiv \equiv (\eta^{-1} + x_2 x_3 - 1) (\eta + x_2 x_3 - 1). \quad (5.21)$$

Nous sommes donc amenés à définir trois fonctions R , E , C , en posant

$$g(\omega) \tilde{g}(\omega) \equiv R(\omega) C(\omega) \quad (5.22)$$

$$g(\omega)/\tilde{g}(\omega) \equiv E(\omega) \quad (5.23)$$

C est une fonction indéterminée de période $\pi/2$. $E(\omega)$ vérifie

$$E(\omega) \tilde{E}(\omega) = 1. \quad (5.24)$$

D'après (5.3) et les définitions, le produit $g\tilde{g}$ est 2π -

périodique et uniforme. De (5.20) on déduit la solution suivante pour $R(\omega)$:

$$R(\omega) \sim x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_3. \quad (5.25)$$

Le calcul explicite de cette fraction rationnelle, à l'aide de (5.8), donne

$$R(\omega) \sim 2^7 v^2 \frac{\sin^2 \omega}{\Delta_1} \cdot (\text{sh } a - i \cos \omega) (\text{sh } b + i \cos \omega) \times (\cos^2 \omega + i v \cos \omega + \text{sh } a \text{ sh } b). \quad (5.26)$$

Puisque R n'est défini qu'à un facteur près de période $\pi/2$, nous normaliserons ainsi

$$R(\omega) = 4 \sin^2 \omega (\text{sh } a - i \cos \omega) (\text{sh } b + i \cos \omega) \times (\text{sh } \alpha + i \cos \omega) (\text{sh } \beta - i \cos \omega) \quad (5.27)$$

avec les expressions suivantes des paramètres α et β :

$$\left. \begin{aligned} \text{sh } \alpha &= \left(\frac{v^2}{4} + \text{sh } a \text{ sh } b \right)^{1/2} - \frac{v}{2} = \left(u^2 - \frac{3}{4} v^2 \right)^{1/2} - \frac{v}{2} \\ \text{sh } \beta &= \left(\frac{v^2}{4} + \text{sh } a \text{ sh } b \right)^{1/2} + \frac{v}{2} = \left(u^2 - \frac{3}{4} v^2 \right)^{1/2} + \frac{v}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Compte tenu de l'hypothèse $|u| > v > 0$, le segment $[\alpha, \beta]$ est intérieur à $[a, b]$. Nous montrerons plus loin qu'il est aussi intérieur à $[a', b']$, c'est-à-dire que α et β sont sur la coupure.

La fonction R étant connue, le problème est de calculer E qui, d'après (5.18), (5.19) vérifie l'équation

$$E(\omega) E\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\eta + x_2 x_3 - 1}{\eta^{-1} + x_2 x_3 - 1} \equiv h(\omega). \quad (5.29)$$

On trouve

$$h(\omega) \equiv \frac{A(\omega) - i \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\Delta}}{A(\omega) + i \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\Delta}}. \quad (5.30)$$

où $A(\omega)$ est le polynôme trigonométrique suivant :

$$A(\omega) = (\cos^2 \omega - 2 i v \cos \omega + \text{sh } a \text{ sh } b) \times (\sin^2 \omega + 2 i v \sin \omega + \text{sh } a \text{ sh } b) - 3 v^2 \sin 2 \omega \quad (5.31)$$

vérifiant la propriété

$$A\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \equiv A(-\omega),$$

d'où l'on déduit

$$h\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \equiv h(-\omega). \quad (5.32)$$

On a la première identité facile à vérifier

$$(A(\omega) - A(-\omega)) \sin 2 \omega \equiv x(\omega) R(\omega). \quad (5.33)$$

et la seconde, qui découle de (5.21) :

$$\sin^2 2 \omega \left(A^2(\omega) + \frac{3}{16} \Delta(\omega) \right) \equiv \equiv R(\omega) R\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.34)$$

En effet, d'après (5.29) et la définition (5.23) de E , on peut écrire

$$g(\omega) g\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \sim + \sin 2 \omega \left(A(+\omega) - i \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\Delta} \right). \quad (5.35)$$

où le signe \sim signifie l'égalité à un facteur uniforme près de période $\pi/2$. Après translation de $-\pi/2$ sur (5.35) et compte tenu de (5.32), on a

$$g(\omega) g\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \sim - \sin 2 \omega \left(A(-\omega) - i \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\Delta} \right). \quad (5.36)$$

Par addition membre à membre de (5.35) et (5.36), tenant compte de la récurrence (5.5) et de l'identité (5.33)

$$g(\omega) \tilde{g}(\omega) \sim \sin 2 \omega \frac{A(\omega) - A(-\omega)}{x(\omega)} \equiv R(\omega). \quad (5.37)$$

De (5.35) et (5.37) on déduit l'identité (5.34).

Construction de E. — Construisons maintenant $E(\omega)$, méromorphe sur (S) , comme solution de (5.29) et (5.24). Si l'on impose de plus la condition de symétrie (4.6), on aura satisfait à toutes les conditions nécessaires. D'après (5.3), la relation (4.6) équivaut à la suivante

$$g(\omega) = \eta(\omega) g(-\omega), \quad (5.38)$$

ou encore

$$E(\omega) = \eta^2(\omega) E(-\omega), \quad (5.39)$$

ce qui signifie que $\eta^{-1} E$ est une fonction paire

$$E_1(\omega) = \eta^{-1} E = E_1(-\omega). \quad (5.40)$$

La solution formelle d'une relation aux différences premières comme (5.29) n'est évidemment pas difficile. Tout le point est de construire une solution qui soit méromorphe sur (S) . Pour cela il est naturel de décomposer $h(\omega)$ en facteurs méromorphes élémentaires. Il faut en premier lieu situer ses zéros et ses pôles. D'après (5.30) et (5.34), ceux-ci sont nécessairement les racines complexes de $R(\omega)$ et $R\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$, définies elles-mêmes par (5.27) et (5.28). Dans $\text{Im } \omega > 0$ et le premier feuillet, ces racines se trouvent en

$$\left. \begin{array}{llll} ia & \frac{\pi}{2} + ia & -\frac{\pi}{2} + ib & \pi + ib \\ i\beta & \frac{\pi}{2} + i\beta & -\frac{\pi}{2} + i\alpha & \pi + i\alpha \end{array} \right\} \pmod{\pi}. \quad (5.41)$$

Précisons les affixes des points $ia, i\beta$ par rapport à la coupure $[ia', ib']$ définie par les zéros de Δ . D'après (5.34)

$$\Delta\left(-\frac{\pi}{2} + i\alpha\right) = -\frac{16}{3} A^2 \left(-\frac{\pi}{2} + i\alpha\right), \quad (5.42)$$

et par calcul direct sur (5.31)

$$A\left(-\frac{\pi}{2} + i\alpha\right) = 3 v \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b + \operatorname{ch}^2 \alpha) > 0 \quad (5.43)$$

par conséquent, $\Delta\left(-\frac{\pi}{2} + i\alpha\right)$ est négatif, ce qui prouve que $i\alpha$ est sur le segment $[ia', ib']$. Même chose pour $i\beta$. Avec les hypothèses choisies, on a donc

$$0 < a < a' < \alpha < \beta < b' < b. \quad (5.44)$$

Voici la liste des 6 zéros de $h(\omega)$ (et pôles de $\tilde{h}(\omega)$) dans le premier feuillet de (S) (Voir Fig. 3)

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + i\alpha - 0, \quad i\beta + 0, \\ \frac{\pi}{2} + i\beta + 0, \quad \pi + i\alpha - 0, \\ \frac{\pi}{2} + ia, \quad \pi + ib \pmod{2\pi} \end{array} \right\} \quad (5.45)$$

et celle des 6 pôles :

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + i\alpha + 0, \quad i\beta - 0, \\ \frac{\pi}{2} + i\beta - 0, \quad \pi + i\alpha + 0, \\ -\frac{\pi}{2} + ib, \quad ia. \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

Pour résoudre (5.29), introduisons deux fonctions $\psi(\omega)$ et $E_0(\omega)$ de sorte que

$$E(\omega) = \left(\frac{h(\omega)}{h\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} \psi(\omega) \right)^{1,2} E_0(\omega). \quad (5.47)$$

Il suffit que ψ soit solution particulière des équations

$$\left. \begin{array}{l} \psi(\omega) \psi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = h(\omega) h(\omega + \pi) \\ \psi(\omega) = \eta^2(\omega) \psi(-\omega), \quad \psi(\omega) \tilde{\psi}(\omega) = 1 \end{array} \right\} \quad (5.48)$$

et E_0 solution générale de

$$\left. \begin{array}{l} E_0(\omega) E_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = E_0(\omega) \tilde{E}_0(\omega) = 1 \\ E_0(\omega) = E_0(-\omega). \end{array} \right\} \quad (5.49)$$

Or nous avons la factorisation suivante

$$h(\omega) h(\omega + \pi) \equiv \eta(\omega) \eta_0(\omega) \quad (5.51)$$

avec les propriétés

$$\eta_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \eta_0(\omega) = \eta_0(-\omega), \quad \eta_0 \tilde{\eta}_0 = 1 \quad (5.52)$$

le calcul donne

$$\eta_0(\omega) \equiv \frac{\sqrt{\Delta + i} \sqrt{3} [(1 + 2 \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b)^2 - \cos^2 2\omega]}{\sqrt{\Delta - i} \sqrt{3} [(1 + 2 \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b)^2 - \cos^2 2\omega]}. \quad (5.53)$$

Il est basé sur les deux identités

$$\begin{aligned} 8 \left(A(\omega) - \frac{i\sqrt{3}}{4} \sqrt{\Delta} \right) \left(A(\omega - \pi) - \frac{i\sqrt{3}}{4} \sqrt{\Delta} \right) &\equiv \\ &\equiv -(\sqrt{\Delta} - 4i\sqrt{3}v^2 \sin 2\omega) \times \\ &\times (\sqrt{\Delta} + i\sqrt{3}[(1 + 2 \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b)^2 - \cos^2 2\omega]) \end{aligned} \quad (5.54)$$

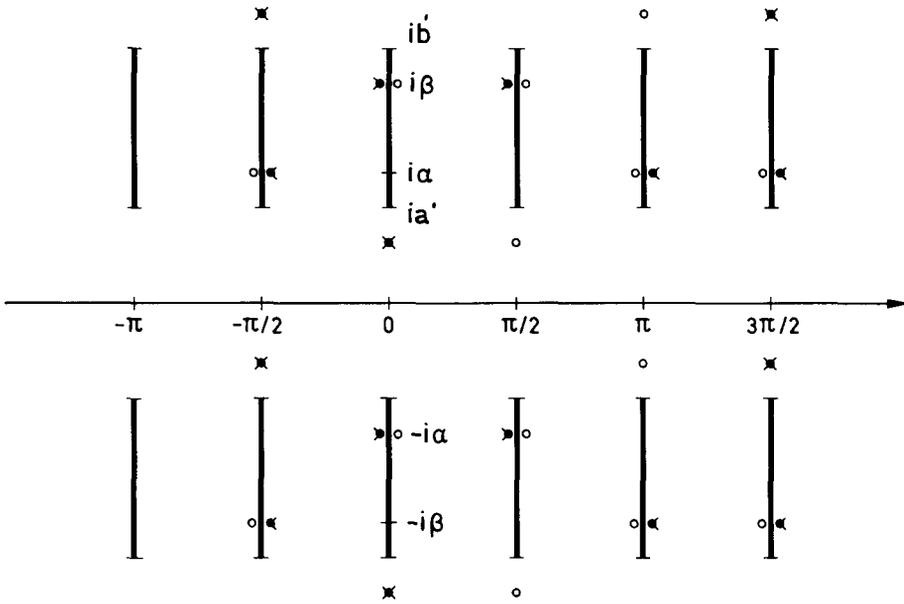


FIG. 3. — Pôles et zéros de $h(\omega)$ dans le premier feuillet.

[Poles and zeros of $h(\omega)$ in the first sheet.]

et

$$\Delta + 3((1 + 2 \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b)^2 - \cos^2 2 \omega)^2 \equiv 4(\sin^2 2 \omega + \operatorname{sh}^2 2 \alpha) (\sin^2 2 \omega + \operatorname{sh}^2 2 \beta). \quad (5.55)$$

La factorisation (5.51) est moins compliquée à établir qu'il ne paraît, car elle résulte de l'analyse des zéros et des pôles. C'est l'analogue de la factorisation des fonctions rationnelles, mais transposée aux fonctions méromorphes sur une surface de Riemann à deux feuillets.

Cette factorisation acquise, il est naturel de poser

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) \varphi_0(\omega) \quad (5.56)$$

et de résoudre les deux équations suivantes pour des fonctions méromorphes sur (S) :

$$\begin{aligned} \varphi_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \varphi_0(\omega) &= \eta_0(\omega), \quad \varphi_0 \tilde{\varphi}_0 = 1, \\ \varphi_0(\omega) &= \varphi_0(-\omega). \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \varphi(\omega) &= \eta(\omega), \quad \varphi \tilde{\varphi} = 1, \\ \varphi(\omega) &= \eta^2 \varphi(-\omega). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Les deux problèmes ci-dessus sont de nature différente car les relations (5.16) et (5.52) qui caractérisent les propriétés de η et de η_0 dans la translation $\omega \rightarrow \omega + \frac{\pi}{2}$ sont différentes. La première admet une solution de période π ; la seconde n'admet pas de solution périodique.

6. Suite de la solution et construction de l'amplitude.

— La construction de fonctions méromorphes élémentaires sur une surface de Riemann algébrique — fonctions ayant un pôle et un zéro prescrits — se fait de façon standard en introduisant l'intégrale abélienne de troisième espèce [8]. A cause des propriétés (5.52) de η_0 , le problème (5.57) pour φ_0 se pose simplement sur la surface de Riemann de la courbe algébrique $(\cos 2 \omega, \sqrt{\Delta})$ dont (S) constitue un recouvrement. Nous aurons seulement besoin d'introduire la somme des deux intégrales de troisième espèce que voici

$$\begin{aligned} G_{\omega_0, \omega_1}(\omega) &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d(\cos 2 \omega')}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\cos 2 \omega' - \cos 2 \omega} - \frac{1}{\cos 2 \omega' + \cos 2 \omega} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

ou encore

$$\begin{aligned} G_{\omega_0, \omega_1}(\omega) &= 2 \sqrt{\Delta} \cos 2 \omega \int_{\omega_0}^{\omega_1} \times \\ &\times \frac{\sin 2 \omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{1}{\sin^2 2 \omega' - \sin^2 2 \omega}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Par construction, nous avons

$$\begin{aligned} G\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) &= -G(\omega), \quad G(\omega) + \tilde{G}(\omega) = 0, \\ G(\omega) &= G(-\omega). \end{aligned} \quad (6.3)$$

On vérifie aisément en étudiant la partie singulière de (6.1) que la fonction paire de période π

$$H_{\omega_0, \omega_1}(\omega) = \exp \{ 2 G_{\omega_0, \omega_1}(\omega) \} \quad (6.4)$$

est méromorphe sur (S) et possède les seuls zéros simples $\pm \omega_1$, les seuls pôles simples $\pm \omega_0 \pmod{\pi}$, pourvu que ω_0 et ω_1 soient distincts des points de ramification $\pm ia', \pm ib' \pmod{\pi/2}$. Evidemment le contour d'intégration de ω_0 à ω_1 doit être précisé dans chaque cas. Si le contour fait un circuit autour de la coupure $[ia', ib']$ $H(\omega)$ sera multiplié par une

certaine puissance de la fonction $H_{ia'+0, ib'+0}(\omega)$ qui, elle, est holomorphe sur (S) et sans zéros. Dans le cas particulier, qui est le notre ici, la courbe $(\cos 2\omega, \sqrt{\Delta})$ est elliptique et l'uniformisation elliptique permettrait d'exprimer $H(\omega)$, $\eta_0(\omega)$ et $\varphi_0(\omega)$ à l'aide des quotients Θ et de la fonction Z de Jacobi. Cependant la méthode basée sur l'intégrale abélienne s'étend directement au cas hyperelliptique qui serait le cas général des équations aux différences secondes à coefficients rationnels (périodiques).

La solution π -périodique et méromorphe sur (S) de l'équation (5.57) est la suivante, comme on peut le vérifier aisément à l'aide de (5.53), (5.55) et (6.3) :

$$\begin{aligned} \varphi_0(\omega) &= \sqrt{\eta_0(\omega)} \exp \{ G_{ia', ix+0}(\omega) + G_{ib'+0, ib'}(\omega) \} \\ &\equiv - \frac{\sqrt{\Delta} + i\sqrt{3}(1 + 2\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b^2 - \cos^2 2\omega)}{2[(\sin^2 2\omega + \operatorname{sh}^2 2\alpha)(\sin^2 2\omega + \operatorname{sh}^2 2\beta)]^{1/2}} \exp \left\{ 2\sqrt{\Delta} \cos 2\omega \int_{ia'}^{ix+0} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

La branche du radical qui intervient au dénominateur de $\sqrt{\eta_0}$ est positive sur l'axe réel, le plan étant coupé par les segments $[ix, ib'] [-ix, -ib'] \pmod{\pi/2}$. (Ces coupures sont pour la seule définition des divers radicaux ; la fonction φ_0 n'admet comme points de ramification que les zéros de Δ : elle est uniforme sur (S) .)

On voit que φ_0 admet les

$$\begin{aligned} \text{Zéros : } &\pi/2 + i\beta + 0, \quad \pi/2 + ix - 0; \\ \text{Pôles : } &\pi/2 + i\beta - 0, \quad \pi/2 + ix + 0, \quad (\text{mod. } \pi) \end{aligned} \quad (6.6)$$

dans le premier feuillet.

Signalons les valeurs utiles

$$\left. \begin{aligned} G_{ia', \dots}(\omega = ia') &= -i\frac{\pi}{2}, \\ G_{\dots, ib'}(\omega = ib') &= -i\frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{\eta_0(ia')} = \sqrt{\eta_0(ib')} &= i\frac{\pi}{2}, \\ \varphi_0(ia') = \varphi_0(ib') &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Construction de $\varphi(\omega)$. — C'est la fonction clé de notre problème. La relation fonctionnelle (5.58) entraîne celle-ci

$$\sqrt{\varphi(\omega + \pi)} = \eta(\omega) \sqrt{\varphi(\omega)}, \quad (6.8)$$

qui peut être considérée comme une généralisation, sur une surface de Riemann, de la relation fonctionnelle classique $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, ou mieux encore, de la suivante

$$A(z + 1) = \sin \pi z A(z). \quad (6.9)$$

En effet, le multiplicateur η est un facteur méromorphe, sur la surface de Riemann de la courbe $(\sin 2\omega, \sqrt{\Delta})$, tout à fait analogue à un quotient de facteurs trigonométriques élémentaires, analogue lui-même pour les fonctions périodiques à un quotient élémentaire rationnel $\frac{x - x_0}{x - x_1}$, méromorphe sur la sphère de Riemann de x .

Il n'est pas difficile de trouver des solutions méromorphes de (6.9), par exemple à l'aide de la fonction $G(z)$ de Barnes ($G(z + 1) = \Gamma(z)G(z)$, voir p. 264 réf. [9]). Il est instructif, en vue de la comparaison avec la solution ultérieure de (6.8), de donner celle de la relation (6.9), d'abord sous la forme d'un produit infini qui manifeste directement la méromorphie dans \mathbb{C}

$$A(z) = \left(\frac{e}{2}\right)^z \frac{1}{z} \prod_{k=1}^z \frac{\left(1 - \frac{z}{k}\right)^{k-1}}{\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{k+1}} e^{2z}. \quad (6.10)$$

$$zA(z) = 1, \quad A(1) = \pi. \quad (6.11)$$

On a aussi la représentation suivante où la méromorphie n'est plus évidente, mais où la croissance est manifeste

$$\begin{aligned} A(1 + z) &= \frac{\pi}{2^z} \exp \left\{ \int_0^z \pi z' \cotg \pi z' dz' \right\} \\ &= \pi 2^{-z} \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \left(z^2 - \frac{1}{6} \right) + z \log \left(1 - e^{2\pi iz} \right) - \frac{1}{2\pi i} L(e^{2\pi iz}) \right\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

avec

$$L(x) = \int_0^x \log(1-u) \frac{du}{u} \tag{6.13}$$

représentation valide dans $\Im m z > 0$ (changer i en $-i$ dans $\Im m z < 0$). On voit que (6.12) est le produit de deux fonctions : l'une solution immédiate de l'équation fonctionnelle, l'autre périodique ; seul le produit des deux est méromorphe.

Passant à la construction de φ , on vérifie que la fonction

$$\varphi(\omega) = \exp \left\{ -\frac{2}{\pi} \left(\omega - \frac{\pi}{2} \right) \log \eta(\omega) + 2 \Phi(\omega) \right\}, \tag{6.14}$$

satisfait l'équation fonctionnelle (5.58) pourvu que l'on ait

$$\Phi \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) = -\Phi(\omega). \tag{6.15}$$

On a uniformisé $\log \eta$ par les coupures

$$[ia, ib] \dots \pmod{\pi/2}.$$

Montrons qu'avec le choix

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) = & \frac{4}{\pi} \sqrt{A} \cos 2\omega \int_{ia}^{ia'} + \\ & + \int_{ib'}^{ib} \frac{\omega' - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{A'}} \frac{\sin 2\omega' d\omega'}{\sin^2 2\omega' - \sin^2 2\omega}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

φ est méromorphe sur (\dot{S}) . Il suffit de vérifier que la discontinuité de $\omega \log \eta$ le long des segments $[ia, ia']$, $[ib', ib] \pmod{\pi/2}$ est exactement compensée par celle de 2Φ , mod. $2\pi i$. Ceci découle de

$$\begin{aligned} \text{Arg } \eta(ix \pm 0) &= \mp \pi, \\ a < x < a' \quad \text{ou} \quad b' < x < b. \end{aligned} \tag{6.17}$$

D'autre part, sur les segments $[a', b']$:

$$\left. \begin{aligned} \log \eta(ix + 0) + \log \eta(ix - 0) &= 0, \\ \Phi(ix + 0) + \Phi(ix - 0) &= 0, \quad a' < x < b'. \end{aligned} \right\} \tag{6.18}$$

On en déduit $\tilde{\Phi}(\omega) + \Phi(\omega) = 0$, c'est-à-dire :

$$\varphi(\omega) \tilde{\varphi}(\omega) = 1. \tag{6.19}$$

Les pôles et les zéros éventuels en $\pm ia$, $\pm ib \pmod{\pi/2}$ se déterminent en évaluant la partie singulière de Φ . Par exemple au voisinage de $\omega = ia$.

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\pi} \left(ia - \frac{\pi}{2} \right) \log \eta + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \left(ia - \frac{\pi}{2} \right) \log \frac{1}{\omega - ia} \right\}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Or η possède un pôle simple en ia d'après (5.17). Donc ia est régulier pour φ ; de même ib . Il suffit alors d'itérer la relation (5.58) pour déterminer la multiplicité des pôles et zéros de φ en $\pm ia + n \frac{\pi}{2}$

et $\pm ib + n \frac{\pi}{2}$: On trouve aisément

$$\varphi(\omega) \sim \eta^{-n} \quad \text{dans } \Im m \omega > 0. \tag{6.21}$$

On notera enfin que $\eta^{-1} \varphi$ est une fonction paire.

Nous avons donc obtenu explicitement tous les éléments qui entrent dans la composition d'une solution générale de l'équation aux différences : $R(\omega)$ est donné par (5.27), $E(\omega)$ par (5.47), $h(\omega)$ par (5.30), (5.31), $\varphi_0(\omega)$ par (6.5) et $\varphi(\omega)$ par (5.14) et (6.16). On a deux fonctions arbitraires, $E_0(\omega)$ soumise aux conditions (5.49), et $C(\omega)$ de période $\pi/2$, que seules les propriétés conjointes de croissance et d'analyticité définies section 4 permettront de déterminer.

Montrons cependant qu'avec le choix trivial $E_0 \equiv 1$, on peut déjà obtenir une fonction f qui soit méromorphe dans le plan ω , sauf à l'infini. D'abord, E/E_0 est méromorphe sur (S) : ceci découle de la méromorphie du produit

$$\varphi_0(\omega) \varphi(\omega) h(\omega)/h \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)$$

et du fait que les zéros et pôles de cette fonction sont tous de multiplicité paire. La preuve en est très simple à partir de la remarque (6.21). L'examen des figures 3, 4 et 5 suffit.

On peut enfin construire un $g_0(\omega)$ méromorphe sur (S) à condition de choisir un $C(\omega)$ convenable, c'est-à-dire tel que la multiplicité des pôles et zéros de REC soit paire. On vérifie que c'est possible, par exemple avec le choix

$$C_0(\omega) = \frac{1}{\text{ch}^2 2a - \cos^2 2\omega}. \tag{6.22}$$

La figure 6 représente, dans une certaine bande de $\Im m \omega > 0$, les pôles et zéros de la fonction correspondante

$$g_0(\omega) = \sqrt{E(\omega) R(\omega) / (\text{ch}^2 2a - \cos^2 2\omega)} \tag{6.23}$$

qui est méromorphe sur (\dot{S}) . La fonction C_0 a été choisie pour se rapprocher des conditions d'holomorphie dans la bande $0 < R\omega < \pi$, $\Im m \omega > 0$ et dans $-\frac{\pi}{2} < R\omega < \frac{3\pi}{2}$, pour $\Im m \omega$ assez grand.

Nous avons deux pôles simples en ia et $\pi + ia$, qui ne contribuent au comportement asymptotique de la fonction d'onde que par des termes évanescents. Nous sommes assurés que la solution particulière de l'équation aux différences

$$f_0(\omega) = g_0(\omega) + \tilde{g}_0(\omega) \tag{6.24}$$

est méromorphe dans le plan ω , sauf à l'infini.

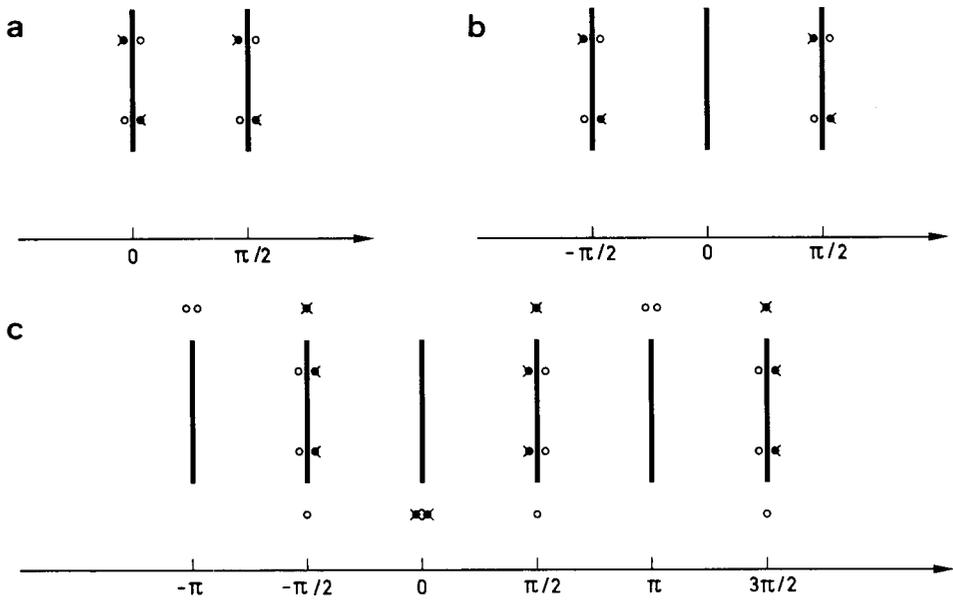


FIG. 4. — Pôles et zéros de : a) η_0 paire, période $\frac{\pi}{2}$, b) φ_0 paire, période π , c) $h(\omega)/h\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$; dans $\Im m \omega > 0$.

[Poles and zeros of : a) η_0 , b) φ_0 , c) $h(\omega)/h\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$; in the upper half plane.]

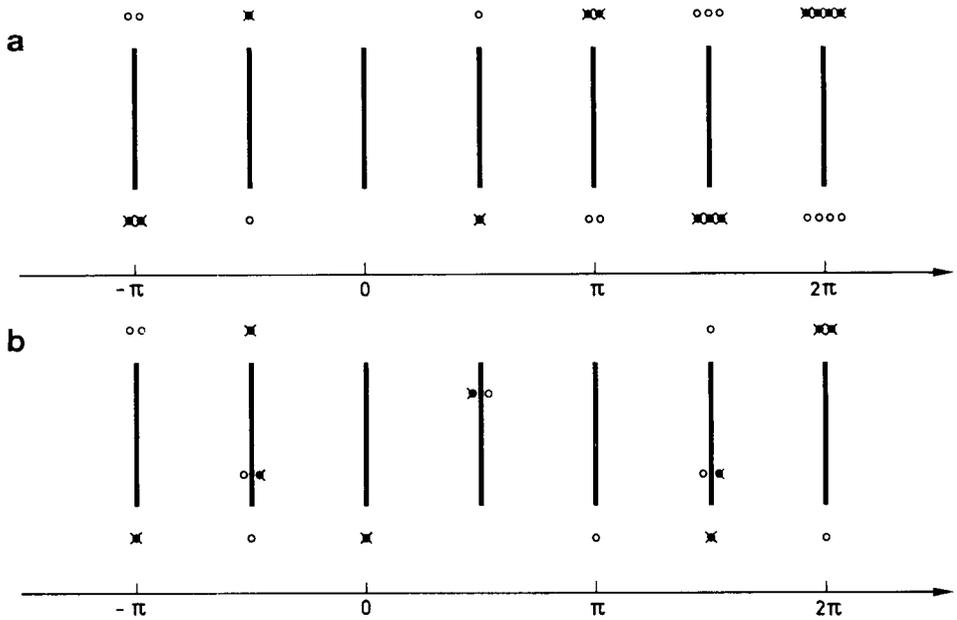


FIG. 5. — a) Pôles et zéros de $\varphi(\omega)$ dans le premier feuillet et $\Im m \omega > 0$; b) Pôles et zéros de $E/E_0 = \left(\varphi_0 \varphi h(\omega)/h\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/2}$ dans $\Im m \omega > 0$.

[a) Poles and zeros of $\varphi(\omega)$ in the first sheet (upper half plane). b) Poles and zeros of $E/E_0 = \left(\varphi_0 \varphi h(\omega)/h\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/2}$ in the upper half plane.]

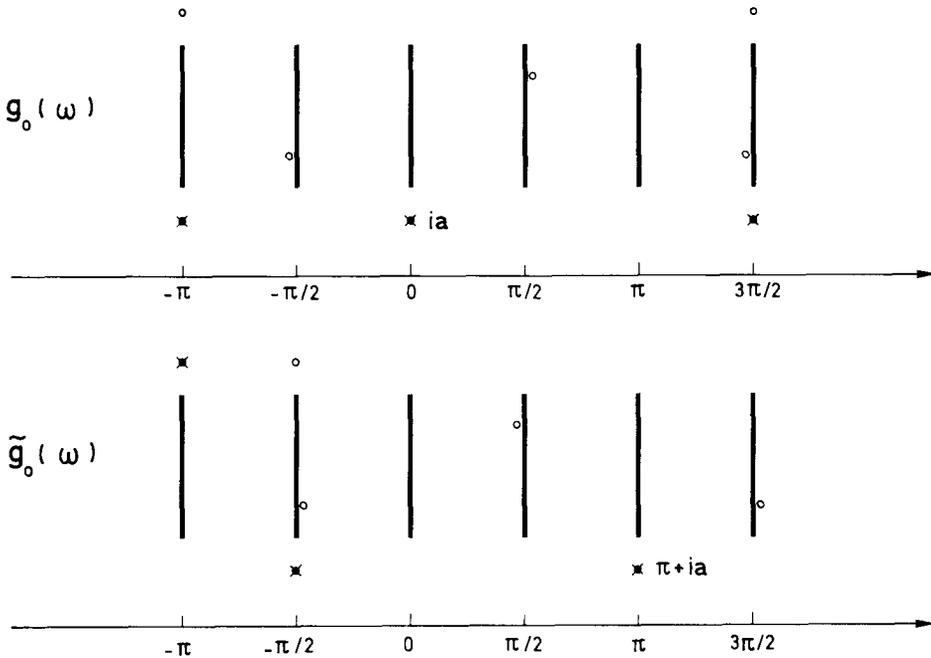


FIG. 6. — Pôles et zéros de g_0 et de son prolongement \tilde{g}_0 dans le premier feuillet et $\Im m \omega > 0$.

[Poles and zeros of g_0 and \tilde{g}_0 in the first sheet.]

Méthode de construction de l'amplitude. — La solution méromorphe exhibée en (6.24), avec le choix $E_0 \equiv 1$ et C_0 donné par (6.22), n'est évidemment pas la solution de notre problème. Nous décrivons dans ce paragraphe la méthode qui y conduit sans entrer cependant, contrairement à ce que nous avons fait jusqu'ici, dans le détail des calculs qui devraient être mis en œuvre pour parvenir à l'expression explicite de l'amplitude.

Examinons d'abord la croissance de E/E_0 donné par (5.47). Au voisinage de $\Im m \omega = +\infty$, nous avons

$$\sqrt{\Delta} \sim -\frac{1}{4} e^{-4i\omega}, \quad \log \eta = O(e^{2i\omega}) \quad (6.25)$$

et, d'après (5.30), (5.31)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} h(\omega) = e^{-2i\pi/3}. \quad (6.26)$$

Par conséquent E/E_0 se comporte comme $\sqrt{\varphi\varphi_0}$; d'après (6.5) et (6.16), nous avons

$$E/E_0 \sim \exp \{ Cte e^{2\Im m \omega} \} \quad (6.27)$$

avec la valeur de la constante

$$Cte = -\frac{2}{\pi} \int_{ia}^{ia'} + \int_{ib'}^{ib} \left(\omega' - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin 2\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} - \frac{1}{2} \int_{ia'}^{ia'+0} + \int_{ib'+0}^{ib'} \frac{\sin 2\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta'}}. \quad (6.28)$$

Cette constante est un nombre complexe fonction du seul paramètre d'énergie k^2 et ne saurait s'annuler identiquement. Puisque $g \sim \sqrt{RC\bar{E}}$, une croissance aussi rapide que celle de (6.27) se répercute sur g et ne peut être compensée par celle d'une fonction méromorphe de période $\pi/2$. Il est donc nécessaire que la compensation provienne du choix de la fonction indéterminée $E_0(\omega)$. Nous avons besoin *a)* d'un pôle arbitraire en ω_0 *b)* d'un paramètre complexe supplémentaire pour compenser (6.28); nous appellerons ce dernier ω_1 . Il est donc naturel d'introduire une fonction méromorphe élémentaire sur (S) : E_0 contiendra un facteur $H(\omega_0, \omega_1)$ (voir (6.4)) et $C(\omega)$ contiendra un facteur $\frac{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\omega_1}{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\omega_0}$.

Nous prendrons précisément

$$E_0(\omega) = \exp \{ 2 G_{\omega_0, \omega_1}(\omega) + 2 s G_{ia'+0, ib'+0}(\omega) \} \quad (6.29)$$

où s est un entier; E_0 est méromorphe sur (S) et vérifie les relations (5.49) si l'on choisit $s =$ un nombre pair :

$$E_0 \tilde{E}_0 = \exp[2s(G + \tilde{G})] = e^{-i\pi s}, \quad \text{d'après (6.7).}$$

Dans ces conditions nous avons

$$E(\omega) = \exp \{ i e^{-2i\omega} - i \frac{\pi}{3} + O(\omega e^{2i\omega}) \} \quad (6.30)$$

avec la définition de la constante λ

$$\lambda = -\frac{2}{\pi} \left(\int_{ia}^{ia'} + \int_{ib'}^{ib} \right) \left(\omega' - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin 2 \omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} - \frac{1}{2} \left(\int_{ia'+0}^{ia+0} + \int_{ib'+0}^{ib'+0} \right) - 2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} - 2s \int_{ia'+0}^{ib'+0} \frac{\sin 2 \omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \quad (6.31)$$

L'équation

$$\lambda = 0 \quad (6.32)$$

déterminera donc en principe ω_1 en fonction de ω_0 et k^2 . Puisque l'on a $\lim_{\omega \rightarrow \infty} E(\omega) = e^{-i\pi/3}$, la croissance de $f(\omega)$ sera celle de \sqrt{RC} . Comme $R(\omega)$ croît en $e^{-6i\omega}$ d'après (5.27), $C(\omega)$ devrait décroître en $e^{12i\omega}$ d'après la remarque finale de la section 4

$$(f(\omega) \sim e^{3i\omega}).$$

Or, avec le choix

$$C(\omega) = \frac{1}{\text{ch}^2 2a - \cos^2 2\omega} \cdot \frac{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\omega_1}{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\omega_0}, \quad (6.33)$$

qui nous donnerait les propriétés d'holomorphic requises dans la bande $\Re \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \Re \omega < \frac{3\pi}{2}$

(plus les pôles simples en $\omega_0, \pi - \omega_0$ et les pôles permis en ia et $ia + \pi$), la décroissance de $C(\omega)$ est insuffisante pour que $f(\omega)$ tende vers zéro à l'infini : il s'en faut d'un ordre $e^{4i\omega}$. La seule issue est l'existence d'un diviseur de période $\pi/2$ pour la somme

$$(\sqrt{E} + 1/\sqrt{E}).$$

Or, si l'entier $s/2$ est impair, nous aurons

$$\widetilde{\sqrt{E}}_0 = -1/\sqrt{E}_0$$

et, par conséquent $\sqrt{E} = -1/\sqrt{E}$.

Le quotient $(\sqrt{E} - \widetilde{\sqrt{E}})/\sqrt{\Delta}$ est donc à la fois uniforme et régulier sur les zéros de Δ . On vérifie en effet que le numérateur s'y annule, car d'après (6.7) et (6.16)

$$E(ia') = E(ib') = -1 \Rightarrow E\left(ia' + n \frac{\pi}{2}\right) = -1, \text{ etc...} \quad (6.34)$$

La solution prend alors la forme

$$f(\omega) = g(\omega) + \bar{g}(\omega)$$

avec

$$g(\omega) = \left(\frac{R(\omega) C(\omega)}{\Delta(\omega)} \right)^{1/2} \eta_0^{1/8} \left(\eta \frac{h(\omega)}{h\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} \right)^{1,4}$$

$$\exp \left\{ \frac{1}{4} (G_{ia', ia+0} + G_{ib'+0, ib'}) + \frac{1}{2} \Phi + G_{\omega_0, \omega_1} + sG_{ia'+0, ib'+0} - \frac{\omega}{2\pi} \log \eta \right\}. \quad (6.35)$$

Les diverses fonctions qui entrent dans cette expression ont été définies explicitement ; le $C(\omega)$ qui y figure est donné par (6.33). (Le C utilisé généralement plus haut est en fait C/Δ .)

Nous ne discuterons pas du tout dans cet article l'équation $\lambda = 0$. Nous sommes obligés de conjecturer ici qu'il n'existe qu'une seule valeur de l'entier s pour laquelle une solution convenable existe pour le problème de diffusion. Nous remettons à un éventuel travail ultérieur cette discussion importante et les précisions nécessaires à apporter à cette section (choix explicite des phases, calcul du résidu en ω_0 , etc.) pour obtenir la forme la plus nette de l'amplitude finale. Nous pensons cependant que la méthode est assez clairement décrite. Remarquons que la relation (6.32) est extrêmement semblable dans sa forme à celle que nous avons obtenue pour un problème à trois corps déjà cité et qui a été résolu pour le cas de l'état lié [6] et pour le cas de diffusion [7]. Pour la résolution pratique de (6.32) là aussi, l'uniformisation elliptique serait utile, bien que l'intégrale exceptionnelle

$$\int \omega \sin 2\omega / \sqrt{\Delta} \text{ fasse sortir du domaine algébrique.}$$

7. Extension de la méthode de Sommerfeld. —

La représentation de Sommerfeld pour la solution d'équations d'onde à deux dimensions consiste en une superposition d'ondes dont les vecteurs d'onde $\mathbf{k}(k_1, k_2)$ sont des nombres complexes et vérifient la relation $k_1^2 + k_2^2 = k^2$. Sous cet aspect, l'extension à N dimensions est immédiate.

Considérons la fonction d'onde (3.2) : c'est en fait une intégrale sur une sous-variété à une dimension du cercle complexe $S_1(C)$, qu'on peut écrire

$$\varphi(r_1, r_2) = \int_{(C) \in S_1} g(k_1, k_2) + \int_{(\bar{C}) \in S_1} \bar{g}(k_1, k_2) \times \exp i(k_1 r_1 + k_2 r_2) \cdot d\mu(k) \quad (7.1)$$

où (C) et (\bar{C}) désignent deux contours sur S_1 , g et \bar{g} étant deux fonctions analytiques, pas nécessairement uniformes sur S_1 . Cependant elles sont méromorphes sur le recouvrement de S_1 .

Introduisons la paramétrisation rationnelle de S_1 :

$$k_1 = \frac{k}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad k_2 = \frac{k}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (7.2)$$

et la mesure invariante $d\mu = dz/z$; g et \bar{g} sont des fonctions analytiques de z dans un plan coupé par une ligne (α) joignant 0 à ∞ . Nous les supposons méromorphes sur la surface de Riemann de g (ou

de \bar{g}). Les contours (C) et (\bar{C}) (voir Fig. 7) sont voisins respectivement de l'origine et de l'infini et coupent la ligne (L) en ces points, les pentes étant choisies de telle manière que l'exponentielle de l'intégrand décroisse lorsque $k = \infty$, quels que soient r_1 et r_2 positifs.

$$\begin{cases} (C) : z \rightarrow 0, & \text{Re } z > 0 & \text{Im } z < 0, \\ (\bar{C}) : z \rightarrow \infty, & \text{Re } z < 0 & \text{Im } z > 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Dans cette formulation, reprenons la condition aux limites (2.7) qui nous donnait (3.5). Nous obtenons

$$\int_{(C)} g(k_1, k_2) + \int_{(\bar{C})} \bar{g}(k_1, k_2) (u + v - ik_2) e^{ik_1 r_1} = 0. \quad (7.4)$$

Supposons que (C) et (\bar{C}) s'échangent l'un l'autre dans la transformation $k_2 \rightarrow -k_2, k_1 \rightarrow k_1$, c'est-à-dire dans la transformation $z \rightarrow 1/z$. Plus généralement supposons que (\bar{C}) et $(1/C)$ (notation symbolique) soient *équivalents*. Il suffirait que l'on ait

$$g(k_1, k_2) (u + v - ik_2) + \bar{g}(k_1, -k_2) (u + v + ik_2) = 0 \quad (7.5)$$

pour que (7.4) soit satisfait. De même, la condition (2.6), qui donnait (3.6), s'écrit

$$\int g + \int \bar{g} (u - v - ik_1) e^{ik_2 r_2} + v e^{ik_1 r_2} = 0. \quad (7.6)$$

Supposant que (C) + (\bar{C}) soit invariant dans l'échange $k_1 \leftrightarrow k_2$, on a donc aussi

$$\int \{ (g(k_2, k_1) + \bar{g}(k_2, k_1)) (u - v - ik_2) + v (g(k_1, k_2) + \bar{g}(k_1, k_2)) \} e^{ik_1 r_2} = 0.$$

Pourvu que (\bar{C}) et $(-1/C)$ soient équivalents, il suffira de prendre

$$\bar{g}(k_2, k_1) (u - v - ik_2) + g(k_2, -k_1) (u - v + ik_2) + v (g(k_1, k_2) + \bar{g}(k_1, -k_2)) = 0. \quad (7.7)$$

Définissant $f(k_1, k_2)$ sur $S_1(C)$ par

$$\left. \begin{aligned} g(k_1, k_2) &= k_1 \frac{u + v + ik_2}{u - v - ik_1} f(k_1, k_2) \\ \bar{g}(k_1, -k_2) &= -k_1 \frac{u + v - ik_2}{u - v - ik_1} f(k_1, k_2) \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

la relation (7.5) est vérifiée et (7.7) nous donne

$$f(-k_2, k_1) + f(k_2, -k_1) - \frac{2 iv k_1}{(u + v + ik_1)(u - v - ik_1)} f(k_1, k_2) = 0, \quad (7.9)$$

ce qui est identique à l'équation aux différences (3.8) à condition de poser $k_1 = k \cos \omega$, ou $z = e^{i\omega}$.

Les figures 7 et 8 montrent comment les contours (C) et (\bar{C}) peuvent être choisis pour que les diverses équivalences supposées soient réalisées. On peut prendre (C) et (\bar{C}) inverses l'un de l'autre par rapport à l'origine et symétriques par rapport à l'axe $\text{Arg } z = 3\pi/4$. On suppose que les pôles de $f(z)$ sont tous situés entre (C) et (\bar{C}) .

Sous la forme présentée dans cette section, on aura vu combien est immédiate à partir de (7.1) l'écriture des conditions aux limites qui donnent (7.5) et (7.7), et finalement la relation fonctionnelle (7.9) pour une fonction non uniforme sur S_1 . Toute la difficulté est du côté de la construction du domaine d'intégration, c'est-à-dire ici des contours qui doivent présenter des caractères d'équivalence (par rapport aux fonctions méromorphes à intégrer) dans les différentes réflexions $k_j \leftrightarrow -k_j$ ou $k_1 \leftrightarrow k_2$. Cette difficulté sera encore plus grande à trois dimensions ($N = 3$) et nous ne la résoudrons pas complètement dans ce travail; par contre, les relations fonctionnelles analogues à l'équation aux différences (7.9) seront obtenues aisément.

L'extension naturelle de la méthode de Sommerfeld à trois dimensions consiste à représenter des solutions

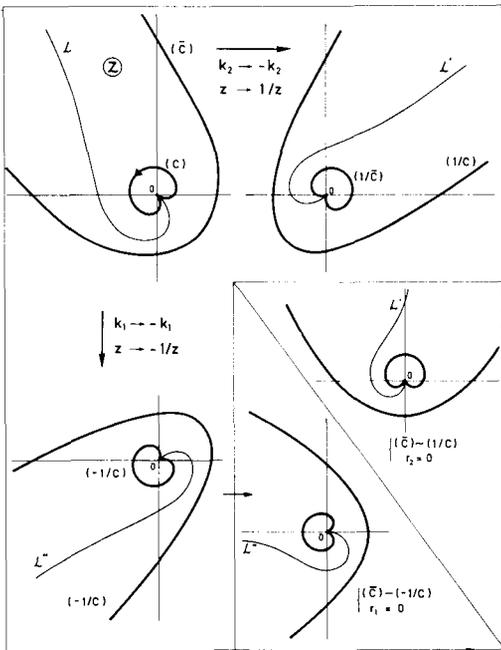


FIG. 7.

FIG. 8.

Figs. 7 et 8. — Equivalence des divers contours pour l'intégrale de Sommerfeld dans la variable z ; L' et L'' : déformations de la ligne de coupure L .

[Equivalence of various contours for Sommerfeld's integral in the z variable.]

$\psi(x_1, x_2, x_3)$ de l'équation d'onde $\Delta_3 \psi + k^2 \psi = 0$, sous la forme

$$\psi(x) = \int_{D \in S_2} d\mu(k) f(k) e^{ik \cdot x} \quad (7.11)$$

de sorte que la représentation soit valide dans le premier octant \mathbb{R}_3^+ ($x_i = r_i \geq 0$), l'intégrale étant étendue à une sous-variété D de la sphère complexe $S_2(\mathbb{C})$

$$S_2 : k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2. \quad (7.12)$$

$d\mu(k)$ étant une mesure à définir et $f(k)$ une fonction analytique sur S_2 , en général non uniforme, mais supposée méromorphe.

Pour manier les fonctions analytiques sur $S_2(\mathbb{C})$, il est commode d'introduire l'uniformisation rationnelle de la sphère définie par les deux familles de génératrices rectilignes

$$z = \frac{k_2 + ik_3}{k + k_1}, \quad \bar{z} = \frac{k_2 - ik_3}{k + k_1}. \quad (7.13)$$

$z, \bar{z} \in \mathbb{C}$; d'où la représentation paramétrique de S_2

$$k_1 = k \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad k_2 = k \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad k_3 = \frac{k}{i} \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad (7.14)$$

rationnelle dans le couple z, \bar{z} . Les points réels sont définis par $\bar{z} = z^*$, et les points à l'infini par $z\bar{z} + 1 = 0$.

Les rotations du vecteur \mathbf{k} sont induites par les transformations g de $SL(2, \mathbb{C})$ sur z et \bar{z} :

$$z \rightarrow gz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \bar{z} \rightarrow \bar{g}\bar{z}, \quad (7.15)$$

avec

$$\bar{g} = \bar{g}^{-1}; \quad g = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (7.16)$$

\bar{z} et $-1/z$ se transforment de la même façon. \bar{g} est la transformation contragrédiente de g . Si l'on définit les spineurs Z, \bar{Z}

$$Z = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad z = \frac{\eta}{\zeta}; \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}}.$$

Nous avons

$$k_{j+1} = k \frac{\bar{Z}_j Z}{\bar{Z} \cdot Z}, \quad j = 1, 2, 3 \pmod{3}, \quad (7.17)$$

en fonction des trois matrices de Pauli σ_j . Le scalaire $\bar{Z} \cdot Z$ est invariant, d'où la rotation

$$\sigma_j \rightarrow g^{-1} \sigma_j g;$$

(qui est réelle si g est unitaire : $\bar{g} = g^*$).

L'élément de surface invariant est

$$\frac{dk_2 \wedge dk_3}{k_1} = 2i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \quad (7.18)$$

Nous le prendrons comme mesure $d\mu(k)$ et nous considérerons seulement comme domaine d'intégration dans (7.11) des produits directs de contours $C \times \bar{C}$ ou des unions de tels produits.

Donnons l'expression du produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{k}(z, \bar{z})$ et $\mathbf{x}(\zeta, \bar{\zeta})$:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kx \left(1 - 2 \frac{(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(1 + z\bar{z})(1 + \zeta\bar{\zeta})} \right). \quad (7.19)$$

ou encore $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kx \cos \gamma$ avec

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \left[z, -\frac{1}{\zeta}, \zeta, -\frac{1}{\bar{z}} \right] \quad (\text{rapport anharmonique}). \quad (7.20)$$

Ces préliminaires sur S_2 nous permettent d'exprimer une solution de l'équation d'onde à trois dimensions sous la forme de l'intégrale répétée

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(x, \zeta, \bar{\zeta}) = \int_C dz \int_{\bar{C}} \frac{d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} f(z, \bar{z}) \times \exp \left\{ ikx \left(1 - 2 \frac{(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(1 + \zeta\bar{\zeta})(1 + z\bar{z})} \right) \right\}. \quad (7.21)$$

où l'on supposera $f(z, \bar{z})$ méromorphe à l'intérieur de C et de \bar{C} . On exclura que $z\bar{z} + 1$ s'annule sur $C \times \bar{C}$.

La représentation la plus proche de (3.2) serait celle-ci

$$\psi(x, \zeta, \bar{\zeta}) = \int_C dz \int_{\bar{C}} d\bar{z} \frac{1}{(1 + z\bar{z})^2} f(g_x z, \bar{g}_x \bar{z}) \times e^{-ikx \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}}, \quad (7.22)$$

où $g_x \in SL(2, \mathbb{C})$ avec $g_x = \begin{vmatrix} \bar{\zeta} & 1 \\ -1 & \zeta \end{vmatrix}$ de sorte que g_x fait tourner le vecteur $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ pour l'amener sur le vecteur $(0, 0, -1)$. On peut vérifier directement sur (7.22) l'équation des ondes en coordonnées $(x, \zeta, \bar{\zeta})$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}{x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + k^2 \psi = 0. \quad (7.23)$$

Donnons deux exemples élémentaires pour illustrer la représentation (7.21)

a) Prenons

$$f(\mathbf{k}) = \frac{2}{1 - k \cdot \bar{k}_0} = \frac{(1 + z\bar{z})(1 + z_0 \bar{z}_0)}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}$$

ce qui est l'inverse du carré de la distance entre deux points k et k_0 de la sphère unité ; c'est une fonction méromorphe des plus simples sur S_2 . Choisissons \bar{C} entourant \bar{z}_0 dans le sens négatif et C entourant z_0 dans le sens positif, sans entourer $-1/\bar{z}_0$. On obtient

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{i} \iint_{C \times \bar{C}} \frac{dk_2 \wedge dk_3}{k_1} \frac{1}{1 - k \cdot k_0} e^{ik \cdot x} \\ &= \int_C \int_{\bar{C}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 + z_0 \bar{z}_0}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)} e^{ik \cdot x} = 4 \pi^2 e^{ik \cdot x}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Cette forme du théorème de Cauchy sur S_2 serait éventuellement utile pour représenter l'onde incidente dans le problème de diffusion.

b) Autre exemple très simple ; partant de (7.22) avec $g_x = 1$ et $f \equiv \log(-z\bar{z})$. Les contours sont ainsi choisis

$$\begin{aligned} \bar{C} &: \{ \Im m \bar{z} > 0, -\alpha < \Re z < +\alpha \}; \\ C &: \{ \Im m z = +0, \dots \}. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale répétée

$$\begin{aligned} &\int_C d\bar{z} \int_C \frac{dz}{(1+z\bar{z})^2} \log(-z\bar{z}) e^{-ikx} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} = \\ &= \int_C \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \int_{C_u} \frac{du}{(1+u)^2} \log(-u) e^{-ikx} \frac{1-u}{1+u} \\ &= \pi i \times -2 \pi i \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^2} e^{-ikx} \frac{1-u}{1+u} = \pi^2 \frac{\sin kx}{kx}. \end{aligned} \tag{7.26}$$

8. L'équation fonctionnelle modulaire ($N = 3$). — Dans l'hypothèse qu'une représentation de type (7.11) soit possible pour la fonction d'onde du système à trois électrons au sens explicite dans la section précédente, nous cherchons à former des relations fonctionnelles analogues à (7.7), (7.8) qui nous aient conduits à l'équation aux différences (7.9) sur le recouvrement de S_1 . Pour $N = 2$, nous avons en (7.9) une relation linéaire entre les valeurs de $f(k)$ en des points déduits les uns des autres par rotation de $\pm \pi/2$ ou π sur le cercle S_1 , autrement dit en des points obtenus par application des opérations du groupe des rotations propres du carré sur le vecteur (k_1, k_2) . Le groupe engendré par les réflexions $k_i \leftrightarrow -k_i$ ($i = 1, 2$), $k_1 \leftrightarrow k_2$ est le groupe du carré, d'ordre 8, mais l'introduction de deux fonctions g et \bar{g} nous a permis de ne faire intervenir finalement dans les arguments que les rotations propres (groupe cyclique d'ordre 4).

De même, pour le cas $N = 3$, nous obtiendrons des relations linéaires entre les $f(k_1 k_2 k_3)$ dont les arguments seront reliés par les opérations du groupe des rotations propres du cube, d'ordre 24, qui est le groupe octaédral encore appelé S_4 . La dérivation en

est très simple : il suffit d'exprimer les conditions aux limites (2.19), (2.21) dans la représentation (7.11).

L'antisymétrie en x_1, x_2 est réalisée si nous prenons

$$\begin{aligned} \psi(x_1 x_2 x_3) &= \int_D d\mu f(k_1 k_2 k_3) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} - \\ &- \int_D f(k_1 k_2 k_3) e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1 + k_3 x_3)}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

La condition cyclique (2.12) nous impose

$$f(k_1 k_2 k_3) + f(k_3 k_1 k_2) + f(k_2 k_3 k_1) = 0. \tag{8.2}$$

Introduisons $\psi'(x_1 x_2 x_3)$, symétrisée de ψ en x_2, x_3 ; on trouve à l'aide de (8.1)

$$\begin{aligned} \psi'(x_1 x_2 x_3) &= \int d\mu (f(k_1 k_2 k_3) - f(k_3 k_1 k_2)) e^{ik \cdot x} + \\ &+ \int \dots (x_2 \leftrightarrow x_3) \\ &\equiv \int d\mu f'(k) e^{ik \cdot x} \cdot (x_2 \leftrightarrow x_3). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Introduisons l'opération J de S_{4+} , rotation ternaire du cube autour de l'axe $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; $J^3 = \mathbb{1}$.

$$J : k \rightarrow Jk \text{ ou } (k_1 k_2 k_3) \rightarrow (k_3 k_1 k_2). \tag{8.4}$$

Nos relations de symétrie \square se résument en celles-ci

$$\left. \begin{aligned} f(k) + f(Jk) + f(J^2 k) &= 0 \\ f'(k) &= f(k) - f(Jk) \end{aligned} \right\}. \tag{8.5}$$

Ces relations nous amènent à postuler l'uniformité de la fonction $f(k)$ sur S_2 dans le voisinage du point fixe de J , on dira aussi dans le voisinage de l'axe J :

$$f(J^3 k) = f(k).$$

Passons maintenant aux conditions aux limites. La relation (2.20) s'écrit

$$\begin{aligned} &\int d\mu (w - ik_3) f(k_1 k_2 k_3) \times \\ &\times \{ e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} - e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1)} \} = 0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Il suffira donc d'avoir

$$(w - ik_3) f(k_1 k_2 k_3) - (w + ik_3) f(k_2 k_1 - k_3) = 0. \tag{8.7}$$

De même, (2.21) nous donnera

$$(w' - ik_1) f'(k_1 k_2 k_3) + (w' + ik_1) f'(-k_1 k_3 k_2) = 0. \tag{8.8}$$

Evidemment les relations suffisantes (8.5) à (8.8) ne sont dérivées que moyennant des hypothèses implicites sur le domaine d'intégration D et l'analy-

ticité de f , que nous sommes loin de pouvoir préciser ici. Notre but est justement, guidé par l'analogie avec $N = 2$, de trouver les relations fonctionnelles qui permettraient de construire f et de connaître ses singularités nécessaires. Pour obtenir (8.5) il faut que D soit invariant par les rotations ternaires d'axe J , autrement dit D et JD doivent être équivalents pour l'intégration sur $f e^{ik \cdot x}$, ($x_i \geq 0$). Pour obtenir (8.7), D doit être équivalent à $I_{12} D$ lorsque $x_3 = 0$, où I_{12} est l'opération binaire de S_4 définie ainsi :

$$I_{12} : (k_1 k_2 k_3) \rightarrow (k_2 k_1 - k_3). \quad (8.9)$$

Même condition pour obtenir (8.8).

Nous montrerons plus loin que la fonction f ne peut être uniforme sur S_2 ; la notation $f(k)$ est donc indéterminée, si la branche principale de f n'est pas précisée. Il faut connaître les points de ramification afin de choisir D de sorte que f et f' y soient uniformes. Nous avons supposé que c'était le cas au voisinage de l'axe J dans le premier octant. Nous reviendrons sur ces points.

Transformons nos conditions sur f en définissant deux fonctions $\xi(k)$ et $\eta(k)$

$$\left. \begin{aligned} \eta(k) &= f(k) + j f(Jk) + j^2 f(J^2 k) \\ \xi(k) &= f(k) + j^2 f(Jk) + j f(J^2 k) \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

On a

$$\left. \begin{aligned} \xi(Jk) &= j \xi(k) \\ \eta(Jk) &= j^2 \eta(k) \end{aligned} \right\} \quad (j = e^{\frac{2i\pi}{3}}) \quad (8.11)$$

$$\left. \begin{aligned} 3f(k) &= \xi(k) + \eta(k) \\ 3f'(k) &= (1 - j)(\xi(k) - j^2 \eta(k)) \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Inversement si l'on se donne deux fonctions indépendantes, uniformes au voisinage de J sur S_2 , et vérifiant les conditions multiplicatives (8.11), les expressions (8.12) nous donnent une solution générale de (8.5).

Les relations (8.7) et (8.8) s'écrivent

$$\left\{ \begin{aligned} f(I_{12} k) &= w(k) f(k) & (8.13) \\ f'(I_{23} k) &= -w'(J^{-1} k) f'(k) & (8.14) \end{aligned} \right.$$

avec les définitions

$$w(k) = \frac{w - ik_3}{w + ik_3} \equiv w_3, \quad w'(J^{-1} k) = \frac{w' - ik_1}{w' + ik_1} \equiv w'_1. \quad (8.15)$$

D'après l'hypothèse d'uniformité autour de J et compte tenu de la relation $I_{23} J = J I_{12}$, (8.14) s'écrit encore

$$f'(J I_{12} k) = -w'(k) f'(Jk). \quad (8.16)$$

Or, d'après (8.12)

$$f'(Jk) = \frac{i}{\sqrt{3}} (\xi(k) - \eta(k)). \quad (8.17)$$

On a donc pour (8.13) et (8.16)

$$\left. \begin{aligned} \eta(I_{12} k) - \xi(I_{12} k) &= -w'(k) (\eta(k) - \xi(k)) \\ \eta(I_{12} k) + \xi(I_{12} k) &= w(k) (\eta(k) + \xi(k)) \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \xi(I_{12} k) \\ \eta(I_{12} k) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{w(k) - w'(k)}{2} & \frac{w(k) + w'(k)}{2} \\ \frac{w(k) + w'(k)}{2} & \frac{w(k) - w'(k)}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \xi(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Finalement les quatre conditions se résument dans les relations suivantes pour le spineur inconnu $u(k)$ qui détermine $f(k)$:

$$u(k) = \begin{pmatrix} \eta(k) \\ \xi(k) \end{pmatrix}, \quad 3f(k) = \xi(k) + \eta(k). \quad (8.20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u(Jk) &= \begin{vmatrix} j^2 & 0 \\ 0 & j \end{vmatrix} u(k), \quad \mathbf{k} = (k_1 k_2 k_3). \end{aligned} \right. \quad (8.21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u(I_{12} k) &= \begin{vmatrix} \frac{w_3 - w'_3}{2} & \frac{w_3 + w'_3}{2} \\ \frac{w_3 + w'_3}{2} & \frac{w_3 - w'_3}{2} \end{vmatrix} u(k). \end{aligned} \right. \quad (8.22)$$

Telles sont les équations fonctionnelles — que nous appellerons modulaires — analogues à l'équation aux différences du cas $N = 2$, pour deux fonctions inconnues dont la somme est analytique, mais, nous le verrons, non uniforme sur la sphère.

9. Groupe du cube et groupe modulaire. — Il est clair que les deux opérations J et I_{12} définies en (8.4) et (8.9) sont les générateurs de la représentation régulière du groupe des rotations propres du cube. En effet, sur la base des 24 vecteurs

$$| \mathbf{k} \rangle = | k_1 k_2 k_3 \rangle = | 1 2 3 \rangle$$

obtenus par application sur $| \mathbf{k} \rangle$ des 24 opérations de S_4 , on a

$$I_{12}^2 = 1, \quad J^3 = 1, \quad (9.1)$$

et, si l'on définit $I_2 = I_{12} J^{-1}$,

$$I_2 | 1 2 3 \rangle = I_{12} | 2 3 1 \rangle = | 3 2 1 \rangle, \quad (9.2)$$

on a $I_2^4 = 1$.

D'après Coxeter [10], ces trois relations (d'ordre 2, 3 et 4) définissent le groupe octaédral isomorphe à S_4 , groupe des permutations de 4 objets 0, 1, 2, 3. La correspondance est la suivante :

a) Les trois axes d'ordre 4 :

$$\begin{cases} I_1 = (0 2 1 3) \\ I_2 = (0 3 2 1) \\ I_3 = (0 1 3 2) \end{cases}$$

avec

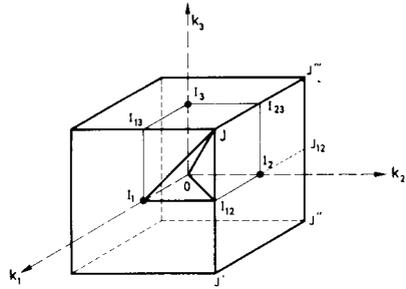
$$I_1 I_2 = I_2 I_3 = I_3 I_1 = J = (1\ 2\ 3) \quad I_2 = J I_1 J^{-1} \tag{9.3}$$

b) Les 4 axes d'ordre 3 :

$$J, J', J'', J'''$$

c) Les 6 axes d'ordre 2 : $I_{12}, I_{23}, I_{31}; J_{12}, J_{23}, J_{31}$,

$$\begin{cases} I_{12} = I_3 I_1^2 = I_2^2 I_3 = (0\ 3) \\ J_{12} = I_3 I_2^2 = I_1^2 I_3 = (1\ 2) \\ I_1 = J^{-1} I_{12}, \dots \end{cases} \tag{9.5}$$



Le quotient S_4/S_2 avec $S_2 = \{1, (0\ 3)\} = \{1, I_{12}\}$ est le groupe alterné A_4 ou tétraédral d'ordre 12, dont les générateurs peuvent être J et

$$R_2 = I_2^2 = (0\ 2)(1\ 3)$$

On posera

$$\begin{cases} R_1 = I_1^2 = J^{-1} R_2 J = (0\ 1)(2\ 3) \\ R_2 = I_2^2 = (0\ 3)(1\ 2) \\ R_3 = I_3^2 = J R_2 J^{-1} = (0\ 2)(1\ 3) \end{cases} \tag{9.6}$$

$$R_1 R_2 R_3 = 1 \tag{9.7}$$

Avec l'identité, R_1, R_2, R_3 constituent les éléments du sous-groupe invariant de S_4 (ordre 4). La figure 9 représente les divers axes du cube et une région fondamentale, en perspective et en projection stéréographique de pôle I_1 .

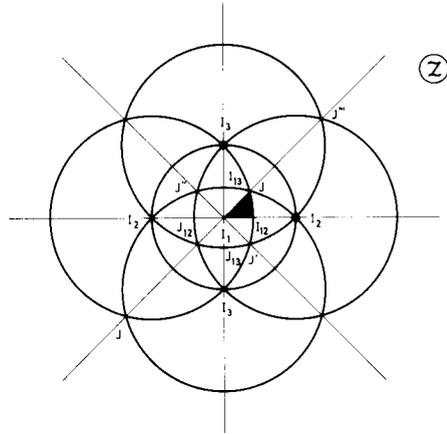


FIG. 9. — Groupe du cube : axes de rotation et région fondamentale.

[Group of the cube : axes of rotation and fundamental region.]

Revenons à nos relations fonctionnelles (8.21), (8.22); ces relations définissent deux opérations linéaires que nous noterons \mathbb{J} et \mathbb{I}_{12}

$$\begin{cases} u(Jk) = \mathbb{J}.u(k) \\ u(I_{12}k) = \mathbb{I}_{12}.u(k) \end{cases} \tag{9.8}$$

On vérifie

$$\mathbb{J}.\mathbb{J}.\mathbb{J} = 1, \quad \mathbb{I}_{12}.\mathbb{I}_{12} = 1 \tag{9.9}$$

La première relation est évidente; pour la seconde, il suffit d'utiliser (8.22)

$$u(I_{12}.I_{12}k) = \begin{vmatrix} \frac{w(I_{12}k) - w'(I_{12}k)}{2} & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} u(I_{12}k) \tag{9.10}$$

Si $k = (k_1\ k_2\ k_3)$, on a $w(I_{12}k) = w(-k_3) = 1/w_3$. Il suffit donc de vérifier l'identité :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w_3} - \frac{1}{w'_3} \right) & \left(\frac{1}{2} \frac{1}{w_3} + \frac{1}{w'_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w_3} + \frac{1}{w'_3} \right) & \left(\frac{1}{2} \frac{1}{w_3} - \frac{1}{w'_3} \right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(w_3 - w'_3) & \frac{1}{2}(w_3 + w'_3) \\ \frac{1}{2}(w_3 + w'_3) & \frac{1}{2}(w_3 - w'_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{9.12}$$

On pouvait aussi remarquer le caractère involutif des relations originales (8.7) et (8.8).

On peut considérer \mathbb{J} et \mathbb{I}_{12} comme des matrices 24×24 à éléments 2×2 ainsi définis

$$\left. \begin{aligned} \langle Jk | \mathbb{J} | k \rangle &= \begin{vmatrix} j^2 & \cdot \\ \cdot & j \end{vmatrix} \\ \langle I_{12} k | \mathbb{I}_{12} | k \rangle &= \begin{vmatrix} \frac{w(k) - w'(k)}{2} & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}, \tag{9.13}$$

les autres éléments étant nuls. Le vecteur \mathbf{k} est fixé dans la région fondamentale choisie.

Le groupe abstrait engendré par les deux générateurs \mathbb{J} d'ordre 3, et \mathbb{I}_{12} , d'ordre 2, sans relations supplémentaires, est le groupe discret infini \mathcal{H} , dit groupe modulaire [10, 11].

Une réalisation du groupe modulaire est donnée par les substitutions homographiques de \mathbb{C} engendrées par

$$I_{12} : \tau \rightarrow -1/\tau \quad J : \tau \rightarrow -1/(\tau - 1). \tag{9.14}$$

On a, par exemple,

$$I_1 = J^{-1} I_{12} : \tau \rightarrow \tau + 1. \tag{9.15}$$

L'élément général est

$$g \in \mathcal{H} \Leftrightarrow g\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \tag{9.16}$$

avec

$$ad - bc = 1 \Rightarrow (c, d) = 1. \tag{9.17}$$

Si l'on considère g comme matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$, on identifie g et $-g$.

On a l'homomorphisme de groupe $\mathcal{H} \rightarrow S_4$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{vmatrix}, \tag{9.18}$$

avec

$$a \equiv \hat{a} \pmod{4}, \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} = (0, 1, 2, 3).$$

S_4 apparaît ainsi comme un sous-groupe de congruence de \mathcal{H} . Le quotient $\mathcal{H}/S_4 = \mathcal{H}_4$ est appelé groupe modulaire de niveau 4. Ses éléments sont tels que l'on ait

$$g \in \mathcal{H}_4 \Leftrightarrow g = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod{4}. \tag{9.19}$$

Homomorphisme octaédral du groupe modulaire. —

Une réalisation classique de l'homomorphisme octaédral de \mathcal{H} [12] est fournie par la théorie des fonctions thêta. Si l'on appelle $k(\tau)$ le module de Legendre-Jacobi fonction du rapport des périodes τ , posons

$$z(\tau) = \sqrt{k(2\tau)} = \frac{\theta_2(2\tau)}{\theta_3(2\tau)}. \tag{9.20}$$

On montre aisément les lois de transformation

$$\left. \begin{aligned} I_{12} : z(\tau) &\rightarrow z\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1 - z(\tau)}{1 + z(\tau)} \\ I_1 : z(\tau) &\rightarrow z(\tau + 1) = iz(\tau) \end{aligned} \right\}, \tag{9.21}$$

constituant une représentation homographique unitaire du groupe des rotations du cube (voir Fig. 9). Un point de la sphère réelle $\mathbf{k}(z(\tau), z^*(\tau))$, selon les expressions (7.14), est soumis aux rotations du cube dans les transformations de \mathcal{H} sur la variable τ . La fonction $z(\tau)$ est holomorphe dans $\Im m \tau > 0$: c'est une fonction modulaire de niveau 4, c'est-à-dire invariante par \mathcal{H}_4 . Les figures 10 illustrent les régions fondamentales de \mathcal{H} , de \mathcal{H}_4 et de S_4 , ainsi que la décomposition du demi-plan dans leurs diverses images. La fonction $z(\tau)$ prend toute valeur une fois et une seule dans la région $-\frac{1}{2} < \Re \tau < \frac{1}{2}, |\tau| > 1$.

On obtiendra ce qu'on peut appeler une uniformisation de la sphère complexe (privée de certaines droites) en posant dans (7.14)

$$z = z(\tau), \quad \bar{z} = -\frac{1}{z(\tau')} = z(\bar{\tau}). \tag{9.22}$$

Le vecteur $\mathbf{k} \in S_2$ est une fonction méromorphe de τ et τ' sur le produit des demi-plans supérieurs. La relation entre $\bar{\tau}$ et τ' est

$$\bar{\tau} = -\frac{\tau' + 2}{2\tau' + 3} = R_3 \tau' \quad (R_3 = I_3^2). \tag{9.23}$$

La sphère réelle est donc définie par la relation

$$R_3 \tau' = -\tau^*. \tag{9.24}$$

10. Etude des relations fonctionnelles. — Nous sommes maintenant en mesure d'aborder les relations fonctionnelles du problème à trois électrons pour essayer de les résoudre. L'uniformisation modulaire de la sphère permet de donner un sens précis aux relations (8.21), (8.22) : nous cherchons des fonctions de deux variables complexes

$$u(\mathbf{k}) \equiv u(\tau, \tau'), \quad \{\mathbf{k} = \mathbf{k}(z(\tau), \bar{z} = -1/z(\tau'))\}$$

qui soient uniformes et méromorphes dans $\Im m \tau > 0, \Im m \tau' > 0$, de sorte que l'on ait

$$\left. \begin{aligned} u(I_{12} \tau, I_{12} \tau') &= \mathbb{I}_{12} \cdot u(\tau, \tau') \\ u(J\tau, J\tau') &= \mathbb{J} \cdot u(\tau, \tau') \end{aligned} \right\}, \tag{10.1}$$

Il est clair que nous pouvons obtenir ainsi la valeur de $u(k)$ en tout point du recouvrement modulaire de S_2 , à partir des valeurs de u dans la région fondamentale choisie de la sphère. Dans l'écriture de (10.8) $I_1 k$ désigne l'argument $I_{12} J^{-1} k$ obtenu par application de J^{-1} sur $k(\tau, \tau')$, puis de I_{12} ; $I_1 k$ est donc associé à $(\tau + 1, \tau' + 1)$; bien que $I_1^4 k$ et k représente le même point de S_2 , I_1^4 est différent de 1 sur le recouvrement.

On déduit de (10.9)

$$\tilde{u}(R_1 k) = \tilde{u}(I_1^2 k) = \begin{vmatrix} j i s_2 & j c_2 \\ j^2 c_2 & j^2 i s_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j i s_3 & j c_3 \\ j^2 c_3 & j^2 i s_3 \end{vmatrix} \tilde{u}(k) = \begin{vmatrix} c_2 c_3 - j^2 s_2 s_3 & i(c_2 s_3 + j^2 s_2 c_3) \\ i(c_2 s_3 + j s_2 c_3) & c_2 c_3 - j s_2 s_3 \end{vmatrix} \tilde{u}(k). \tag{10.10}$$

De même

$$\tilde{u}(R_1^{-1} k) = \tilde{u}(I_1^{-2} k) = \begin{vmatrix} c_2 c_3 - j s_2 s_3 & i(c_2 s_3 + j^2 s_2 c_3) \\ i(c_2 c_3 + j s_2 c_3) & c_2 c_3 - j^2 s_2 s_3 \end{vmatrix} \tilde{u}(k). \tag{10.11}$$

Par soustraction membre à membre de (10.10) et de (10.11) on obtient la relation remarquable

$$\tilde{u}(R_1 k) - \tilde{u}(R_1^{-1} k) = i \sqrt{3} s_2 s_3 \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{vmatrix} \tilde{u}(k). \tag{10.12}$$

On a aussi les deux autres relations obtenues par permutation circulaire.

Le découplage entre les deux composantes du spineur $\tilde{u}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}$ est complet, et nous donne donc

$$\left. \begin{aligned} \eta(R_1 k) - \tilde{\eta}(R_1^{-1} k) &= i \sqrt{3} \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \tilde{\eta}(k) \\ \tilde{\xi}(R_1 k) - \tilde{\xi}(R_1^{-1} k) &= -i \sqrt{3} \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \tilde{\xi}(k) \end{aligned} \right\} \tag{10.13}$$

auxquelles il faut adjoindre la seconde relation (10.1)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\eta}(Jk) &= j^2 \tilde{\eta}(k) \\ \tilde{\xi}(Jk) &= j \tilde{\xi}(k) \end{aligned} \right\} \tag{10.14}$$

On voit que les relations (10.14) et (10.13) entraînent les permutées circulaires. Le système (10.13), (10.14) a une plus grande simplicité apparente; d'une part il découple $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$, d'autre part il ne fait intervenir que les opérations de \mathcal{M} homomorphes à celles du groupe tétraédral (ordre 12), c'est-à-dire le groupe \mathcal{M}/S_2 , dont une région fondamentale est obtenue en réunissant \mathcal{R}_0 (région fondamentale de \mathcal{M}) et $I_{12} \mathcal{R}_0$.

D'après la définition (10.3), nous avons :

$$\sin \alpha_3 = \frac{(w - w') k_3}{\sqrt{(w^2 + k_3^2)(w'^2 + k_3^2)}}. \tag{10.15}$$

Si donc le paramètre $(w - w')$ est différent de zéro, ce qui, d'après (2.22), signifie que l'interaction spin-spin entre électrons existe effectivement, l'une au moins des trois quantités $\tilde{u}(R_j k) - \tilde{u}(R_j^{-1} k)$ est différente de zéro. La fonction \tilde{u} (ou u) ne peut reprendre la même valeur après une rotation complète du vecteur argument autour de l'un des axes de coordonnées (axes I_1, I_2 et I_3). La fonction ne peut être uniforme sur S_2 . Sur la sphère réelle, les points de ramification nécessaires de u sont les trois couples de points antipodaires appartenant à chacun des trois axes quaternaires. Dans le domaine complexe, notre

uniformisation modulaire de la sphère est en fait celle d'un recouvrement de la sphère privée des douze génératrices rectilignes rencontrant les axes de coordonnées. Les points correspondants dans l'un et l'autre des demi-plans τ (τ') sont les points paraboliques équivalents par \mathcal{M} à I_1, I_2 et I_3 :

$$\begin{aligned} I_1 (z = 0, \tau = \infty), \quad I_2 (z = 1, \tau = 0), \\ I_3 (z = i, \tau = 1), \end{aligned}$$

tous sur l'axe réel ou à l'infini, c'est-à-dire sur la frontière du domaine $\Im m \tau > 0 \times \Im m \tau' > 0$.

L'analogie de (10.13) avec la relation correspondante du cas à deux électrons est frappante. En fait ces relations définissent les mêmes multiplicateurs que ceux rencontrés en (5.3), (5.4). (On les avait appelés $\eta(\omega)$ et η^{-1} , à ne pas confondre avec la première composante du spineur u .)

En effet, partant de la première équation (10.13), explicitons-la à l'aide de (10.15). La variable k_1 est inerte; introduisons l'angle de rotation ω_1 autour de I_1 :

$$e^{2i\omega_1} = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{k_2 + ik_3}{k_2 - ik_3}. \tag{10.16}$$

Nous écrivons

$$\tilde{\eta}(k) = \tilde{\eta}(\omega_1), \quad \eta(R_1 k) = \eta(\omega_1 + \pi) \tag{10.16}$$

et notre relation se traduit par l'équation aux dilférences

$$\tilde{\eta}(\omega_1 + \pi) - \tilde{\eta}(\omega_1 - \pi) = i \sqrt{3} \frac{(w - w')^2 k_2 k_3}{\sqrt{(k_2^2 + w^2)(k_2^2 + w'^2) \dots}} \tilde{\eta}(\omega_1). \tag{10.17}$$

Si l'on appelle $\exp i\varphi_1(\omega_1)$ le multiplicateur associé à (10.17), nous obtenons

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 s_3 = \sqrt{3} \frac{(w - w')^2 (k^2 - k_1^2) \sin 2 \omega_1}{[\sin^2 2 \omega_1 + 4 w^2(w^2 + k^2 - k_1^2)] [\sin^2 2 \omega_1 + 4 w'^2(\dots)]^{1/2}}. \tag{10.18}$$

Nous avons donc la même équation que pour $N = 2$, (voir (5.9)), à condition de modifier l'énergie totale en effectuant le remplacement $k^2 - k_1^2 \rightarrow k^2$. On conjecture que l'équation aux différences résolue complètement pour le cas à deux électrons est aussi l'équation fondamentale du problème à N électrons. Evidemment, celle-ci devrait être complétée par les relations analogues à (10.14) exprimant le caractère de symétrie de la fonction d'onde.

Nous arrêterons là cet essai sur le problème à trois électrons. Nous avons obtenu les équations fonctionnelles du problème qui généralisent l'équation aux différences finies du cas à deux électrons. Elles peuvent être présentées soit sous la forme des *relations aux différences modulaires* (8.22), soit sous la forme d'une sorte de problème de Riemann pour une fonction de deux variables complexes où la discontinuité d'une fonction sur la sphère est reliée à la valeur de celle-ci en un point symétrique par rapport à l'un des axes de coordonnées. Il reste alors au moins deux importantes questions à régler.

a) Résoudre les équations fonctionnelles de sorte que les solutions soient méromorphes sur le recouvrement modulaire de S_2 , avec un pôle simple prescrit dans chacune des variables τ et τ' , localisées dans une région fondamentale. Ou trouver une fonction non uniforme sur la sphère complexe, mais méromorphe sur tout son prolongement en dehors des points de ramification

b) Définir avec précision le domaine d'intégration pour l'intégrale de Sommerfeld, de sorte que la dérivation toute analogique que nous avons effectuée puisse être justifiée. Il faut trouver des contours, soit dans les plans coupes de z et \bar{z} , soit dans les demi-plans τ , τ' , qui soient équivalents, pour les fonctions méromorphes à intégrer, dans les diverses opérations du groupe du cube.

En ce qui concerne la solution des relations fonctionnelles, remarquons qu'il s'agit d'un problème partiellement résolu par Poincaré dans sa théorie des fonctions dzêta-fuchsienues [13]. La solution est partielle, parce qu'elle ne permet la construction que sur la sphère réelle, à l'aide de séries analogues aux séries d'Eisenstein pour les fonctions automorphes. Cependant, dans le cas complexe où les matrices des transformations (8.22) sont non unitaires, les séries de Poincaré divergent. Il faudrait connaître l'état actuel de la théorie constructive des fonctions polymorphes

ayant un groupe de substitutions donné, pour aller plus loin.

Montrons rapidement comment il est possible de construire une solution de nos relations fonctionnelles sur la sphère réelle. Puisque les éléments de $\mathbb{1}_{12}$ (et de \mathbb{J} !) sont invariants par $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}/S_4$ — c'est-à-dire uniforme sur S_2 — il est naturel de considérer la famille de toutes les branches de la fonction non uniforme $\tilde{u}(k)$

$$\tilde{u}(gk) = \mathbb{T}(g) \cdot \tilde{u}(k), \quad g \in \mathcal{M}_4. \tag{10.19}$$

$\mathbb{T}(g)$ constitue évidemment une représentation de \mathcal{M}_4 . Il suffit d'examiner la région fondamentale de \mathcal{M}_4 sur la figure 10 pour collecter cinq générateurs indépendants. Ils sont associés aux substitutions paraboliques suivantes de \mathcal{M}

$$\begin{aligned} R_1^2 : & \quad \tau \rightarrow \tau + 4 \\ R_2^2 : & \quad \frac{1}{\tau} \rightarrow \frac{1}{\tau} - 4 \\ R_3^2 : & \quad \frac{1}{\tau - 1} \rightarrow \frac{1}{\tau - 1} - 4 \\ R_1 R_2 R_1^{-1} : & \quad \frac{1}{\tau - 2} \rightarrow \frac{1}{\tau - 2} - 4 \\ R_1 R_3 R_1^{-1} : & \quad \frac{1}{\tau + 1} \rightarrow \frac{1}{\tau + 1} - 4. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Comme en (10.10), on calcule aisément les matrices de $SL(2, \mathbb{C})$, génératrices de la représentation \mathbb{T} ; par exemple on a

$$\mathbb{T}(R_1^2) = \mathbb{1} + i \sqrt{3} s_2 s_3 \times \begin{vmatrix} c_2 c_3 - j^2 s_2 s_3 & i(c_2 s_3 + j^2 s_2 c_3) \\ -i(c_2 s_3 + j s_2 c_3) & c_2 c_3 - j s_2 s_3 \end{vmatrix}. \tag{10.21}$$

Puisque chaque élément de \mathcal{M}_4 s'écrit de façon unique comme un mot dont les lettres sont les diverses puissances des cinq générateurs, on peut construire toute matrice $\mathbb{T}(g)$. Celles-ci sont unitaires si k est réel.

On peut alors montrer d'après Poincaré que les séries du genre

$$\sum_{g \in \mathcal{M}_4} \frac{\mathbb{T}(g^{-1})}{(\tau_0 - g\tau)(\tau'_0 - g\tau')} \frac{dg\tau}{d\tau} \cdot \frac{dg\tau'}{d\tau'} = F_1(\tau, \tau') \tag{10.22}$$

(où la somme porte sur le quotient de \mathcal{M}_4 par le sous-groupe cyclique stabilisant le point à l'infini), sont convergentes si les valeurs propres de $\mathbb{T}(g)$ sont de module unité. On voit alors tout de suite que le rapport des deux séries

$$F(\tau, \tau') = F_1(\tau, \tau') / \sum_{g \in \mathcal{M}_4} \frac{dg\tau}{d\tau} \cdot \frac{dg\tau'}{d\tau'} \quad (10.23)$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(\gamma\tau, \gamma\tau') = \mathbb{T}(\gamma) \cdot F(\tau, \tau') \quad \gamma \in \mathcal{M}_4 \quad (10.24)$$

On peut ensuite remonter, à partir de la matrice F jusqu'à \tilde{u} , solution de (8.22). Notons aussi qu'on peut éviter le détour par \mathcal{M}_4 . On est passé par le groupe modulaire de niveau 4 afin de se ramener aux séries de matrices 2×2 . On pouvait aussi considérer les séries de Poincaré avec les matrices 8×8 de la représentation dont les générateurs sont $1, R_1, R_2, R_3$

calculés en (10.10) et qui engendrent le groupe modulaire de niveau 2, \mathcal{M}_2 :

$$\tilde{u}(R_1 k) \equiv \tilde{u}(k_1 - k_2 - k_3) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tilde{u}(k_1 k_2 k_3),$$

$$R_1 R_2 R_3 = \mathbb{1}. \quad (10.25)$$

Encore plus directement on peut construire les séries de matrices 48×48 de la représentation du groupe modulaire \mathcal{M} définie par les deux générateurs (9.13). (Chaque opération de \mathcal{M} est un produit unique $\dots I_{12} J^{\pm 1} I_{12} J^{\pm 1} \dots$) Mais répétons que ces séries ne convergent que si k est réel, ce qui implique $\bar{\tau} = -\tau^*$, où $\bar{\tau} = R_3 \tau'$. Nous ignorons s'il existe un moyen de prolonger une telle fonction définie sur la sphère réelle en une fonction méromorphe sur le recouvrement modulaire que nous avons défini.

Remerciements. — Je remercie les rapporteurs pour des indications qui m'ont été très utiles.

Bibliographie

[1] KONDO, J., *Theory of Dilute Magnetic Alloys* dans *Solid State Physics*, F. Seitz and D. Turnbull édés. (A.P.) 1969, Vol. 23, p. 183.
 [2] SOMMERFELD, A., *Optics* (Academic Press) 1964.
 [3] JOST, R., *Z. Angew. Math. Phys.* **6** (1955) 316.
 [4] NUSSENZWEIG, H. M., *Proc. R. Soc. London* **264A** (1962) 408.
 [5] MCGUIRE, J. B. et HURST, C. A., *J. Math. Phys.* **13** (1972) 1595.
 [6] GAUDIN, M. et DERRIDA, B., *J. Physique* **36** (1975) 1183.
 [7] DERRIDA, B., Thèse de 3^e cycle. Paris (1976).
 [8] OSGOOD, W., *Funktionen Theorie* (Chelsea) 1965.
 [9] WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis* (Cambridge 4^e ed.).
 [10] COXETER, H. and MOSER, W., *Generators and relations for discrete groups* (Springer) 1972.
 [11] FORD, L., *Automorphic Functions* (Chelsea) 1929.
 [12] KLEIN, F., *The Icosahedron* (Dover) 1965.
 [13] POINCARÉ, H., *Oeuvres complètes t. II* (Gauthiers-Villars) 1952. *Acta Math.* **5** (1884) 209.
 [14] WANDERS, G. and REUSS, F., *Nuovo Cimento* **10** (1972) 759.
 [15] ALBEVERIO, S., *Helv. Phys. Acta* **40** (1967) 135.

SPECTRE DU NOYAU INTÉGRAL

$$(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$$

par Michel GAUDIN

1. L'équation aux différences.

On décrit dans cet article une méthode de détermination des fonctions et valeurs caractéristiques de l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2 + 1} = 0. \quad (1)$$

Cette équation réalise l'une des schématisations les plus simples d'un certain type de problèmes de propagation d'ondes. Deux problèmes de mécanique quantique résolus récemment, un modèle unidimensionnel pour trois particules en interaction (1) et un modèle du type de Kondo pour deux électrons en présence d'un moment localisé (2), présentent des analogies étroites avec des problèmes de diffraction par un ensemble de lames minces. Si l'on dépouille ces problèmes de l'aspect contingent dû aux modèles particuliers, on rencontre le genre d'équation linéaire ici étudiée, dont le noyau est manifestement lié à l'inversion de l'opérateur $\Delta - 1$, ou au dalembertien à deux dimensions d'espace. Le contraste entre la simplicité du noyau intégral et le caractère non-trivial de la solution constitue aussi une motivation à la publication des résultats qui suivent.

Le noyau $K \equiv (2\pi)^{-1}(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$ défini sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est symétrique, réel et de trace finie. On a

$$\text{tr } K = 8^{-1/2}, \quad \text{tr } K^2 = (4\pi)^{-1}. \quad (2)$$

Il est donc du type de Hilbert-Schmidt. C'est aussi un noyau positif dont le déterminant est de genre zéro.

On introduit la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2 + 1} \quad (3)$$

et les transformées de Fourier $\tilde{\varphi}(\xi)$ et $\tilde{\varphi}(\xi, \eta)$ de $\varphi(x)$ et de $\varphi(x, y)$:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) e^{ix\xi}, \quad (4)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta) = (2\pi)^{-2} \iint dx dy \varphi(x, y) e^{i(x\xi + y\eta)}. \quad (5)$$

Leur existence résulte de la sommabilité de φ et de φ^2 prouvée section 3. Notre équation intégrale est alors équivalente à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(-\Delta + 1)\tilde{\varphi}(\xi, \eta) - \lambda\tilde{\varphi}(\eta, 0)\delta(\xi) = 0, \quad (6)$$

où Δ désigne le Laplacien à deux dimensions, augmentée de la relation

$$\tilde{\varphi}(\xi) \equiv \lambda\tilde{\varphi}(\xi, 0) \quad (7)$$

et de la condition à l'infini résultant de la continuité évidente de φ $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(\xi) = 0$. L'équation (6) est analogue à celle de Schrödinger pour un état lié et manifeste l'analogie de notre problème avec la diffraction d'une onde à deux dimensions. Selon la méthode de Sommerfeld, on représente la fonction d'onde inconnue, en coordonnées polaires $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$ sous la forme de l'intégrale de contour

$$\tilde{\varphi}(\rho, \theta) = \int_{(C)} d\omega e^{\rho \cos \omega} (\phi(\omega - \theta) + \phi(\omega + \theta)) \quad (8)$$

qui vérifie certainement l'équation (6) dans l'ouvert $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pour la représentation (8), on a tenu compte du fait que φ et $\tilde{\varphi}$ sont des fonctions paires. On suppose que la fonction transformée $\phi(\omega)$ est holomorphe au voisinage de $\Im m \omega = +\infty$; (C) est un contour embrassant la bande $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ au voisinage de $\Im m \omega = +\infty$, de sorte que $\Re \cos \omega$ soit négatif à l'infini et que l'intégrale converge.

Sur la droite $\xi = 0$, nous avons la condition de raccordement qui découle de (6)

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\varphi}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=+0} = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(\eta) \quad (9)$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\varphi}\left(\rho, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(\rho); \quad (10)$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{2}{\rho} \int_{(C)} d\omega e^{\rho \cos \omega} \left(-\frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega - \theta) + \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega + \theta) \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}. \quad (11)$$

ϕ étant borné à l'infini d'après notre hypothèse d'holomorphic, l'intégration par partie donne

$$\tilde{\varphi}(\rho) = -2 \int_{(C)} \sin \omega d\omega e^{\rho \cos \omega} \left(\phi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - \phi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \right). \quad (12)$$

Or, d'après (7) et (8), on a

$$\tilde{\varphi}(\rho) = 2\lambda \int_{(C)} \phi(\omega) d\omega e^{\rho \cos \omega}. \quad (13)$$

Il suffit donc que ϕ satisfasse l'équation aux différences

$$\phi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - \phi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{\sin \omega} \phi(\omega). \quad (14)$$

Nous chercherons des solutions méromorphes dans la bande $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, qui par conséquent le seront dans tout le plan ω en vertu de (14). Dans le voisinage de $\Im m \omega = +\infty$, la solution de croissance maximum admissible se comporte comme

$$\phi(\omega) = 1 - \lambda e^{i\omega} - \frac{2i\lambda^2}{\pi} \omega e^{2i\omega} + \dots \quad (15)$$

Supposant en effet que $\phi(\omega)$ soit fini au voisinage de $\Im m \omega = +\infty$, il suffit de résoudre l'équation aux différences (14) par approximations successives pour obtenir le développement ci-dessus, normalisé à $\phi(\infty) = 1$.

Il n'existe pas de développement de la forme $\sum_n a_n e^{in\omega}$ entraînant l'existence d'une solution périodique.

Il est commode de changer de fonction inconnue en posant

$$\phi(\omega) = \sin \omega f(\omega) \quad (16)$$

ce qui donne la relation

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) f(\omega) = 0 \quad (17)$$

avec $x(\omega) \equiv \frac{\lambda}{\cos \omega}$.

Au voisinage de $\Im \omega = +\infty$:

$$f(\omega) = e^{i\omega} - \lambda e^{2i\omega} + o(\omega e^{2i\omega}). \quad (18)$$

2. Solution méromorphe.

La méthode pour construire les solutions méromorphes d'équations aux différences secondes analogues à (17) a été exposée en détail dans des travaux antérieurs (1, 2), c'est pourquoi le développement de cette section sera rapide.

On est amené à représenter la fonction méromorphe inconnue f comme somme de deux fonctions non uniformes, mais prolongées l'une de l'autre sur une «surface de Riemann» à deux feuillets \mathfrak{S} :

$$f(\omega) = g(\omega) + \tilde{g}(\omega), \quad (19)$$

de sorte que l'on ait la récurrence

$$g\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + g\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) \tilde{g}(\omega) = 0 \quad (20)$$

et la propriété multiplicative

$$\begin{cases} g(\omega + 2\pi) = \eta^{-1}(\omega) g(\omega) \\ \tilde{g}(\omega + 2\pi) = \tilde{\eta}^{-1}(\omega) \tilde{g}(\omega). \end{cases} \quad (21)$$

On trouve aisément à l'aide de (20)

$$\eta = \frac{\sqrt{\Delta} + \lambda^2}{\sqrt{\Delta} - \lambda^2}, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{\sin^2 2\omega + \lambda^4}. \quad (22)$$

La surface de Riemann \mathfrak{S} est celle de la courbe $(\sqrt{\Delta}, \omega)$ uniformisée dans le plan ω par le système de coupures indiquées figure 1. La fonction $\sqrt{\eta}$ est méromorphe sur \mathfrak{S} : ses pôles et zéros sont simples, voir figure 1. Comme on a

$$\widetilde{\sqrt{\Delta(\omega)}} = -\sqrt{\Delta(\omega)} = \sqrt{\Delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\Delta(-\omega)}, \quad (23)$$

ceci entraîne

$$\tilde{\eta}(\omega) = \eta^{-1}(\omega) = \eta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right). \quad (24)$$

D'après (21) le produit $g(\omega) \tilde{g}(\omega)$ est 2π -périodique et uniforme. On écrira précisément

$$g(\omega) \tilde{g}(\omega) \equiv C(\omega) R(\omega) \quad (25)$$

où $C(\omega)$ est méromorphe et de période $\frac{\pi}{2}$, la fonction R se calculant directement à partir de (20)

$$R(\omega) \sim x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_3 = 2\lambda \frac{\cos \omega}{\sin^2 2\omega}, \quad x_n = x\left(\omega + n \frac{\pi}{2}\right). \quad (26)$$

On prendra $R \equiv \cos \omega$, du fait de la remarque $C(\omega) = C\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$.

Si l'on définit maintenant le quotient

$$E(\omega) = g(\omega) / \tilde{g}(\omega), \quad (27)$$

méromorphe sur \mathfrak{S} , nos relations de récurrence sont équivalentes à

$$E(\omega) \tilde{E}(\omega) = 1, \quad (28)$$

$$E(\omega) E\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = h(\omega) \equiv \eta(\omega) \frac{\sqrt{\Delta} - (\sin 2\omega + \lambda^2)}{\sqrt{\Delta} + (\sin 2\omega + \lambda^2)}. \quad (29)$$

Aidé par l'analyse des zéros et des pôles sur \mathfrak{S} , on montre les relations algébriques

$$h^2(\omega) = \eta(\omega) \eta_0(\omega) \quad \eta_0(\omega) \equiv \frac{\sqrt{\Delta} - \sin 2\omega}{\sqrt{\Delta} + \sin 2\omega} \quad (30)$$

avec les propriétés

$$\eta_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \eta_0^{-1}(\omega) = \tilde{\eta}_0(\omega). \quad (31)$$

La fonction η_0 est sans zéros ni pôles. On définit la fonction $\log \eta_0$ sur \mathfrak{S} avec $\text{Arg } \eta_0 = 0$ sur l'axe réel. On introduit le paramètre α relié à λ en posant

$$\lambda^2 = sh 2\alpha. \quad (32)$$

On aura à utiliser $\text{Arg } \eta_0(i\alpha) = -\pi$. (33)

Pour résoudre les relations (28) et (29) on pose

$$\begin{cases} E(\omega) = \eta_0^{1/4} e^{-\frac{\omega}{\pi} \log \eta_0 - F(\omega)} E_0(\omega), \\ \tilde{E}(\omega) = \eta_0^{-1/4} e^{\frac{\omega}{\pi} \log \eta_0 + F(\omega)} \tilde{E}_0(\omega) \end{cases} \quad (34)$$

avec les conditions sur la fonction indéterminée $E_0(\omega)$ sur \mathfrak{S} :

$$E_0(\omega) \tilde{E}_0(\omega) = E_0(\omega) E_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (35)$$

Le fait que \tilde{E} soit le prolongement de E sur \mathfrak{S} équivaut à la relation suivante sur les coupures

$$F(ix + 0) + F(ix - 0) + \frac{ix}{\pi} (\log \eta(ix + 0) + \log \eta(ix - 0)) = 0, \quad (36)$$

$$-\alpha < x < +\alpha.$$

Compte tenu de la valeur de $\eta(ix \pm 0)$, il suffit de prendre pour $F(\omega)$ ce qui s'appellerait l'intégrale abélienne de troisième espèce si la surface \mathfrak{S} était la surface de Riemann d'une courbe algébrique :

$$F(\omega) = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\pi} \int_0^{i\alpha+0} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \cdot \frac{\sin 4\omega}{\cos 4\omega' - \cos 4\omega}. \quad (37)$$

La fonction $\Psi(\omega) = e^{-\frac{\omega}{\pi} \log \eta - F(\omega)} \equiv \Psi(-\omega)$ vérifie bien les relations

$$\Psi(\omega) \Psi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\eta}, \quad \Psi(\omega) \tilde{\Psi}(\omega) = 1. \quad (38)$$

Elle est méromorphe sur \mathfrak{S} ; holomorphe à l'origine. On a $\text{Arg } \varphi(i\alpha) = 0$. D'après (33), nous obtenons

$$E(i\alpha) = e^{-\frac{i\pi}{4}} E_0(i\alpha). \quad (39)$$

Il existe évidemment dans la définition de F un arbitraire qui est celui du contour joignant l'origine au point $i\alpha$ et qui peut être répercuté sur la fonction indéterminée E_0 . Pour des raisons d'uniformité à l'infini dans la variable ω on prendra

$$E_0(\omega) = e^{-sG(\omega)} \equiv e^{-s\sqrt{\Delta} \int_0^{\pi/4} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 4\omega}{\cos 4\omega' - \cos 4\omega}} \quad (40)$$

où s est un nombre indéterminé. La fonction E_0 ainsi choisie vérifie les relations (35); elle est sans zéros ni pôles et uniforme sur \mathfrak{S} étant exclu comme plus haut le voisinage de l'infini.

On calcule aisément la valeur de G au points de branchement :

$$G(i\alpha) = i \frac{\pi}{4}, \quad (41)$$

et par conséquent, d'après (39) et (40)

$$E(i\alpha) = e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)}, \quad (42)$$

qui nous sera utile dans la section suivante.

Notons qu'à ce stade, nous avons tous les éléments pour construire une solution de notre équation aux différences qui soit méromorphe à distance finie. A un facteur trigonométrique près de période $\pi/2$ on a

$$f(\omega) = \sqrt{R(\omega)} (\sqrt{E(\omega)} + \widetilde{\sqrt{E(\omega)}}). \quad (43)$$

La méromorphie n'est pas évidente sur l'expression (43), étant données les définitions de $R \equiv \cos \omega$, de E , et de ses composants : E_0 donné par (40), F donné par (37), η et η_0 donnés en (22) et (30). Cependant, avec les propriétés de méromorphie sur \mathfrak{S} de Ψ et de η_0 , le fait que η_0 soit sans zéros ni pôles et que ceux de Ψ soient aisément déduits de (38), on montre facilement que la multiplicité des pôles et des zéros du produit ER est paire, ce qui suffit. Il faut bien noter que la solution (43) correspond au choix très particulier $C(\omega) \equiv 1$.

3. Les fonctions propres.

Seules les conditions conjointes de croissance et d'holomorphie dans les domaines voulus peuvent achever de déterminer les fonctions f cherchées. Pour connaître ces conditions, il faut revenir aux propriétés de φ et de $\tilde{\varphi}$. Puisque K est un noyau de Hilbert-Schmidt, φ est de carré sommable sur \mathbf{R} . D'après (1), les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi(x)(x^2 + 1)^{-1/2}$ sont simultanément sommables ou non. Or la seconde l'est en vertu de l'inégalité de Schwartz, donc la première. La fonction $\varphi(x)$ est donc holomorphe en x dans la bande $|\Im x| < 1$. La transformée de Fourier $\tilde{\varphi}$ existe, et φ décroît comme $\lambda(2\pi)^{-1} \tilde{\varphi}(0) x^{-2}$ à l'infini. $\tilde{\varphi}(\rho)$ tend vers zéro à l'infini réel au moins comme $\exp -|\rho|$. $\phi(\omega)$ et $f(\omega)$ sont donc holomorphes à l'intérieur de la bande $[-\pi, +\pi]$ tout-entière. L'examen des zéros et des pôles (voir fig. 2) de la solution (43) avec le choix $C(\omega) \equiv 1$ montre que cette solution est en fait holomorphe dans la bande voulue. On peut remplacer le contour (C) pour l'intégrale

de Sommerfeld par deux droites parallèles de sorte que l'on ait

$$\int_{(C)} d\omega \dots = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} d\omega \dots \quad -\pi < a < -\frac{\pi}{2}, \\ + \frac{\pi}{2} < b < +\pi.$$

Or l'existence de $\tilde{\varphi}(0)$ dans cette représentation entraîne que $f(\omega)$ décroisse plus vite que $e^{i\omega}$ pour $\Im m \omega = +\infty$. La croissance de la solution (43) est au contraire extrêmement rapide en général. En effet, d'après (37) et (40), on a, au voisinage de l'infini,

$$F(\omega) + s G(\omega) \simeq \Lambda \sqrt{\Delta} \simeq \Lambda \sin 2\omega \quad (45)$$

où la valeur de la quantité Λ , dépendant de s et de λ , est

$$\Lambda = \frac{4}{\pi} \int_0^{i\alpha+0} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} + s \int_0^{\pi/4} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}}. \quad (46)$$

Par conséquent, si Λ n'est pas nul, la fonction \sqrt{E} , ou son inverse, croît comme $\exp\left(\frac{\Lambda}{4} e^{2|\Im m \omega|}\right)$, croissance qui ne peut être compensée par aucune fonction $C(\omega)$ méromorphe dans tout le plan, donc rationnelle en $e^{4i\omega}$. Il est donc nécessaire pour l'existence d'une fonction f bornée à l'infini d'avoir

$$\Lambda = 0, \quad (47)$$

ce qui constitue une première relation entre s et λ .

Si la condition $\Lambda = 0$ est réalisée, on voit que \sqrt{E} se comporte à l'infini comme $\eta_0^{1/8}$, c'est-à-dire que f se comporte comme $\sqrt{R} e^{-\frac{i\omega}{2}}$, abstraction faite du facteur $C(\omega)$. Compte tenu de $R = \cos \omega$, on aurait dans le demi-plan supérieur $f(\omega) \simeq e^{-i\omega}$ ce qui est une croissance trop forte d'un facteur $e^{-2i\omega}$. Il nous faut donc trouver un facteur $\sqrt{C(\omega)}$ dont la décroissance dans le demi-plan supérieur sera au moins $e^{2i\omega}$, mais qui ne crée pas de pôle à f dans la bande $[-\pi, +\pi]$. La seule possibilité est que \sqrt{C} soit un diviseur de la fonction $\sqrt{E} \pm \sqrt{E}$ sur \mathfrak{S} (d'après (28), $\sqrt{E} \sqrt{E} = \pm 1$). Peut-on choisir le nombre s encore indéterminé de sorte que $(E \pm 1)$ s'annule en une suite infini de points congruents mod. $\frac{\pi}{2}$?

D'après (42) nous avons cette possibilité en $\pm i\alpha \pmod{\frac{\pi}{2}}$.
Par exemple avec le signe $+$:

$$E(\pm i\alpha) + 1 \equiv e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)} + 1 = 0 \implies s = 8n - 5, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (48)$$

Pour ces valeurs de s , on doit donc prendre $C = \Delta^{-1}$ ce qui donne pour f , à un facteur constant près,

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{\cos \omega}{\Delta(\omega)}} \left(\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}} \right), \quad (49)$$

définissant la fonction cherchée qui est uniforme et holomorphe dans l'intérieur de la bande $[-\pi, +\pi]$; elle décroît à l'infini en $e^{-|\operatorname{Im} \omega|}$. C'est aussi une fonction paire. En effet $\sqrt{\Delta(\omega)}$, avec les coupures choisies (voir fig. 1), est impaire. Pour connaître la parité de \sqrt{E} , il suffit de calculer $\sqrt{E(\pm i\alpha)}$. D'après (42) et (48), on a $\sqrt{E(\pm i\alpha)} = \pm i(-)^n$, \sqrt{E} est donc impaire.

En choisissant le signe $-$, on aurait

$$E(\pm i\alpha) - 1 \equiv e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)} - 1 = 0 \implies s = 8n - 1. \quad (50)$$

Mais la solution uniforme

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{\cos \omega}{\Delta}} \left(\sqrt{E} - \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \quad (51)$$

est impaire, car \sqrt{E} est alors paire : $\sqrt{E(\pm i\alpha)} = (-)^n$. Cette solution impaire de (17) donne identiquement $\varphi \equiv 0$ et ne répond pas à notre problème.

Montrons maintenant que f et φ sont en fait la même fonction. En effet, d'après (13) et la propriété d'holomorphie dans la bande $[-\pi, +\pi]$ on peut déformer le contour (C) de sorte que

$$\int_{(C)} d\omega \dots = \int_{\frac{\pi}{2} - i\infty}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} - \int_{-\frac{\pi}{2} - i\infty}^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} d\omega \dots \quad (52)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\rho) &= 2\lambda \int_{(C)} d\omega \phi(\omega) e^{\rho \cos \omega} \\ &= 2\lambda \left\{ \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) e^{-\rho \sin \omega} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \phi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) e^{\rho \sin \omega} \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

Compte tenu de la parité de $\phi(\omega) = \sin \omega f$, impaire par le choix (48), (49), on obtient

$$\tilde{\varphi}(\rho) = 4i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt \phi\left(\frac{\pi}{2} + it\right) e^{i\rho sht}. \quad (53)$$

La comparaison entre (53) et (3) donne l'identité

$$\varphi(x) = 8i\pi\lambda \phi\left(\frac{\pi}{2} + it\right), \quad x = sht;$$

ou encore, d'après (16)

$$\varphi(x) = \frac{1}{cht} f\left(\frac{\pi}{2} + it\right) \quad (54)$$

où f a l'expression suivante

$$f(\omega) = \left(\frac{\cos \omega}{\sin^2 2\omega + \lambda^4}\right)^{1/2} \\ ch \left\{ -\frac{1}{4} \log \eta_0 + \frac{\omega}{\pi} \log \eta + F + (8n - 5)G \right\}, \quad (55)$$

les éléments constituant ayant été explicités section 2. Il reste à montrer cependant qu'il existe une racine λ_n à l'équation (47) pour certains entiers n . La présentation de la fonction propre (55) pourrait sans doute être améliorée en effectuant la translation $\omega = \frac{\pi}{2} + it$ de façon à rendre manifeste le caractère réel. On pourrait aussi utiliser l'uniformisation elliptique de la section suivante pour calculer G et faciliter la question de la définition des branches des fonctions algébriques figurant dans $f(\omega)$. On aimerait encore donner une forme explicitement méromorphe sous forme de produit infini de facteurs rationnels dans une variable uniformisante, tout au moins pour la fonction E ou Ψ qui ne sont que des généralisations de la fonction Γ d'Euler sur une surface de Riemann algébrique. Il y aurait en outre le problème de la norme de φ . Nous laisserons là toutes ces questions concernant les fonctions propres pour aborder dans la section qui suit le calcul des valeurs propres de $K(x, y)$.

4. Détermination du spectre.

Il s'agit de résoudre l'équation (46) pour la valeur caractéristique λ en fonction de $s = 8n - 5$. Pour calculer les intégrales, on introduit l'uniformisation elliptique (1)

$$e^{2i\omega} = e^{-2\alpha} \operatorname{sn}\left(K + i \frac{K'}{2} - u; k\right), \quad \sqrt{k} = e^{-2\alpha}, \quad (56)$$

de la courbe $(\sqrt{\Delta}, e^{2i\omega})$. Dans les notations de Jacobi, le module est k et le rapport des périodes $\tau = \pi K'/K$, avec $q = e^{-\tau}$. On a les formules utiles

$$\sin 2\omega = (1 - k) \frac{\operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \quad \cos 2\omega = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \quad (57)$$

$$d\omega/\sqrt{\Delta} = \sqrt{k} du, \quad (58)$$

et, par conséquent

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} = \sqrt{k} K. \quad (59)$$

De même

$$S_0 = \int_0^{i\alpha+0} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} = \frac{\sqrt{k}}{2i} \int_0^{\frac{iK'}{2}} du \log(\sqrt{k} \operatorname{sn}(K + u)). \quad (60)$$

A l'aide du développement en série de Fourier (3)

$$\log(\sqrt{k} \operatorname{sn}(K + u)) = \log(2q^{1/4} \cos x)$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m} \frac{q^m}{1 + q^m} \cos 2mx, \quad x = \frac{\pi u}{2K}, \quad (61)$$

l'intégration s'effectue facilement

$$S_0 = -\frac{K\sqrt{k}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1}}{m^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\tau}{2}} \right\}. \quad (62)$$

Notre équation (46) s'écrit donc

$$\left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 - \frac{1}{12} + \sigma = \frac{s}{2} = 4n - \frac{5}{2} \quad (63)$$

avec la définition de la série σ :

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1}}{m^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(m\tau/2)}. \quad (64)$$

Comme on a $\sigma < \pi^{-2}$, on voit que les valeurs de n possibles sont restreintes aux entiers naturels. Puisque $\sigma(\tau)$ est décroissante dans la région d'intérêt, le rapport τ est la solution positive unique de l'équation transcendante

$$\left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 + \sigma(\tau) + \frac{29}{12} = 4n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (65)$$

dont on calcule numériquement les racines par itérations très rapidement convergentes. On a la formule asymptotique très précise même pour la première valeur

$$\tau \approx 4\pi \left(4n - \frac{29}{12} - \frac{2}{\pi^2} e^{-4\pi\sqrt{n}} \right)^{1/2}. \quad (66)$$

Pour le passage de τ à λ on utilise le développement

$$q = e^{-\tau} = \epsilon + 2\epsilon^5 + O(\epsilon^9), \quad 2\epsilon = \frac{1 - \sqrt{k^\tau}}{1 + \sqrt{k^\tau}}. \quad (67)$$

Puisque τ est supérieur à 15, q est inférieur à 10^{-6} . On calcule λ par les formules

$$\lambda^2 = \operatorname{sh} 2\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{k} \right), \quad (68)$$

d'où l'expression asymptotique

$$\lambda_n \sim \frac{1}{2} q^{1/8} \sim \frac{1}{2} e^{\tau/8} \sim \frac{1}{2} e^{\pi\sqrt{n}}. \quad (69)$$

Pour le calcul numérique les deux premiers termes de la série σ suffisent pour obtenir huit chiffres exacts de λ . Donnons le tableau des dix premières valeurs propres du noyau K , et leurs carrés.

n	λ_n^{-1}	λ_n^{-2}
1	.2773123771	.0769021545
2	.0488745242	.0023887191
3	.0154590510	.0002389822
4	.0061204917	.0000374604
5	.0027570549	.0000076013
6	.0013543449	.0000018342
7	.0007088009	.0000005023
8	.0003895561	.0000001517
9	.0002226755	.0000000495
10	.0001314796	.0000000172

Un bon test d'exactitude est fourni par le calcul des traces, formules (2). On obtient

$$\sum_{n=1}^9 \frac{1}{\lambda_n} = .35319887.$$

Or, la première trace est exactement

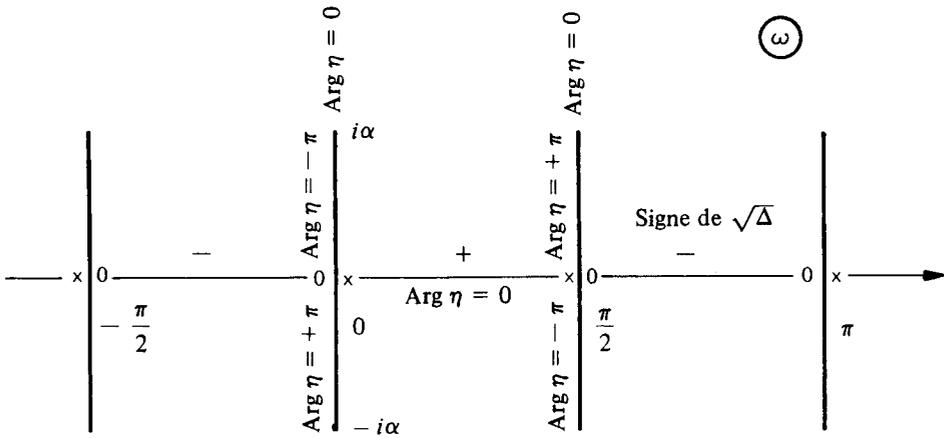


Fig. 1. — Système de coupures pour uniformiser $\sqrt{\Delta}$, η et $\log \eta$. Pôles x et zéros 0 de $\sqrt{\eta}$.

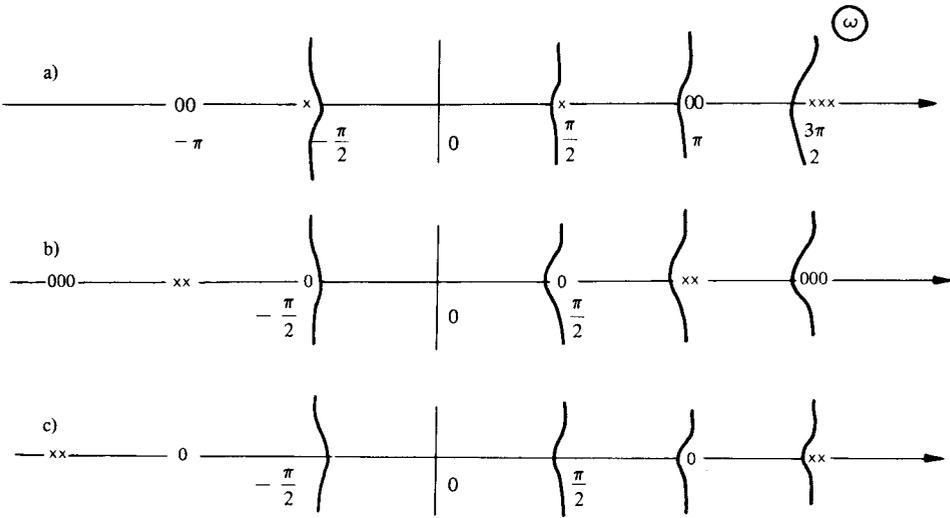


Fig. 2. — Pôles et zéros avec leur multiplicité des fonctions a) Ψ , b) g , c) \tilde{g} , dans «le premier feuillet» et au voisinage.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{8}} = .35355339 \dots$$

Une estimation, à l'aide de (69), de la série restante donne

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \approx 36.10^{-5}$$

ce qui donne un accord de la même précision : .35355 .

De même

$$\sum_{n=1}^9 \frac{1}{\lambda_n^2} = .0795774552 ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{4\pi} = .0795774715 .$$

Le reste de la série est estimé à 16.10^{-9} ce qui donne un accord de 10^{-9} .

Enfin pour la trace d'ordre quatre :

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{\lambda_n^4} = .005919704 ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} = \frac{1}{32} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) = .005919704 \dots$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. GAUDIN et B. DERRIDA, Solution exacte d'un problème modèle à trois corps. Etat lié, *Journal de Physique*, 36 (1975), 1183-1197.
- [2] M. GAUDIN, Sur le problème de deux ou trois électrons en présence d'un moment localisé, *Journal de Physique*, 39 (1978), 1143-1168.
- [3] E. WHITTAKER and G. WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge U.P. 4^e éd. (1958).

Manuscrit reçu le 8 mai 1980
révisé le 25 juin 1980.

Michel GAUDIN,
Service de Physique Théorique
CEN - Saclay
B.P. n° 2
91190 Gif-sur-Yvette.

Réduction du problème du billard quantique triangulaire

M. Gaudin

Service de Physique Théorique, C.E.N. Saclay, 91191 Gif sur Yvette, France

(Reçu le 25 octobre 1985, accepté le 10 décembre 1985)

Résumé. — Le problème du spectre d'une particule quantique dans un domaine triangulaire est ramené à la résolution d'équations aux différences finies pour trois fonctions entières de parité donnée soumises à certaines conditions de croissance. La méthode de réduction est une extension de celle utilisée par Sommerfeld pour la diffraction par un secteur angulaire. Le problème d'analyse ainsi posé reste à résoudre.

Abstract. — The problem of the spectrum of the Schrödinger equation in a triangle is reduced to finite difference equations for three entire functions of given parity subject to some conditions of increase at infinity. This method of reduction is an extension of Sommerfeld's for the diffraction of a wave by an angular sector. The problem of analysis so defined remains to be solved.

1. Le problème du billard quantique.

Le domaine de définition étant un triangle plan, le problème est de déterminer exactement les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur laplacien à deux dimensions avec les conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann.

Qu'il s'agisse des modes de vibration d'une membrane triangulaire, des niveaux d'énergie d'une particule quantique enclose dans un prisme droit, etc..., ce problème du billard quantique triangulaire en particulier a déjà fait l'objet de nombreuses études portant notamment sur le comportement asymptotique du spectre, sur les dégénérescences accidentelles, sur le caractère d'intégrabilité, qui sont fondées sur des considérations topologiques rigoureuses et des méthodes numériques efficaces. On peut se reporter à ce sujet au travail récent de Berry et Wilkinson [1] (1983), et pour l'analyse de certains cas intégrables, à celui de Itzykson et Luck [2] (1984), ainsi qu'aux références données par ces auteurs.

L'équation pour la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$ relative à l'énergie $E = k^2$

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{C} \quad (1.1)$$

est complétée par divers types de conditions sur le bord du domaine

$$i) \quad \Psi = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial \mathcal{C} \quad (\text{Dirichlet}) \quad (1.2)$$

$$ii) \quad n \cdot \partial \Psi = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial \mathcal{C} \quad (\text{Neumann}). \quad (1.3)$$

iii) L'une ou l'autre des deux conditions précédentes selon les côtés de \mathcal{C} . Par exemple, la condition ii) sur la base d'un triangle isocèle et la condition i) sur les deux côtés égaux donnent le spectre de parité positive (dans les réflexions par rapport à la base) pour le losange avec Dirichlet.

Il est évidemment possible de ramener le problème à l'étude d'un noyau intégral sur un intervalle fini, mais la méthode, qui s'applique d'ailleurs à un domaine limité par un contour fermé simple, ne peut être dite constructive au sens de l'analyse, bien qu'elle soit adaptée à un traitement numérique efficace pour les premiers niveaux. Dans le cas d'un domaine étoilé \mathcal{E} par rapport à une origine O , il existe sûrement une série de Fourier convergente de la forme

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n J_n(kr) e^{in\theta}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{E}. \quad (1.4)$$

solution de l'équation d'onde si les J_n sont les fonctions régulières de Bessel. Soit $r = f(\theta)$ l'équation polaire de la courbe simple $\partial \mathcal{E}$, le problème de Dirichlet dans \mathcal{E} se traduit alors par la condition

$$\sum_n c_n J_n(kf(\theta)) e^{in\theta} \equiv 0, \quad \forall \theta. \quad (1.5)$$

Le spectre s'obtient donc en annulant le déterminant d'une matrice infinie. Utilisant la représentation standard de J_n , on voit que ce déterminant est celui du noyau intégral continu et périodique dans les deux variables θ et φ

$$K(\theta, \varphi) = \exp \{ ikf(\theta) \cos(\theta - \varphi) \}, \quad (1.6)$$

qui a l'inconvénient de ne pas être symétrique. Le noyau K^+K aura l'avantage de la symétrie et de la réalité, et de ne plus dépendre de l'origine polaire. On trouve aisément

$$(\theta' | K^+K | \theta) \equiv J_0(k\overline{MM'}), \quad (1.7)$$

où $\overline{MM'}$ est la distance entre deux points courants $M(f(\theta), \theta)$ et $M'(f(\theta'), \theta')$ de la courbe $\partial\mathcal{E}$. Après discrétisation convenable de cette courbe selon la région du spectre à atteindre, il suffit de rechercher numériquement les zéros d'un déterminant d'ordre fini fonction du paramètre k . La comparaison avec le noyau intégral utilisé par Berry et Wilkinson resterait à faire.

Ce rappel d'un procédé général effectué, la méthode que nous allons développer pour le triangle opère dans l'espace réciproque et nous conduira à des équations aux différences finies à une variable pour des fonctions méromorphes. Son principe est dû à Sommerfeld [3] qui construit une solution suffisamment générale de l'équation des ondes (à n dimensions) par superposition des solutions élémentaires $\exp(ik \cdot \mathbf{r})$ associées à des vecteurs d'onde complexes \mathbf{k} vérifiant

$$\mathbf{k}^2 = k^2, \quad \mathbf{k} \in S_n \text{ complexe} \quad (1.8)$$

de sorte que

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_{(C)} e^{ik \cdot \mathbf{r}} f(\mathbf{k}) d\mu(\mathbf{k}). \quad (1.9)$$

où $d\mu$ est l'élément de surface d'une sous-variété (C) de S_n . En particulier, à deux dimensions, en terme des variables complexes z et $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} z = x + iy = r e^{i\theta}; & \mathbf{r}(x, y) \\ k\zeta = k_x + ik_y, & k\zeta^{-1} = k_x - ik_y, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(z, \bar{z}) = \int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta} f(\zeta) \exp\left(i\frac{k}{2}(\bar{z}\zeta + z\zeta^{-1})\right) \quad (1.11)$$

où $f(\zeta)$ est une fonction analytique de ζ dans un domaine d'uniformité excluant l'origine, et (C) un contour quelconque dans ce domaine. La représentation (1.11) n'est pas encore tout à fait celle de Sommerfeld qui a en vue de représenter des fonctions non uniformes — n'ayant pas nécessairement la période 2π en θ — c'est-à-dire non uniforme en ζ . Il pose $\zeta = e^{i\omega}$, $\omega \in \mathbb{C}$, et l'on a

$$\Psi(r, \theta) = i \int_{(C)} d\omega f(\omega) e^{ikr \cos(\omega - \theta)} \quad (1.12)$$

où $f(\omega)$ sera généralement uniforme et méromorphe dans le plan ω . Enfin, l'on effectue sur la variable d'intégration la translation $\omega \rightarrow \omega + \theta$, le contour (C) étant translaté en (C_θ) ; il se peut que dans un certain intervalle de θ , le contour (C_θ) soit équivalent au

contour (C) relativement à la fonction analytique $f(\omega)$, ce qui donne la forme finale de Sommerfeld

$$\Psi(r, \theta) = i \int_{(C')} d\omega f(\omega + \theta) e^{ikr \cos \omega}. \quad (1.13)$$

Cette forme est bien adaptée aux problèmes de diffraction par un dièdre résolu par cet auteur qui suppose $f(\omega)$ méromorphe, holomorphe pour $\text{Im } \omega$ assez grand et à croissance exponentielle dans cette variable. Le contour (C') peut alors être choisi dans le voisinage de $\text{Im } \omega = +\infty$ en reliant $\gamma' + i\infty$ à $\delta' + i\infty$, avec $-\pi < \gamma' < 0$; $\pi < \delta' < 2\pi$ et en franchissant la bande $\text{Im } \cos \omega < 0$ à distance finie. Alors que la forme (1.12) n'est valide que dans un certain créneau angulaire défini par le contour (C), la forme (1.13) en réalise le prolongement comme fonction analytique de θ en particulier au voisinage de l'axe réel.

Le problème de Dirichlet pour le secteur angulaire $0 < \theta < \alpha$ est alors facilement résolu. La fonction d'onde $\Psi(r, \theta)$ devant s'annuler sur la demi-droite $\theta = 0$, on prend la représentation antisymétrique suivante analogue à (1.13)

$$\Psi(r, \theta) = \int_{(C')} d\omega e^{ikr \cos \omega} (f(\omega + \theta) - f(\omega - \theta)) \quad (1.14)$$

qui superpose une solution définie dans le domaine physique initial à celle obtenue par réflexion par rapport à la face du dièdre $\theta = 0$. La condition de Dirichlet sur la seconde face $\Psi(r, \alpha) \equiv 0$ est ensuite réalisée par le choix

$$f(\omega + 2\alpha) = f(\omega), \quad (1.15)$$

c'est-à-dire la périodicité 2α de $f(\omega)$. La solution convenable de cette classe sera déterminée par les conditions à l'infini spatial, sachant que l'onde plane $\exp(ikr \cos(\theta - \omega_0))$ est engendrée par un élément polaire simple du type

$$f_0(\omega) = \cotan \frac{\pi}{2\alpha} (\omega - \omega_0). \quad (1.16)$$

Le point important à noter est que cette méthode construit un prolongement de la fonction d'onde en dehors de son domaine de définition initial par réflexions par rapport aux faces planes du domaine, le produit des réflexions par rapport aux deux faces du dièdre étant la rotation 2α , ce qu'exprime la périodicité (1.15). Pour le problème du triangle, cette relation fonctionnelle trouvera son extension dans les équations aux différences finies annoncées.

Notons enfin que, contrairement au cas du secteur angulaire traité par Sommerfeld selon la méthode décrite, l'on ne dispose d'aucun centre polaire vraiment adapté aux conditions aux limites du triangle, bien que le centre du cercle inscrit soit privilégié. Il est

alors commode d'utiliser l'intégrale de Sommerfeld sous la forme primitive (1.9) puisque celle-ci est très adaptée au groupe des déplacements du plan dont elle constitue une représentation. Il suffira de choisir pour $d\mu(k)$ la mesure invariante correspondante qui est précisément $d\omega$. En effet, soit A un déplacement; c'est une transformation linéaire affine

$$A : r \rightarrow r' = A.r = D\mathbf{r} + \mathbf{t} = D.(r - r_A) \quad (1.17)$$

où D est homogène c'est-à-dire rotation pure, \mathbf{t} une translation et r_A le centre de la rotation équivalente à A . D'où la représentation du groupe affine

$$\begin{aligned} \Psi \rightarrow \Psi.A = \Psi(A.r) &= \int d\mu f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}.r + \mathbf{k}.D.r} \\ &= \int d\mu f(D\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}.r_A} e^{i\mathbf{k}.r}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

induite par celle du sous-groupe compact des rotations

$$f \rightarrow f.D = f(D\mathbf{k}) e^{i\mathbf{t}.D\mathbf{k}}. \quad (1.19)$$

Sachant que

$$d\mu(D\mathbf{k}) = d\mu \Rightarrow d\mu = d\omega, \quad (1.20)$$

la forme précise de la représentation est donc

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_{(C)} d\omega f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}.r}. \quad (1.21)$$

2. Le principe de réflexion appliqué au triangle.

Rappelons d'abord que ce principe de réflexion permettant d'étendre la solution d'un problème de Dirichlet-Neumann pour un domaine polygonal à des domaines plus vastes, n'est pas seulement et n'est pas toujours un simple principe global résultant de l'unicité de la solution dans un domaine donné. Ce principe est analogue à celui de Schwartz pour les fonctions analytiques d'une variable ou les fonctions harmoniques de plusieurs variables, qui résulte des propriétés locales du prolongement analytique. En effet, une fonction de classe C^2 , $\Psi(z, \bar{z})$, solution d'une équation elliptique est analytique dans les deux variables z et \bar{z} [4]. C'est donc bien un prolongement que l'on construit par réflexion dans le domaine réel où \bar{z} est conjugué de z . On a déjà vu comment la forme de Sommerfeld (1.13) opère le prolongement en θ qui dépend essentiellement des propriétés de la transformée $f(\omega)$, comme l'uniformité en ω dans le cas du dièdre. Ceci rappelé, nous revenons à la géométrie.

Appelons R_1, R_2, R_3 les réflexions d'espace par rapport aux trois côtés d_1, d_2, d_3 du triangle \mathcal{T} . Les opérations $D_1 = R_2 R_3, D_2 = R_3 R_1, D_3 = R_1 R_2$, sont des rotations d'angle $2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3$, autour des sommets correspondants de \mathcal{T} . Puisque $R_i^2 = \mathbb{1}$, on a

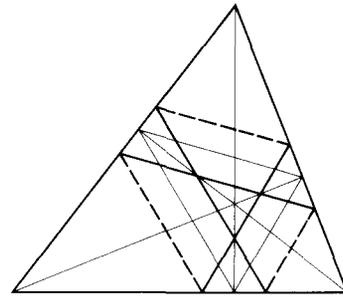
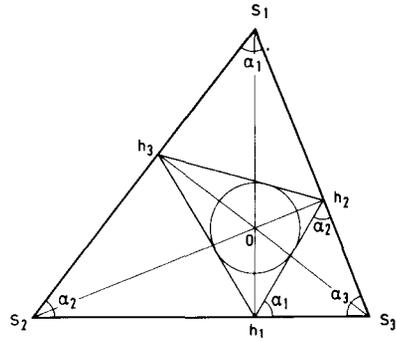


Fig. 1. — Notations et trajectoires minimales.

[Notations and minimal trajectories.]

la relation $D_1 D_2 D_3 = \mathbb{1}$. Par contré, le produit

$$T_1 = D_2 D_1 D_3 = (R_3 R_1 R_2)^2 \quad (2.1)$$

est un déplacement de rotation nulle ($\sum 2\alpha_i = 2\pi$), donc une translation. On obtient ainsi trois translations remarquables du groupe libre \mathcal{G} engendré par les réflexions, soient

$$\begin{aligned} T_1, T_2 &= (R_1 R_2 R_3)^2 = D_3 T_1 D_3^{-1}, \\ T_3 &= (R_2 R_3 R_1)^2 = D_2^{-1} T_1 D_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nous reviendrons sur leur signification. Si le triangle \mathcal{T} est aigu ($\alpha_i < \pi/2$), les trois images de \mathcal{T} par R_i , soient $R_i \mathcal{T}$, ne se chevauchent pas. La fonction Ψ se prolonge alors dans chaque image $R_i \mathcal{T}$ grâce à la relation de parité

$$\Psi(R_j \mathbf{r}) + \varepsilon_j \Psi(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad (2.3)$$

avec $\varepsilon_j = 1$ pour la condition i) de Dirichlet et $\varepsilon_j = -1$ pour la condition ii) de Neumann. Si l'on essaye de poursuivre ces opérations de réflexions successives en construisant les images du « domaine fondamental » \mathcal{T} par les opérations de \mathcal{G} , on constate rapidement que les images se chevauchent et généralement les différentes copies de \mathcal{T} ne sauraient constituer un

pavage du plan, et un pavage compatible avec la condition (2.3). La fonction obtenue par le prolongement (2.3) n'est pas uniforme, comme on le voit aisément en examinant les rotations $D_i^{p_i}$ autour du sommet i . La condition d'uniformité est p_i entier, $\alpha_i = \pi/p_i$, $\sum_i 1/p_i = 1$, ce qui n'est réalisé que pour le

triangle équilatéral $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, les deux triangles rectangles $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, et la demi-bande $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

Le long de toute ligne continue ℓ issue d'un point de \mathcal{T} , le prolongement est défini de façon unique par la suite des réflexions déterminées par l'intersection de ℓ et du côté image rencontré, pourvu que soit évité tout sommet image rencontré. Ce sera par exemple, le cas générique le long de toute demi-droite issue d'une origine O donnée dans \mathcal{T} . L'ensemble des points de branchement rencontrés par balayage dans un cercle de centre O et de rayon fini est fini. L'ensemble des coupures radiales s'étendant à l'infini qu'on peut ainsi construire est donc dénombrable mais il est dense dans les directions. On obtient ainsi un domaine d'uniformité étoilé relativement à O , dense dans le plan.

Lorsque \mathcal{T} est un triangle aigu, les translations remarquables sont reliées à la définition de la trajectoire classique de longueur minimale [8]. Soient h_1, h_2, h_3 , les pieds des hauteurs abaissées des sommets s_j sur les côtés d_j ; le triangle $h_1 h_2 h_3$ définit une trajectoire fermée de longueur $l = R \sum_j \sin 2 \alpha_j$ (R est le rayon du cercle circonscrit), qui obéit aux lois de la réflexion de l'optique géométrique. Cependant les trajectoires parallèles assez voisines constituent une famille d'hexagones dont le périmètre est le double de la longueur du trajet singulier $h_1 h_2 h_3$. L'image d'une trajectoire classique est une droite sur le revêtement plan de la surface définie par les deux faces de la plaque triangulaire \mathcal{T} . Dire que la trajectoire est fermée, équivaut à constater l'invariance dans certaines translations, du recouvrement constitué par les images de \mathcal{T} sur le revêtement plan. Comme le montre la figure 2, les translations T_i ont pour longueur commune $2l$ et les directions sont celles de $h_3 h_1$ pour T_2 , $h_1 h_2$ pour T_3 et $h_2 h_3$ pour T_1 . On voit aisément que ces directions sont celles de couloirs infinis de largeur finie ne contenant aucun sommet image et dans lesquels la fonction Ψ se prolonge par périodicité T_i .

De plus les translations engendrées par deux d'entre elles, par exemple T_1 et T_2 , définissent une double série de couloirs formant un réseau doublement périodique dans lesquelles la branche Ψ est uniforme; ce n'est plus le cas avec les trois translations.

Lorsque \mathcal{T} est obtus, les translations T_i ne définissent plus de couloirs d'uniformité rectiligne. Cepen-

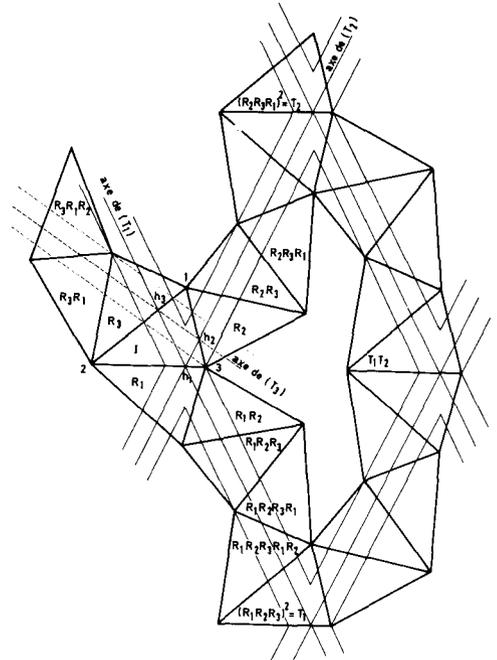


Fig. 2. — Les trois translations remarquables et les couloirs de périodicité correspondants.

[Three remarkable translations and the corresponding periodicity channel.]

tant quel que soit le triangle, il existe d'autres translations qui correspondent aux trajectoires fermées à $2n$ côtés. Il en existe une infinité et les couloirs sont de largeur non nulle. Toute translation du sous-groupe d'indice 2 engendré par les D_i s'écrit : $D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_1^{n_1} D_2^{n_2} \dots$, $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{Z}$, avec $\sum n_1 = 0, \sum n_2 = 0$. Toute opération du type $(AR_1)^2$ où A est un déplacement propre est une translation. Mais pour l'existence d'un couloir, encore faut-il que le feuillet correspondant contienne une droite. La figure 3 montre le couloir de translation défini par $T' = D_2^{-2} D_1^{-1} D_2^2 D_1 \equiv (R_1 R_3 R_1 R_2 R_3)^2$, correspondant à une famille de trajectoires décagonales.

Enfin, dernière remarque, si l'on quotiente le groupe \mathcal{G} par le sous-groupe des commutateurs, on obtient un groupe abélien d'ordre 8 (Q), ce qui identifie les trois régions $R_1 R_2 R_3, R_2 R_3 R_1, R_3 R_1 R_2$; on peut considérer les 8 régions $(\mathbb{1}, R_p, R_i, R_j, R_1 R_2 R_3)$ comme le déploiement plan de la surface d'un octaèdre dont les faces sont 8 triangles égaux à \mathcal{T} , réfléchis les uns des autres par 3 plans orthogonaux. L'union des domaines $\mathcal{G}\mathcal{T}$ est aussi le revêtement de l'octaèdre pointé aux six sommets. Les trajectoires classiques dans \mathcal{T} sont le relèvement des géodésiques sur l'octaèdre; par exemple les translations T_i correspondent à trois hexagones plans reliant les pieds des hauteurs des faces de l'octaèdre, comme le montre la figure 4.

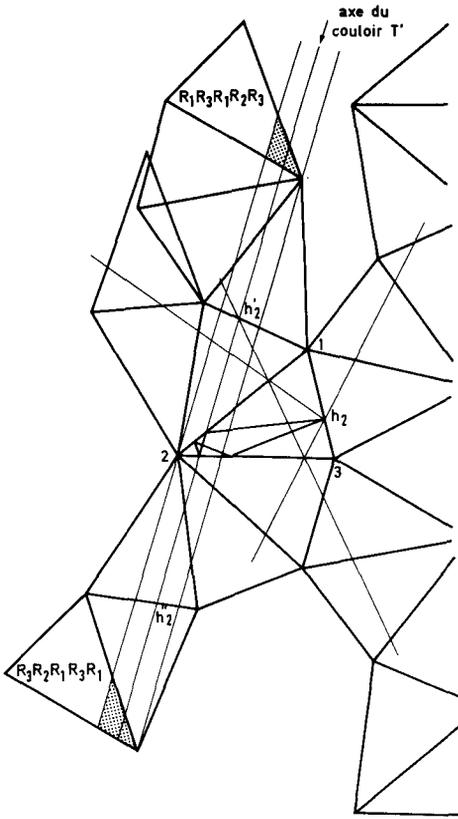


Fig. 3. — La translation $T' = (R_1 R_3 R_1 R_2 R_3)^2$ et le couloir associé. La trajectoire pentagonale singulière correspondant à l'axe du couloir.

[The translation $T' = (R_1 R_3 R_1 R_2 R_3)^2$ and associated channel. Pentagonal singular trajectory corresponding to the channel axis.]

Ces quelques considérations géométriques ne sont pas toutes d'une utilité directe pour la solution qui va être exposée ; elles donnent seulement une idée de la complexité du support de la fonction multiforme Ψ dans l'espace direct. Il semble que les choses soient plus simples dans l'espace réciproque. Nous n'avons parlé que du cas générique. On pourrait s'étendre plus longuement sur le cas où les angles α_i/π sont rationnels, constituant un système appelé pseudo-intégrable (Richens et Berry, 1980) [5].

3. Représentations de la fonction d'onde.

Le fait intéressant établi section 2 est l'existence d'au moins deux couloirs infinis — prenons ceux définis par les translations

$$T_2 = (R_1 R_2 R_3)^2 \quad \text{et} \quad T_3 = (R_2 R_3 R_1)^2$$

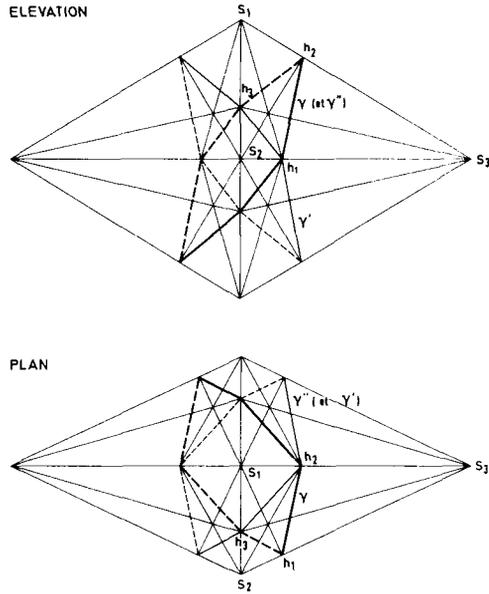


Fig. 4. — L'octaèdre (Q) et les trois géodésiques planes hexagonales.

[The octahedron (Q) and the three plane hexagonal geodesics]

dans chacun desquels la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$ est prolongeable comme fonction de période $2l$. L'axe de $T_{2,3}$ a la direction

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_3 &= \mathbf{h}_{31} = h_{31} \mathbf{u}_2 \quad (|\mathbf{u}_2| = 1) \quad (T_2) \\ \mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_{12} = h_{12} \mathbf{u}_3 \quad (|\mathbf{u}_3| = 1) \quad (T_3). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Quelle est la largeur de ces couloirs ? Les droites qui les limitent passent par les singularités les plus proches de l'axe central que sont les sommets images rencontrés en s'éloignant de celui-ci. On voit aisément que, si α_3 est l'angle le plus grand du triangle aigu \mathcal{T} , les trois couloirs de translation ont le même sommet s_3 sur leur frontière. Notons aussi que l'opération $R_1 R_2 R_3$ dont le carré est T_2 , est une « semi-translation », c'est-à-dire translation et symétrie par rapport à l'axe de translation \mathbf{u}_2 . Le couloir est donc symétrique par rapport à son axe. Les trois couloirs ont même largeur $2b$:

$$b = H_3 \cos \alpha_3 = 2R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \quad (\alpha_3 \geq \alpha_{1,2}) \tag{3.2}$$

où R est le rayon du cercle circonscrit à \mathcal{T} . H_3 désigne la longueur de la hauteur $s_3 h_3$.

Rappelons les données métriques de \mathcal{T} qui seront utiles. Soit ρ le rayon du cercle inscrit au triangle

$h_1 h_2 h_3$, dont le centre O est l'orthocentre de \mathcal{E} . Nous avons

$$Oh_1 = \frac{\rho}{\cos \alpha_1}, \quad Os_1 = \frac{\rho}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_3}. \quad (3.3)$$

$$H_1 = Oh_1 + Os_1 = \rho \frac{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}. \quad (3.4)$$

$$\rho = 2R \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \quad (3.5)$$

$$h_{12} = \rho(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) \quad (3.6)$$

$$l = h_{12} + h_{23} + h_{31} = 2\rho \sum_i \tan \alpha_i = 2\rho \prod_i \tan \alpha_i = 4R \prod_i \sin \alpha_i. \quad (3.7)$$

Comme la longueur $2l$ est la période fondamentale, nous choisirons l'unité de longueur de sorte que l'on ait

$$l = \pi. \quad (3.8)$$

L'échelle est donc fixée en fonction des angles, grâce à (3.5) ou (3.7).

Les remarques initiales de cette section nous fournissent immédiatement deux représentations de Ψ :

La première est relative au couloir (u_3) d'axe u_3 , où l'on a la périodicité

$$\Psi(\mathbf{r} + 2l \mathbf{u}_3) \equiv \Psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in (u_3). \quad (3.9)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes d'origine h_1 , axe des abscisses u_3 , $\mathbf{r}(x_3, y_3)$, il existe une série de Fourier en $x_3 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_3$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i(n x_3 + \sqrt{k^2 - n^2} y_3)} + a'_n e^{i(n x_3 - \sqrt{k^2 - n^2} y_3)} \quad (3.10)$$

convergente pour $-b < y_3 < b$ selon (3.2). ($\sqrt{k^2 - n^2}$ est définie comme fonction impaire de n , par la coupure $[-k, +k]$, et se comporte comme in à l'infini.) Ceci implique

$$|a_n| \propto |a'_n| \propto e^{-b|n|}, \quad (3.11)$$

à l'approximation exponentielle.

D'autre part, nous avons l'importante propriété de symétrie dans la semi-translation $R_2 R_3 R_1$

$$\Psi(R_2 R_3 R_1 \mathbf{r}) \equiv \Psi(x_3 + \pi, -y_3) = \varepsilon \Psi(x_3, y_3) \quad (3.12)$$

avec

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \quad (3.13)$$

D'où l'on déduit

$$a'_n = (-)^n \varepsilon a_n, \quad \forall n \quad (3.14)$$

et la représentation périodique en x_3 valide dans (u_3)

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i n x_3} (e^{i \sqrt{k^2 - n^2} y_3} + (-)^n \varepsilon e^{-i \sqrt{k^2 - n^2} y_3}). \quad (3.15)$$

La seconde représentation de Ψ est l'analogue de (3.15) mais dans la bande (u_2) , système cartésien d'origine h_1 avec $\mathbf{r}(x_2, y_2)$, $x_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_2$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i n x_2} (e^{i \sqrt{k^2 - n^2} y_2} + (-)^n \varepsilon e^{-i \sqrt{k^2 - n^2} y_2}) \quad (3.16)$$

valide pour $|y_2| < b$, avec $|c_n| \propto e^{-b|n|}$.

Or ces deux représentations doivent définir la même fonction dans l'intersection des deux couloirs (u_2) et (u_3) , qui est un losange de centre h_1 . De plus, dans ce domaine commun, la fonction doit avoir la parité ε_1 dans la réflexion R_1 ($R_1(u_2) = (u_3)$). D'où l'idée de considérer les développements de Fourier (3.15) et (3.16) comme deux expressions du théorème des résidus de Cauchy pour l'intégrale d'une même fonction méromorphe, le choix de tel ou tel contour dépendant du paramètre \mathbf{r} par le biais de la croissance.

La représentation intégrale cherchée est du type de Sommerfeld (1.21), où les nombres d'onde sélectionnés par les résidus pour donner (3.15) ou (3.16) selon le contour, sont évidemment complexes :

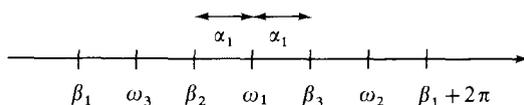
Pour (3.15) $k \cdot u_3 = n$, et pour (3.16) :

$$k \cdot u_2 = n \in \mathbb{Z}. \quad (3.17)$$

Appelons $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les azimuts (mod. 2π) des vecteurs $s_2 s_3, s_3 s_1, s_1 s_2$ (côtés orientés) et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ceux des vecteurs u_1, u_2, u_3 . On a

$$2\alpha_1 = \beta_3 - \beta_2, \quad 2\omega_1 = \beta_3 + \beta_2 \text{ et circ.} \quad (3.18)$$

Les angles sont ordonnés comme l'indique le schéma ci-dessous



Nous proposons la représentation intégrale suivante de la fonction $\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi_j(\mathbf{r})$ ainsi indexée lorsque la symétrie R_j est manifeste :

$$\Psi_3(\mathbf{r}) = \int_{(C_3)} d\omega \frac{g_3(\mathbf{k})}{\sin(\pi k \cdot u_1) \sin(\pi k \cdot u_2)} e^{i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - h_3)} \quad (3.19)$$

ou, encore plus explicitement dans la variable ω

$$\Psi_3(r_3, \theta_3) = \int_{(C_3)} d\omega \times \frac{g_3(\omega - \omega_3) e^{i k r_3 \cos(\omega - \omega_3 - \theta_3)}}{\sin(\pi k \cos(\omega - \beta_1)) \sin(\pi k \cos(\omega - \beta_2))}. \quad (3.20)$$

Le contour (C_3) doit être équivalent à un contour symétrique par rapport au point ω_3 , c'est-à-dire invariant par $R_3 : \omega \rightarrow 2\omega_3 - \omega$. Les coordonnées polaires de centre h_3 sont

$$\begin{cases} r_3 = |r - h_3| \\ \theta_3 = \text{azimut de } (r - h_3); \text{ direction origine } s_1 s_2. \end{cases} \quad (3.21)$$

La fonction $g_3(\omega)$ est supposée holomorphe entière, de période 2π et de parité ε_3 :

$$g_3(-\omega) = \varepsilon_3 g_3(\omega); \quad g_3(\omega + 2\pi) = g_3(\omega). \quad (3.22)$$

Sa croissance doit être telle que l'intégrale converge quel que soit θ_3 si r_3 est inférieur à la demi-largeur b du couloir de translation.

La symétrie R_3 est manifeste sur (3.20) en vertu des hypothèses, ou sur (3.21) après translation de la variable d'intégration $\omega - \omega_3 \rightarrow \omega$.

$$\begin{aligned} \Psi_3(r_3, \theta_3) &= \varepsilon_3 \Psi_3(r_3, -\theta_3) = \\ &= \int_{(C_3)} d\omega \frac{g_3(\omega)}{\sin(\pi k \cos(\omega + \alpha_3)) \sin(\pi k \cos(\omega - \alpha_3))} \\ &\quad \times e^{ikr_3 \cos(\omega - \theta_3)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

où (C_3) est par hypothèse symétrique par rapport à l'origine.

Il est important de noter que nous supposons l'intégrant fonction méromorphe en ω et de période 2π , c'est-à-dire fonction uniforme de k ou ζ . Cette hypothèse est bien différente de celle de Sommerfeld pour le secteur angulaire où intervient naturellement une transformée de période 2α et non 2π , c'est-à-dire non uniforme en k (cf. (1.15) et (1.10)). La contrainte de périodicité 2α , suffisante pour résoudre le problème d'un unique secteur angulaire, est impossible à réaliser pour deux angles. Dans le problème du triangle, l'équivalence des fonctions $f(\omega + 2\alpha_j)$ à $f(\omega)$ ne pourra être réalisée que modulo une fonction holomorphe. Si notre hypothèse pouvait être confirmée, par l'existence d'une solution telle; le problème du triangle fini présenterait une uniformité inconnue du cas limite du dièdre infini.

4. Les deux séries de Fourier issues de la représentation intégrale.

On montre qu'avec un choix convenable du contour (C_3) et une condition sur la croissance de $g_3(\omega)$, dans le voisinage de h_3 défini par l'intersection des couloirs (u_1) et (u_2) , l'intégrale (3.20) qui représente $\Psi_3(r)$ est égale à la somme de l'une ou l'autre série de Fourier analogues à (3.15) et (3.16) relatives ici aux couloirs (u_1) et (u_2) . Les deux séries sont formellement distinctes et s'échangent dans la réflexion R_3 de parité ε_3 ; ces résultats s'étendent évidemment par permutation circulaire de tous les indices.

Nous savons d'après (3.17) que la série (u_1) sera engendrée par les résidus des pôles qui sont parmi les zéros du dénominateur $\sin(\pi k.u_1)$ et de même la série (u_2) avec les zéros de $\sin(\pi k.u_2)$. Il faut donc qu'un contour (C_3) entourant exclusivement les pôles (u_1) dans un sens donné, soit équivalent à un contour entourant les pôles (u_2) dans le sens opposé. Etant donnée la périodicité 2π de l'intégrant, celui-ci doit donc s'annuler à l'infini. Puisque cette équivalence est postulée dans un voisinage de h_3 , c'est-à-dire pour r_3 assez petit, $\forall \theta_3$ (cf. § 3), la croissance de $g_3(\omega)$ doit être inférieure à celle de $\sin(\pi k.u_1) \sin(\pi k.u_2)$. Si $\omega = \lambda + i\mu$ avec $\text{Im } \omega = \mu \rightarrow \infty$,

$$|\sin(\pi k.u_1) \sin(\pi k.u_2)| \propto \exp\{\pi k |\sinh \mu| \times (|\sin(\alpha_3 + \lambda)| + |\sin(\alpha_3 - \lambda)|)\} \quad (4.1)$$

Donc, si l'on avait par exemple

$$|g_3(\lambda + i\mu)| < \exp(\pi k |\sinh \mu| \sin 2\alpha_3), \quad (4.2)$$

le contour (C_3) entourant positivement les pôles (u_1) , contour noté (C_{31}) est équivalent à $-(C_{32})$, entourant les pôles (u_2) négativement, puisqu'ils peuvent être déformés l'un dans l'autre par passage à l'infini, pourvu que r_3 soit assez petit. Certes l'inégalité (4.2) n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'un domaine de largeur $2b$, mais ce point sera compatible avec l'hypothèse que $g_3(\omega)$ soit entière. En effet, le facteur $\exp\{ikr_3 \cos(\omega - \theta_3)\}$ dans l'intégrant devrait atteindre la croissance $\exp(kb |\sinh \mu|)$; il faut donc vérifier les inégalités

$$b < \pi \sin 2\alpha_j, \quad \forall j \quad (b = 2R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) \quad (4.3)$$

selon (3.2). Soit, à l'aide de (3.8) et (3.7)

$$\frac{2R}{l} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 < \sin 2\alpha_j$$

ou

$$\tan \alpha_3 \sin 2\alpha_j > \frac{1}{2}, \quad \forall j \quad (4.4)$$

ce qui équivaut à $\text{Min } \alpha_j \leq \frac{\pi}{3}$; $\text{Max } \alpha_j \geq \frac{\pi}{3}$.

Reste à appliquer le théorème des résidus. Nous choisissons (C_{32}) , entourant les seuls pôles de type (u_2) dans le sens positif. Localisons les pôles dans le plan complexe

$$k.u_j = n \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad k \cos(\omega - \beta_j) = n. \quad (4.5)$$

Appelons w_n (mod. 2π) les solutions de l'équation

$$\begin{aligned} k \cos w_n &= n, \quad k \sin w_n = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (4.6) \\ w_{\bar{n}} &= w_n + \pi \quad (\bar{n} = -n) \neq 0. \end{aligned}$$

Pour une valeur donnée de l'entier $|n|$, on a donc 4 pôles

$$\pm w_n \quad \text{et} \quad \pm w_{\bar{n}} = \pm w_n + \pi \quad n \neq 0 \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |n| > k : w_n \text{ imaginaire pur} \\ |n| < k : w_n \text{ réel} \\ n = 0 : w_0 = \pm \pi/2. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Les sommations porteront sur $n \in \mathbb{Z}$, et sur les deux signes de w_n ce que nous noterons \sum'_n . Les pôles des séries (u_2) et (u_1) sont donc les suivants :

$$\begin{aligned} (u_2) : \omega &= \beta_2 + w_n; & \omega - \omega_3 &= \alpha_3 + w_n \\ (u_1) : \omega &= \beta_1 + w_n; & \omega - \omega_3 &= \alpha_3 - w_n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

D'où les deux séries représentant la fonction Ψ_3

$$\begin{aligned} \Psi_{32}(\mathbf{r}) &= -2i \sum'_n \frac{(-)^n}{k \sin w_n} \times \\ &\times \frac{g_3(\alpha_3 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(2\alpha_3 + w_n))} e^{ikr_3 \cos(\alpha_3 - \theta_3 + w_n)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{31}(\mathbf{r}) &= 2i \sum'_n \frac{(-)^n}{k \sin w_n} \times \\ &\times \frac{g_3(-\alpha_3 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(2\alpha_3 - w_n))} e^{ikr_3 \cos(\alpha_3 + \theta_3 - w_n)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\Psi_3(\mathbf{r}) = \Psi_{32}(\mathbf{r}) = \Psi_{31}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } r_3 \text{ assez petit.} \quad (4.12)$$

Il est clair que les deux séries Ψ_{32} et Ψ_{31} ne sont pas identiques et que l'on a manifestement, en vertu de (3.22),

$$\Psi_{32}(r_3, \theta_3) \equiv \varepsilon_3 \Psi_{31}(r_3, -\theta_3) \quad (4.13)$$

ce qui, d'après (4.12), exprime que Ψ_3 a la parité ε_3 dans la réflexion R_3 .

Les séries (4.10) et (4.11) sont des séries de Fourier, Ψ_{32} dans la variable d'abscisse sur l'axe \mathbf{u}_2 , Ψ_{31} dans l'abscisse sur \mathbf{u}_1 . La conversion des coordonnées polaires aux cartésiennes définies par (u_2) ou (u_1) se fait à l'aide de la figure 5. Nous avons le formulaire (à étendre par permutation circulaire)

$$y_2 : \text{ordonnée de } M(\mathbf{r}) \text{ par rapport à } \mathbf{u}_2$$

$$y_2 = r_3 \sin(\theta_3 - \alpha_3) = r_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1) \quad (4.14)$$

$$x_2(h_3) : \text{abscisse de } M \text{ sur } \mathbf{u}_2 \text{ avec l'origine } h_3,$$

$$\begin{cases} x_2(h_3) = r_3 \cos(\theta_3 - \alpha_3) \\ x_2(h_1) = r_1 \cos(\theta_1 + \alpha_1) \end{cases} \quad (4.15)$$

$$x_2(h_3) - x_2(h_1) = h_{13}. \quad (4.16)$$

On obtient ainsi une écriture plus familière de nos séries de Fourier

$$\begin{aligned} \Psi_{32} &= -2i \sum'_n \frac{(-)^n}{\sqrt{k^2 - n^2}} a_3(w_n) \times \\ &\times e^{in x_2(h_3) + i\sqrt{k^2 - n^2} y_2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

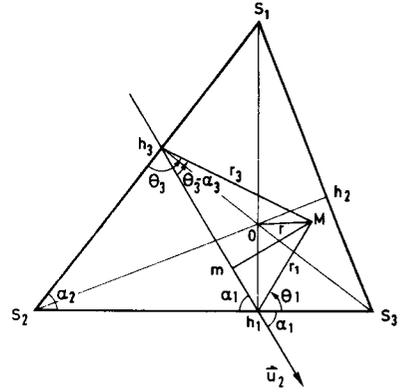


Fig. 5. — Coordonnées polaires de M, de centres h_1 ou h_3 . Coordonnées cartésiennes : axe des abscisses \mathbf{u}_2 .

$$\overline{mM} = y_2, \quad \overline{h_3m} = x_2(h_3), \quad \overline{h_1m} = x_2(h_1).$$

[Polar coordinates of M, relative to the centres h_1 or h_3 . Cartesian coordinates : x-axis \mathbf{u}_2 .]

$$\begin{aligned} \Psi_{31} &= 2i \sum'_n \frac{(-)^n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \varepsilon_3 a_3(-w_n) \times \\ &\times e^{in x_1(h_3) + i\sqrt{k^2 - n^2} y_1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec la définition des coefficients

$$\begin{cases} a_3(w_n) = \frac{g_3(\alpha_3 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(2\alpha_3 + w_n))} \\ \varepsilon_3 a_3(-w_n) = \frac{g_3(-\alpha_3 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(2\alpha_3 - w_n))}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Comme convenu \sum'_n somme sur les deux signes de w_n , soit du radical $\sqrt{k^2 - n^2}$, toujours considéré comme fonction impaire de n , selon (4.6).

Avant d'exploiter l'information contenue dans les formules (4.17) à (4.19), revenons à la question du contour (C_3) bien que la question de principe soit résolue : (C_{32}) entoure dans le sens positif la suite infinie des pôles $\beta_2 + w_{n_2}$ sans entourer la suite $\beta_1 + w_{n_1}$. Ceci implique qu'ils soient distincts. Pas de problème pour les pôles imaginaires puisque $\beta_2 - \beta_1 = 2\alpha_3$ est strictement compris entre 0 et π , si le triangle est aigu. (Le cas du triangle rectangle est donc un cas limite, mais le problème est alors équivalent à celui du triangle isocèle aigu, ce qui élimine la difficulté). Quant aux pôles sur l'axe réel, ils sont en nombre fini d'après l'inégalité (4.8) et les coïncidences

$$k.u_1 = n_1, \quad k.u_2 = n_2 \in \mathbb{Z}$$

ou

$$w_{n_1} - w_{n_2} = 2\alpha_3, \quad (4.20)$$

ne peuvent être qu'accidentelles. Il est difficile d'en dire plus à ce stade, car nous ne savons rien de l'exis-

tence effective de tel pôle. Il se peut qu'une certaine famille de résidus soient nuls. Cependant, si nous anticipons sur les résultats de la section 6, il est probable que les pôles doubles soient génériquement absents. L'existence d'une relation fonctionnelle linéaire telle que (6.5) entre les trois fonctions entières $g_j(\omega - \omega_j)$ entraîne que g_3 s'annule si $k.u_1 = n_1$, $k.u_2 = n_2$, $k.u_3 \neq n_3 \in \mathbb{Z}$, et par conséquent le pôle correspondant $\omega = \beta_1 + w_{n_1} = \beta_2 + w_{n_2}$ restera simple dans l'intégrant (3.19). Même pour le cas exceptionnel où l'on puisse avoir simultanément

$$k.u_1 = n_1, \quad k.u_2 = n_2, \quad k.u_3 = n_3 \in \mathbb{Z}, \quad (4.21)$$

on évite encore le pôle double en imposant que g_j s'annule sur les affixes en question. Notons que (4.21) implique l'existence de trois entiers relatifs (premiers entre eux si l'on veut) tels que

$$\sum_j n_j \sin 2\alpha_j = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{\text{circ.}} n_1 h_{23} = 0 \quad (4.22)$$

et détermine $\mathbf{k}(n_1, n_2, n_3)$. La suite discrète de fonction d'onde élémentaires $\exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ possède alors la propriété de périodicité dans les trois couloirs de translation (u_j). On peut l'interpréter comme la quantification semi-classique, sur la surface de l'octaèdre (Q) de la section 2, des trois familles de géodésiques hexagonales couvrant le domaine obtenu par projection sur (Q) des trois couloirs de translation. Les niveaux de cette famille sont repérés par un seul nombre quantique m :

$$k^2 = m^2 \frac{1}{\sin^2 2\alpha_3} \times \\ \times (n_1^2 + n_2^2 - 2n_1 n_2 \cos 2\alpha_3) \equiv \text{circ.} \quad (4.23)$$

Ceci ne vaut que pour la famille de triangles vérifiant (4.22). Ce n'est que dans le cas du triangle équilatéral ($\alpha_j = \pi/3$) qu'il est possible de trouver 3! fonctions élémentaires dégénérées en énergie pour n_j donnés et vérifiant $\sum_j n_j = 0$, et de réaliser par superposition les

conditions aux limites de \mathcal{C} . Dans les notations de la section 5, ceci correspondra à la solution $a(w_n) = 0$, sauf pour $n = \pm n_1, \pm n_2, \pm n_3$, où l'on aura $a(w_n) \propto \sqrt{k^2 - n^2}$.

Donnons enfin un exemple d'hypothèse qui entraînerait la séparation des pôles des deux séries pour un intégrant donné par un contour très simple. Choisissons les $g_j(\omega)$ de sorte que les résidus soient nuls pour $|n| < n_0$, où n_0 est le plus petit entier vérifiant

$$k \sin \alpha_1 < n_0, \quad k \sin \alpha_3 < n_0 \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3). \quad (4.24)$$

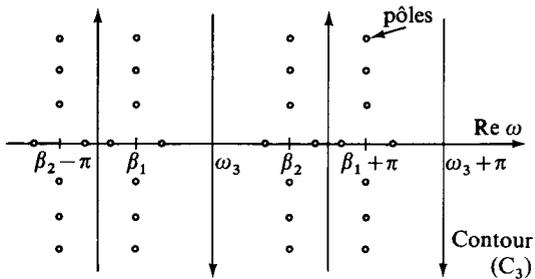
On en déduit, pour les pôles réels,

$$|w_n| < \text{Inf} \left(\alpha_1, \frac{\pi}{2} - \alpha_3 \right) \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_3 \leq \frac{\pi}{6} \quad (n > 0). \quad (4.25)$$

On peut alors choisir pour (C_3) les quatre droites

$$\begin{cases} \text{Re } \omega - \omega_3 = 0, \pi; & \text{Im } \omega \text{ décroît de } +\infty \text{ à } -\infty. \\ \text{Re } \omega - \omega_3 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; & \text{Im } \omega \text{ croît de } -\infty \text{ à } +\infty. \end{cases}$$

Le contour (C_3) est bien symétrique comme postulé section 3. Les droites séparent manifestement les pôles imaginaires des deux séries $\text{Re } \omega = \beta_1, \beta_1 + \pi$ et $\text{Re } \omega = \beta_2, \beta_2 + \pi$, mais elles séparent aussi les pôles réels en vertu de (4.25), ce qu'illustre la figure



5. Les conditions de cohérence.

Nous venons de construire trois fonctions de \mathbf{r} , $\Psi_f(\mathbf{r})$, dont les représentations intégrales (3.19) et circ. ont un domaine de définition commun contenant l'orthocentre de \mathcal{C} , et prolongeables chacune dans des couloirs de périodicité communs à chaque paire de fonctions. Or ces trois fonctions sont par hypothèse identiques à la fonction d'onde cherchée.

L'identification des développements de Fourier en x_1 des fonctions $\Psi_{21}(r_2, \theta_2)$ et $\Psi_{31}(r_3, \theta_3)$, convergents dans le couloir commun (u_1), nous donne simplement, selon (4.17) et (4.18)

$$\varepsilon_3 a_3(-w_n) e^{inx_1(\theta_3)} \equiv -a_2(w_n) e^{inx_1(\theta_2)} \quad (5.1)$$

et les deux autres analogues. D'après (4.16), on en déduit

$$\varepsilon_3 a_3(-w_n) = -a_2(w_n) e^{inh_{23}} \text{ et circ.} \quad (5.2)$$

Pour une même valeur de n les deux signes de w_n sont admissibles :

$$\varepsilon_3 a_3(w_n) = -a_2(-w_n) e^{inh_{23}}. \quad (5.3)$$

On déduit de (5.2) et (5.3)

$$\frac{a_1(-w_n)}{a_1(w_n)} = \frac{a_2(-w_n)}{a_2(w_n)} = \frac{a_3(-w_n)}{a_3(w_n)} = \zeta(w_n) \quad (5.4)$$

où ζ_n désigne la valeur commune des rapports. Substituant $a_j(-w_n)$ dans (5.2), on obtient

$$a_3(w_n)/a_2(w_n) = -\varepsilon_3 \zeta(w_n) e^{inh_{23}}. \quad (5.5)$$

Effectuant le produit circulaire, compte tenu de (3.7) avec la propriété et (3.8), il vient

$$\zeta^3(w_n) = - \varepsilon(-)^n. \tag{5.6}$$

$$a(-w_n) = \zeta_n a(w_n) \tag{5.9}$$

La seule solution compatible avec la symétrie (3.12) est

$$\zeta_n = \zeta(w_n) = - \varepsilon(-)^n \tag{5.7}$$

et la définition des trois nombres réels

$$t_3 = \frac{1}{3}(h_{23} - h_{13}), \text{ etc...} \tag{5.10}$$

qui est justement (3.14). On peut alors exprimer les trois coefficients en fonction d'un seul

vérifiant

$$t_2 - t_3 = \frac{\pi}{3} - h_{23}, \dots \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} a_3(w_n) = \varepsilon_2 e^{it_3 n} a(w_n) \\ a_2(w_n) = \varepsilon_1 \exp\left[i\left(t_2 + \frac{2\pi}{3}\right)n\right] a(w_n) \\ a_1(w_n) = \varepsilon_3 \exp\left[i\left(t_1 - \frac{2\pi}{3}\right)n\right] a(w_n) \end{cases} \tag{5.8}$$

En vertu de (3.6), on a

$$t_3 = \frac{\rho}{3}(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) = \frac{\pi}{6} \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}. \tag{5.12}$$

En terme des seuls coefficients inconnus $a(w_n)$, nos séries (4.17) et (4.18) s'écrivent donc :

$$\Psi_{32}(\mathbf{r}) = - 2 i \varepsilon_2 \sum_n \frac{(-)^n}{\sqrt{k^2 - n^2}} a(w_n) e^{in(x_2(h_3) + t_3)} (e^{iy_2 \sqrt{k^2 - n^2}} - \zeta_n e^{-iy_2 \sqrt{k^2 - n^2}}) \tag{5.13}$$

$$\Psi_{31}(\mathbf{r}) = - 2 i \varepsilon_1 \sum_n \frac{(-)^n}{\sqrt{k^2 - n^2}} a(w_n) e^{in(x_1(h_3) + t_3)} (e^{iy_1 \sqrt{k^2 - n^2}} - \zeta_n e^{-iy_1 \sqrt{k^2 - n^2}}). \tag{5.14}$$

On obtient les autres par permutation circulaire $(t_3 \rightarrow t_1 - \frac{2\pi}{3}, t_2 + \frac{2\pi}{3})$.

Comme nous avons épuisé toutes les contraintes du problème, les coefficients $a(w_n)$ sont nécessairement déterminés par le fait qu'il existe trois fonctions entières $g_j(\omega)$ de parité ε_j telles que l'on ait d'après (4.19) et (5.8) :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 g_3(\alpha_3 + w_n) = \sin(\pi k \cos(2\alpha_3 + w_n)) e^{it_3 n} a(w_n) \\ \varepsilon_3 g_1(\alpha_1 + w_n) = \sin(\pi k \cos(2\alpha_1 + w_n)) \exp\left[i\left(t_1 - \frac{2\pi}{3}\right)n\right] a(w_n) \\ \varepsilon_1 g_2(\alpha_2 + w_n) = \sin(\pi k \cos(2\alpha_2 + w_n)) \exp\left[i\left(t_2 + \frac{2\pi}{3}\right)n\right] a(w_n) \end{cases} \tag{5.15}$$

et la condition de croissance conforme à (3.11)

$$a(w_n) \propto e^{-b|n|}, \quad |n| \rightarrow \infty. \tag{5.16}$$

6. Les équations aux différences.

Les relations de cohérence (5.2) et (5.15) sont équivalentes à la proposition suivante : la somme des intégrants des trois représentations intégrales Ψ_j ((3.19) et circ.) est une fonction holomorphe dans tout le plan.

C'est-à-dire

$$\sum_{\text{circ.}} g_3(\mathbf{k}) \frac{e^{-ik \cdot \mathbf{h}_3}}{\sin(\pi k \cdot \mathbf{u}_1) \sin(\pi k \cdot \mathbf{u}_2)} = \text{holomorphe } \forall \omega. \tag{6.1}$$

Il suffit de vérifier que les résidus des pôles apparents répartis en trois séries sont nuls. Par exemple, dans la série (u_3) , le résidu du pôle d'affixe $\omega = \beta_3 + w_n (k \cdot u_3 = n)$ est

$$\frac{g_1(\omega - \omega_1)}{\sin(\pi k \cdot u_2)} e^{-ik \cdot \mathbf{h}_1} + \frac{g_2(\omega - \omega_2)}{\sin(\pi k \cdot u_1)} e^{-ik \cdot \mathbf{h}_2} \Big|_{\omega = \beta_3 + w_n}$$

Il suffit d'avoir

$$\frac{g_1(\beta_3 - \omega_1 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(\beta_3 - \beta_2 + w_n))} + \frac{g_2(\beta_3 - \omega_2 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(\beta_3 - \beta_1 + w_n))} e^{-ik \cdot h_{12}} \Big|_{\omega = \beta_3 + w_n} = 0 \tag{6.2}$$

c'est-à-dire, à l'aide de (3.1)

$$\frac{g_1(\alpha_1 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(2\alpha_1 + w_n))} + \frac{g_2(-\alpha_2 + w_n)}{\sin(\pi k \cos(2\alpha_2 - w_n))} e^{-inh_{12}} = 0 \tag{6.3}$$

ou, d'après (4.19)

$$a_1(w_n) + \varepsilon_2 a_2(-w_n) e^{-inh_{12}} = 0 \tag{6.4}$$

ce qui est précisément (5.2).

Or nous avons montré au début de la section 4 la nécessité pour les intégrants des Ψ_j de s'annuler à l'infini en ω , et ceci dans un domaine de \mathfrak{T} qui contient l'orthocentre $\mathbf{r} = 0$. On déduit alors du théorème de Liouville que le second membre de (6.1) est nul. D'où la relation fonctionnelle

$$\sum_{\text{circ.}} e^{-ik \cdot h_3} \sin(\pi k \cdot u_3) g_3(\mathbf{k}) = 0 \tag{6.5}$$

à compléter par les trois relations de parité $g_j(-\omega) = \varepsilon_j g_j(\omega)$ sachant que $g_j(\mathbf{k}) = g_j(\omega - \omega_j)$.

La relation (6.5) constitue la base des équations aux différences annoncées. On peut encore écrire plus explicitement

$$\sum_{\text{circ.}} \exp\left(ik\rho \frac{\sin(\omega - \omega_3)}{\cos \alpha_3}\right) \sin(\pi k \cos(\omega - \beta_3)) g_3(\omega - \omega_3) = 0 \tag{6.6}$$

ou encore

$$\sum_{\text{circ.}} \varphi_j(\omega - \omega_j) g_j(\omega - \omega_j) = 0 \tag{6.7}$$

avec

$$\varphi_1(\omega) \equiv e^{ikh_1 \sin \omega} \sin(\pi k \cos(\omega + \alpha_3 - \alpha_2)) . \tag{6.8}$$

Réciproquement, cette relation assure la cohérence des trois représentations intégrales, sans avoir besoin de repasser par les séries de Fourier qu'elles engendrent et qui ont joué un rôle heuristique. Multiplions le premier membre de (6.1) par $e^{ik \cdot \mathbf{r}}$ et intégrons dans le plan ω sur un contour (Γ_2) entourant les seuls pôles de la série (u_2) dans le sens positif. Excluant par hypothèse toute coïncidence de pôles de séries distinctes (soit qu'il faille éviter les valeurs accidentelles des angles (4.20) pour que notre analyse soit valide ; soit que la séparation des pôles effectifs découle d'une propriété (4.24)) l'intégrale sur $g_2(\mathbf{k})...$ le long de (Γ_2) est nulle :

$$\int_{(\Gamma_2)} d\omega \frac{g_2(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r} - h_2)}}{\sin(\pi k \cdot u_1) \sin(\pi k \cdot u_3)} = 0 . \tag{6.9}$$

On en déduit

$$\int_{(\Gamma_2)} d\omega \frac{g_1(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r} - h_1)}}{\sin(\pi k \cdot u_2) \sin(\pi k \cdot u_3)} + \int_{(\Gamma_2)} d\omega \frac{g_3(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r} - h_3)}}{\sin(\pi k \cdot u_1) \sin(\pi k \cdot u_2)} = 0 \tag{6.10}$$

c'est-à-dire dans le domaine de convergence commun

$$\Psi_1(\mathbf{r}) \equiv \Psi_3(\mathbf{r}) , \text{ etc...} \tag{6.11}$$

ou encore $\Psi_j(\mathbf{r}) \equiv \Psi(\mathbf{r}), \forall j$, dans l'intersection des trois couloirs. La fonction $\Psi(\mathbf{r})$ possède donc les propriétés de parité voulues dans les réflexions R_j .

Il ne faut pas s'étonner de n'obtenir qu'une seule relation (6.7) pour trois fonctions inconnues. En effet, les relations de parité (3.22) jouent un rôle fonctionnel essentiel (le plus fameux exemple est celui de la fonction ζ

de Riemann). Si l'on effectue dans (6.7) la transformation $\omega \rightarrow -\omega$, on obtient, compte tenu de (3.22), une équation fonctionnelle distincte de (6.7) :

$$\sum_{\text{circ.}} \varepsilon_j \varphi_j(-\omega - \omega_j) g_j(\omega + \omega_j) = 0. \quad (6.12)$$

On a donc en fait au moins deux équations homogènes à trois inconnues et l'on peut montrer — on le vérifiera sur l'exemple de la section suivante — que les deux relations (6.7) et (6.12) sont compatibles avec les parités imposées. Le problème ouvert est de déterminer les solutions qui soient des fonctions entières de période 2π , dont la croissance vérifie (4.2) et plus précisément réalise (5.16). Peut-être sera-t-il aussi nécessaire que g_j s'annule sur un nombre fini de « pôles » de façon à réaliser la séparation décrite section 4.

Une légère variante d'écriture consiste à prendre pour inconnues les fonctions méromorphes

$$\tilde{g}_3(\mathbf{k}) = \frac{g_3(\mathbf{k})}{\sin(\pi k \cdot u_1) \sin(\pi k \cdot u_2)}, \quad \text{etc...} \quad (6.13)$$

qui vérifient les mêmes relations de parité que les g_j . Il faut donc trouver trois fonctions méromorphes de parités définies vérifiant

$$\sum_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_j} \tilde{g}_j(\mathbf{k}) = 0, \quad (6.14)$$

les pôles étant $k \cdot u_1 = n$, $k \cdot u_2 = n$ pour g_3 , etc..., avec les conditions de croissance

$$|\tilde{g}_j(\omega)| < \exp -b |\sinh \mu| \quad \mu = \text{Im } \omega.$$

Reste à savoir si les conditions de méromorphie et de croissance imposées sont suffisantes pour déterminer la solution. Il s'agit maintenant d'un problème d'analyse qui a sa consistance propre. Il est intéressant de noter à ce point l'existence de théorèmes dus à Borel, Nevanlinna [6], sur la croissance comparée des fonctions entières, ou même des fonctions méromorphes, liées par une relation linéaire telle que (6.7). Par exemple, le théorème suivant de Borel [7] montre à quel point les conditions jointes de croissance et d'holomorphie sont contraignantes : trois fonctions entières sans zéros sont linéairement indépendantes.

7. Le problème mixte pour le triangle équilatéral.

La réduction du problème de Dirichlet-Neumann à un système d'équations aux différences représente-t-elle une étape décisive pour la solution complète du problème ? Au moins en principe lorsque les angles sont rationnels. On connaît en effet une méthode générale de résolution des équations aux différences d'incrémentes $2\pi/N$, à coefficients périodiques 2π . Dans les cas les plus simples $N = 6$ ou 8 , on a pu effectuer la construction complète des solutions méromorphes de croissance imposée et résoudre ainsi certains systèmes non intégrables provenant du modèle de Kondo ou du problème à trois corps [3].

Le cas le plus simple que nous puissions essayer d'aborder ici est le problème du triangle équilatéral avec les conditions mixtes

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3. \quad (7.1)$$

Le cas $\varepsilon_3 = -1$ résoudrait le problème de Dirichlet pour l'hexagone régulier et le cas $\varepsilon_3 = 1$ pour le losange ($\pi/3$, $2\pi/3$). Les équations sont communes aux deux problèmes, seule la parité des g diffère. Nous avons

$$\alpha_j = \pi/3; \quad \omega_1 = 2\pi/3, \quad \omega_2 = -2\pi/3, \quad \omega_3 = 0 \quad (7.2)$$

et, d'après (3.7), $\rho = \pi/6\sqrt{3}$.

$$\varphi_j(\omega) = \sin(\pi k \cos \omega) \cdot \exp\left(\frac{i\pi k}{3\sqrt{3}} \sin \omega\right). \quad (7.3)$$

Il sera commode de poser

$$f_j(\omega) = \sin(\pi k \cos \omega) g_j(\omega) \quad (7.4)$$

de même parité que g_j , fonction entière s'annulant sur les w_n . On écrit

$$c(\omega) = \exp\left(\frac{i\pi k}{3\sqrt{3}} \sin \omega\right), \quad \bar{c}(\omega) = c^{-1}(\omega). \quad (7.5)$$

Les équations (6.7) et (6.12) deviennent :

$$c\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) f_1\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + c\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) f_2\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + c(\omega) f_3(\omega) = 0 \tag{7.6}$$

$$\bar{c}\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) f_1\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + \bar{c}\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) f_2\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) - \bar{c}(\omega) f_3(\omega) = 0. \tag{7.7}$$

On notera $\omega_n = \omega - \frac{2n\pi}{3}$, $n = -1, 0, 1 \pmod{3}$.

$$c(\omega_n) = c_n. \tag{7.8}$$

On a $c_1 c_2 c_3 = 1$. D'où l'écriture abrégée

$$c_1 f_1(\omega_1) + c_2 f_2(\omega_2) + c_3 f_3(\omega_3) = 0 \tag{7.9}$$

$$\bar{c}_2 f_1(\omega_2) + \bar{c}_1 f_2(\omega_1) - \bar{c}_3 f_3(\omega_3) = 0. \tag{7.10}$$

Nous reportons l'étude de ce système à un travail ultérieur, mais nous montrons pour terminer que ces équations sont compatibles avec nos hypothèses de parité en donnant la solution générale pour $g_3(\omega)$. Montrons comment (7.9) et (7.10) déterminent les trois fonctions f_j modulo deux fonctions arbitraires de période $2\pi/3$. Multiplions (7.9) par c_3^2 , (7.10) par \bar{c}_3^2 , ajoutons membre à membre et sommons circulairement sur les indices des variables (pas des fonctions); compte tenu de (7.8), on a

$$\sum_{\text{circ.}} f_3(\omega_3) (c_3^3 + \bar{c}_3^3) + \sum_{\text{circ.}} (f_1(\omega_1) c_3 \bar{c}_2 + f_2(\omega_2) c_3 \bar{c}_1) - \sum_{\text{circ.}} (f_1(\omega_2) \bar{c}_3 c_1 + f_2(\omega_1) \bar{c}_3 c_2) = 0$$

soit, l'équation aux différences pour f_3 ,

$$\sum_n f_3(\omega_n) (c_n^3 + \bar{c}_n^3) = 0. \tag{7.11}$$

Explicitement, en vertu de (7.4) et (7.5)

$$\sum_n g_3(\omega_n) \sin(\pi k \cos \omega_n) \cos\left(\frac{nk}{\sqrt{3}} \sin \omega_n\right) = 0, \tag{7.12}$$

ou encore

$$\sum_n (g_3(\omega_{n+1}) - g_3(\omega_{n-1})) \sin\left(\frac{2\pi k}{\sqrt{3}} \sin \omega_n\right) = 0. \tag{7.13}$$

La solution générale de (7.13) est

$$g_3(\omega) = u(\omega) + v(\omega) \sin\left(\frac{2\pi k}{\sqrt{3}} \sin \omega\right), \tag{7.14}$$

où $u(\omega)$ et $v(\omega)$ sont deux fonctions arbitraires entières de période $\frac{2\pi}{3}$ et de parités opposées

$$u(-\omega) = \varepsilon_3 u(\omega), \quad v(-\omega) = -\varepsilon_3 v(\omega). \tag{7.15}$$

Pour déterminer f_2 , on multiplie (7.9) par c_3^2 , (7.10) par $-\bar{c}_2^2$ et on ajoute membre à membre; on obtient

$$f_2(\omega_2) c_3 \bar{c}_1 - f_2(\omega_3) c_1 \bar{c}_2 + f_3(\omega_3) c_3^3 + f_3(\omega_2) \bar{c}_2^3 = 0 \tag{7.16}$$

dont la solution générale est

$$3 c_1 \bar{c}_2 f_2(\omega) = e_2(\omega) - f_3(\omega_1) c_1^3 + f_3(\omega_2) \bar{c}_2^3 + f_3(\omega) (c_3^3 - \bar{c}_3^3) \tag{7.17}$$

avec

$$e_{1,2}\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) = e_{1,2}(\omega); \quad e_{1,2}(-\omega) = -\varepsilon_3 e_{1,2}(\omega);$$

de même,

$$3 \bar{c}_1 c_2 f_1(\omega) = e_1(\omega) - f_3(\omega_2) c_2^3 + f_3(\omega_1) \bar{c}_1^3 + f_3(\omega) (c_2^3 - \bar{c}_2^3). \quad (7.18)$$

Cependant les fonctions $e_{1,2}(\omega)$ de période $(2\pi/3)$ ne peuvent être arbitraires, car $f_{1,2}(\omega)$ doivent être divisibles par $\sin(\pi k \cos \omega)$ comme l'est f_3 . On a donc à résoudre le problème de divisibilité suivant

$$\begin{cases} e_1(\omega) - f_3(\omega_2) c_2^3 + f_3(\omega_1) \bar{c}_1^3 \equiv \sin(\pi k \cos \omega) h_1(\omega) \\ e_2(\omega) - f_3(\omega_1) c_1^3 + f_3(\omega_2) \bar{c}_2^3 \equiv \sin(\pi k \cos \omega) h_2(\omega) \end{cases} \quad (7.19)$$

où les quotients $h_{1,2}(\omega)$ sont des fonctions entières. Il vient alors :

$$\begin{cases} 3 g_1(\omega) \exp\left(\frac{i\pi k}{3} \cos \omega\right) \equiv h_1(\omega) + 2 i g_3(\omega) \sin\left(\frac{\pi k}{\sqrt{3}} \sin \omega\right) \\ 3 g_2(\omega) \exp\left(-\frac{i\pi k}{3} \cos \omega\right) \equiv h_2(\omega) + 2 i g_3(\omega) \sin\left(\frac{\pi k}{\sqrt{3}} \sin \omega\right). \end{cases} \quad (7.20)$$

Les contraintes de croissance devraient ensuite déterminer $u(\omega)$ et $v(\omega)$.

Dans le cas du triangle aigu quelconque, on pourrait construire explicitement la solution générale de l'équation aux différences (6.5) en utilisant la structure polaire des fonctions \bar{g} , résolvant apparemment — ou éludant — le problème de divisibilité (7.19), mais le problème du contrôle de la croissance reste entier.

Bibliographie

- [1] BERRY, M. V. and WILKINSON, M., Diabolical points in the spectra of triangles, *Proc. R. Soc. London A* **392** (1984) 15.
- [2] ITZYKSON, C. et LUCK, J. M., Arithmetical degeneracies in simple quantum system, à paraître dans *Ann. Phys. Preprint S. Ph. T/85/032*.
- [3] SOMMERFELD, *Optics A.P.* (1964).
- [4] COLTON, D. L., *Partial differential equations in the complex domain*. Chap. 1, th. A (Pitman Pub. London) 1976.
- [5] RICHENS, P. J. and BERRY, M. V., Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics, *Physica* **2D** (1981) 495.
- [6] NEVANLINNA, R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Collection Borel 1939. Chelsea N.Y.) 1974.
- [7] BOREL, E., Sur les zéros des fonctions entières, *Acta Math.* **20** (1897) 357.
- [8] SCHWARTZ, H. A., *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (Chelsea N.Y.) 1972, 344.
- [9] GAUDIN, M. et DERRIDA, B., *J. Physique* **36** (1975) 1183 ; GAUDIN, M., *J. Physique* **39** (1978) 1143 ; Annales de l'Institut Fourier de l'université de Grenoble. **31**, 1 (1981).

Divers

Non Publié Saclay Janvier 1986 :

Algorithme invariant pour le développement d'un Lagrangien effectif en polynômes dérivatifs locaux

M. Gaudin

Résumé. — On explicite un algorithme invariant de jauge pour le développement perturbatif des divers courants (dérivant du Lagrangien effectif issu du déterminant fermionique) en polynômes dérivatifs locaux des champs externes.

Abstract. — A gauge invariant algorithm is given for the perturbative expansion of the currents (deriving from the effective Lagrangian constructed with the fermionic determinant) in local polynomials of the external fields and their covariant derivatives.

Dans un travail récent, Aitchison et Fraser exposent, de façon détaillée, diverses applications d'un procédé de calcul du Lagrangien effectif en puissances du champ externe et de ses dérivées [1]. Le principe de la méthode remonte aux premiers calculs de l'anomalie, par exemple ceux de Bardeen dans le cas non-abélien [2]. Pour "archaïques" que soient parfois considérées de telles méthodes, elles demeurent toujours aussi simples et efficaces à en juger par les publications récentes, bien qu'elles n'aient peut-être pas l'élégance des méthodes de temps propre [3].

On voudrait montrer ici comment le procédé classique des auteurs cités et de bien d'autres sans doute, peut être systématisé pour donner lieu à un algorithme invariant, sinon une formule explicite, qui rende le calcul des polynômes dérivatifs constituant les courants aussi automatique qu'un calcul de trace. Il s'agit d'une formule pour les courants et densités et non pas directement pour le Lagrangien lui-même auquel on peut cependant remonter très facilement à partir de ceux-là.

1. Algorithme pour les courants

Le Lagrangien effectif local $\mathcal{L}(x)$ obtenu par intégration sur les variables fermioniques et vérifiant

$$e^{i \int \mathcal{L} d^4x} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - V - m)\psi d^4x} \quad (1)$$

est une fonctionnelle des champs externes inclus dans le terme V . Prenant l'exemple du champ chiral jaugé (pour le groupe $SU(N) \times SU(N)$) on aura

$$V = \frac{1}{i} \gamma \cdot (B + A \gamma_5) + \sigma + i \pi \gamma_5 \quad (2)$$

où $\frac{1}{i} B$ et $\frac{1}{i} A$ désignent le champ vectoriel et le champ axial, σ et π le champ scalaire et le pseudo-scalaire, opérateurs matriciels $N \times N$, hermitiques et de trace nulle. De l'action L , logarithme du déterminant fermionique.

$$iL = \text{Tr} \log (i \gamma \cdot \partial - V - m) \quad (3)$$

dérivent les courants et densités

$$\begin{aligned} j(x) &= i \frac{\partial L}{\delta B(x)} = -i \text{tr} \frac{1}{i \gamma \cdot \partial - V - m} \gamma \\ \rho_5(x) &= \frac{\delta L}{\delta \pi(x)} = -\text{tr} \frac{1}{i \gamma \cdot \partial - V - m} \gamma_5 \text{ etc...} \end{aligned} \quad (4)$$

où tr est la trace partielle, portant seulement sur les matrices de Dirac. Le potentiel V étant considéré comme une perturbation, ce qui revient à supposer que la masse m est grande par rapport aux basses énergies d'intérêt, les expressions formelles (4) engendrent la série de perturbation usuelle que nous écrivons d'abord dans la représentation impulsion. On a besoin de la transformée du potentiel

$$V(x) = \int d^4 \bar{p} V(p) e^{i p x}, \quad \left(d^4 \bar{p} = \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 p \right) \quad (5)$$

où $V(p)$ décroît suffisamment vite avec le transfert p pour que toutes les dérivées du champ soient représentables sous la forme (5). On obtient ainsi pour la transformée du courant

$$\begin{aligned} ij(q) &= \int \delta(K_1 - q) d^4 \tilde{K}_1 d^4 \bar{p} \text{tr} \frac{1}{p_1 - m} V_{10} \frac{1}{p - m} \gamma \\ &+ \int \delta(K_2 - q) d^4 \tilde{K}_1 d^4 \tilde{K}_2 d^4 \bar{p} \text{tr} \frac{1}{p_2 - m} V_{21} \frac{1}{p_1 - m} V_{10} \frac{1}{p - m} \gamma + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

avec

$$p_1 = p + K_1; \quad V_{12} = V(K_1 - K_2), \quad \dots, \quad V_{10} = V(K_1). \quad (7)$$

On a écrit $p - m$ pour $\gamma p - m$. Il est entendu que les trois premiers termes de ce développement sont indéfinis du fait de la divergence sur ρ . Ces termes n'ont de sens qu'après régularisation; on choisira celle de Pauli et Villars qui a l'avantage de préserver les identités de Ward à chaque ordre [4]

$$(\text{processus } \Sigma' \Rightarrow \sum_m - \sum_M, \text{ avec } \Sigma m^2 = \Sigma M^2). \quad (8)$$

Les intégrales sur les K_j sont sans danger, selon l'hypothèse que le champ externe est à variation lente. Il est alors possible de développer les intégrants de la série (6) en puissances des transferts ($|K/m| \ll 1$) de façon à obtenir, après retour à l'espace direct, des polynômes locaux du potentiel et de ses dérivées successives. On écrit

$$\frac{1}{p + K - m} = \frac{1}{p - m} + \frac{1}{p - m} (-K) \frac{1}{p - m} + \dots \quad (9)$$

ce qu'on peut considérer soit comme un développement formel au même titre que (6), puisque les transferts d'impulsion et le potentiel doivent être traités sur le même plan dans une théorie de jauge, soit comme une série convergente dans un certain domaine de p (la région euclidienne $p^2 < 0$) l'intégration sur p étant réservée.

Ceci admis, considérons le facteur suivant du terme général dans l'écriture (6)

$$\frac{1}{p + K_1 - m} V_{10} = \frac{1}{p - m} V(K_1) + \frac{1}{p - m} (-K_1) \frac{1}{p - m} V(K_1) + \dots \tag{10}$$

Or $K_1 \dots V(K_1)$ est transformé de Fourier de $-i\partial \dots V(x)$, où la dérivation porte sur la fonction $V(x)$ située à droite de ∂ . Regardons ensuite l'effet d'un facteur K_2 provenant du terme $(p + K_2 - m)^{-1}$:

$$\begin{aligned} K_2 \dots V_{21} \dots V_{10} &\equiv K_{21} \dots V_{21} \dots V_{10} + K_1 \dots V_{21} \dots V_{10} \\ \Rightarrow &\quad -i\overbrace{\partial \dots V} \dots V + -i\overbrace{\partial \dots V} \dots V \\ &\quad = -i\partial \dots V \dots V \end{aligned} \tag{11}$$

où la dérivation porte donc finalement sur le produit écrit à droite de ∂ . Le facteur K_2 , et ses diverses puissances, agissent dans l'espace direct comme opérateurs de dérivation sur l'expression située à leur droite dans l'écriture ordonnée du terme général de la série (6). De cette remarque, appliquée de façon récurrente à tous les transferts (et leurs puissances) ainsi décomposés ($K_4 = K_{43} + K_{32} + K_{21} + K_1$), découle, en repassant de la convolution au produit, le développement en série formelle suivant

$$ij(x) = \sum \int d^4\tilde{p} \operatorname{tr} \frac{1}{p + i\partial - m} V(x) \frac{1}{p + i\partial - m} V(x) \dots V(x) \frac{1}{p - m} \gamma \tag{12}$$

qui mélange manifestement x et intégrale sur l'impulsion courante p de la "boucle" fermionique. La variable p joue un rôle inerte par rapport à l'algorithme dérivatif défini par le développement formel en puissance $i\partial$. Il faut enfin bien voir que la série (12) ne résulte pas directement du développement du courant dans l'espace x et que l'analyse précédente apparemment triviale est nécessaire pour obtenir les coefficients du polynôme dérivatif comme des intégrales sur p .

On peut encore écrire

$$i \operatorname{Tr} j(x) f = \sum \int d^4\tilde{p} \operatorname{Tr} \frac{1}{p + i\partial - m} V \frac{1}{p + i\partial - m} V \dots V \frac{1}{p + i\partial - m} \gamma f \tag{13}$$

où f est une matrice arbitraire constante d'ordre N . La notation Tr signifie trace totale. Toujours considérée comme série formelle, la somme (13) peut alors être remaniée de façon à grouper les termes de degré total donné en puissances de ∂ ou V . On obtient évidemment

$$i \operatorname{Tr} j(x) f = \int d^4\tilde{p} \operatorname{Tr} \frac{1}{p - m (\frac{1}{i}\partial + V)} \gamma f \tag{14}$$

$$i \operatorname{Tr} j f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \int d^4\tilde{p} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{p - m} D^v \right)^n \frac{1}{p - m} \gamma f \tag{15}$$

avec la notation des dérivées covariantes relatives au groupe chirale si l'on exclut l'interaction scalaire et pseudo-scalaire

$$D^v = \partial + iV = \partial + B + A\gamma_5 = D + A\gamma_5 . \tag{16}$$

Le résultat (14) reste aussi valide quelque soit V , en particulier l'interaction choisie en (2). La série (15) est une somme de polynômes dérivatifs du potentiel local dont les coefficients se trouvent donnés par une intégrale proportionnelle à $m^{-(n-3)}$ pour le degré n et convergente au delà du 3-ième ordre. En deçà, il faut comprendre (15) avec la régularisation Σ' .

La formule se présente comme un algorithme dérivatif "formellement" invariant de jauge. Mais il faut montrer que cette invariance est réelle, c'est-à-dire que les termes sont fonctions des champs et de leurs dérivées covariantes pour le sous-groupe diagonal $SU(N)$.

2. Preuve de l'invariance de jauge

Considérons l'effet d'une transformation $w \in SU(N)$ sur les potentiels, et sur le terme général de la série (15) :

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V^w ; A &\rightarrow A^w = w^+ A w \\ B &\rightarrow B^w = w^+ B w + w^+ \partial w \\ D\varphi &\rightarrow w^+ D(w\varphi) , \quad \forall \varphi . \end{aligned} \tag{17}$$

Prenant comme terme général le terme atypique du troisième ordre pour alléger l'écriture, nous écrivons la contribution au courant transformé j^w

$$\begin{aligned} \text{Tr} J^w f &= \int d^4 \tilde{p} \text{Tr} \frac{1}{p-m} w^+ D w \frac{1}{p-m} w^+ D w \frac{1}{p-m} w^+ D w \frac{1}{p-m} \gamma f \\ &= \int d^4 \tilde{p} \text{Tr} w^+ \left(\frac{1}{p-m} D \right)^3 \frac{1}{p-m} \gamma w f . \end{aligned} \tag{18}$$

Or, les opérateurs D contiennent des dérivations portant sur toute fonction écrite à leur droite ; on en déduit

$$\text{Tr} j^w f = \text{Tr} w f w^+ j + \int d^4 \tilde{p} \text{Tr} f w^+ \left(\frac{1}{p-m} D \frac{1}{p-m} D \frac{1}{p-m} D \frac{1}{p-m} \overrightarrow{\gamma} \right) w \tag{19}$$

où le symbole $(\overrightarrow{\gamma})w$ signifie que les dérivations issues de l'opérateur entre parenthèses portent au moins une fois sur le facteur w écrit le plus à droite. Pour que j soit invariant, c'est-à-dire que l'on ait $j^w = w^+ j w$, il suffit que le second terme de (19) soit identiquement nul. Montrons que c'est le cas au delà du troisième ordre du fait de la structure particulière de l'intégrale p quand elle converge. (Pour l'ordre inférieur à quatre, ce sera le cas pour les termes subsistant après le processus Σ' , c'est-à-dire les termes logarithmiques dans les masses.)

Ecrivons pour abrégier $1/p$ au lieu de $1/(p-m)$. Nous avons, selon la prescription définie plus haut

$$\left(\frac{1}{p} D \frac{1}{p} D \frac{1}{p} D \frac{1}{p} \overrightarrow{\gamma} f \right) w =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{3t} \left(\frac{1}{p} \gamma_\lambda \frac{1}{p} D \frac{1}{p} D \frac{1}{p} \gamma f \right) \partial_\lambda w \\
 & + \sum_{3t} \left(\frac{1}{p} \gamma_\lambda \frac{1}{p} \gamma_\mu \frac{1}{p} D \frac{1}{p} \gamma f \right) \partial_{\lambda\mu} w \\
 & + \sum_{1t} \left(\frac{1}{p} \gamma_\lambda \frac{1}{p} \gamma_\mu \frac{1}{p} \gamma_\nu \frac{1}{p} \gamma f \right) \partial_{\lambda\mu\nu} w \equiv \\
 & + \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \left(\frac{1}{p} D \frac{1}{p} D \frac{1}{p} \gamma f \right) \partial_\lambda w \\
 & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} \left(\frac{1}{p} D \frac{1}{p} \gamma f \right) \partial_{\lambda\mu} w \\
 & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial p_\lambda \partial p_\mu \partial p_\nu} \left(\frac{1}{p} \gamma f \right) \partial_{\lambda\mu\nu} w
 \end{aligned} \tag{20}$$

L'extension de l'écriture à un ordre quelconque est évidente. Nous constatons alors que les intégrants constitués par le second membre de (20) donnent lieu à des intégrales convergentes et égales à zéro pour $n > 3$. On a, en effet

$$\int d^4 \tilde{p} \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \left(\frac{1}{p-m} \underbrace{\dots \frac{1}{p-m} \dots}_{n \text{ facteurs}} \right) = 0. \tag{21}$$

Par contre le terme de troisième ordre (que nous avons pris pour abrégé) échappe à cette conclusion. L'intégrale au second membre est encore (conditionnellement) convergente, mais le résultat est non nul concernant les courants j et j_5 pour $n = 3$.

Nous avons donc le théorème que le développement formel (15) en puissances de D est effectivement invariant de Jauge ($SU(N)$) à partir de l'ordre quatre (terme en m^{-1}) pour ρ et ρ_5 , et à partir de l'ordre cinq (terme en m^{-2}) pour j et j_5 . L'intégration sur la variable de "boucle" fermionique p combine les coefficients tensoriels de façon à ne faire intervenir que les commutateurs des dérivées covariantes $D^{R,L} = D \pm A$. On peut donc se passer finalement de la matrice constante f de la définition (15) puisqu'au total la dérivation ne porte pas sur elle, mais c'est ce qu'il fallait prouver.

Enfin ce développement vérifie les relations de conservation

$$\begin{aligned}
 [Dj] + [Aj_5] &= 0 \\
 [Dj_5] + [Aj] &= 2m\rho_5
 \end{aligned} \tag{22}$$

qui doivent être comprises ici ordre par ordre, supérieur au 3-ième pour les courants. L'anomalie se situe au 3-ième ordre (m^0) des courants qui est indéfini tandis que l'ordre de 4 de ρ_5 est convergent. Le processus de régularisation Σ' évacue complètement le problème de définition, puisqu'il opère la compensation totale des termes "intéressants" de degré zéro dans la masse, l'anomalie étant essentiellement le terme de " $m\rho_5$ " en m^0 , tout au moins la partie de $m\rho_5$ qui ne dérive pas d'un Lagrangien local, en vertu de la relation

$$\begin{aligned}
 [Dj_5^{\text{rég}}] + [Aj^{\text{rég}}] &= 2m\rho_5(m) - 2M\rho_5(M) \\
 &\Rightarrow 2m\rho_5(m) + \text{Anomalie} .
 \end{aligned}$$

3. Applications

Il s'agit simplement d'illustrer la méthode par quelques exemples sans donner les détails. Rien de nouveau jusqu'au quatrième ordre où tout a été dit.

3.1. COURANTS AU TROISIÈME ORDRE

$$\begin{aligned} ij^{R,L} &= \frac{1}{i^3} \int d^4 \tilde{p} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D^\nu \right)^3 \frac{1}{p-m} \gamma_{R,L} \\ \gamma_{R,L} &= \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

L'invariance n'est garantie par le théorème que pour le terme divergent logarithmique. On obtient tout de suite

$$j_\lambda^R = \frac{i}{12\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} [D_\mu^R [D_\mu^R D_\lambda^R]] \quad (24)$$

dérivant du Lagrangien

$$\frac{1}{24\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} \int d^4 x \operatorname{Tr} F_{\lambda\mu}^R F_{\lambda\mu}^R \quad (25)$$

qui renormalise le Lagrangien non-perturbé usuel.

3.2. DENSITÉ PSEUDO-SCALAIRE AU QUATRIÈME ORDRE. — Ce terme fournit l'illustration la plus simple du cas convergent.

$$\begin{aligned} \rho_5 &= - \int d^4 \tilde{p} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D^\nu \right)^4 \frac{1}{p-m} \gamma_5 \\ &= \int \frac{d^4 \tilde{p}}{(m^2 - p^2)^4} \operatorname{tr} D^\nu (p+m) D^\nu (p+m) D^\nu (p+m) D^\nu \gamma_5. \end{aligned} \quad (26)$$

Pour revenir au cas le plus général, les coefficients du polynômes dérivatif sont déterminés à partir de l'intégrale

$$\begin{aligned} \underbrace{I_{\lambda\mu\nu\rho}^{(n)} \dots}_{2k \text{ indices}} &= \int \frac{d^4 \tilde{p}}{(m^2 - p^2)^{n+1}} p_\lambda p_\mu p_\nu p_\rho \dots \\ I_{\lambda\mu\nu\pi}^{(n)} \dots &= \frac{i}{16\pi^2} (-)^k \frac{(n-k-2)!}{2^k n!} m^{2(k+1-n)} \sum g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} \dots \end{aligned} \quad (27)$$

($g_{\lambda\mu}$ est le tenseur métrique diagonal + ...) où la somme proportionnelle au tenseur complètement symétrique à $2k$ indices comprend $2k!/2^k k!$ systèmes de contractions. On obtient très automatiquement à partir de (26) le résultat classique de Bardeen

$$\begin{aligned} -2m\rho_5 &= \frac{1}{12\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \left\{ [D_\lambda A_\mu] [D_\nu A_\rho] + [D_\lambda D_\mu] [D_\nu D_\rho] \right. \\ &- \frac{1}{4} \left(([D_\lambda D_\mu] + [A_\lambda A_\mu]) ([D_\nu D_\rho] + [A_\nu A_\rho]) - 2A_\lambda [D_\mu D_\nu] A_\rho \right) \left. \right\} \\ &+ \frac{i}{12\pi^2} \left\{ 2 [D_\lambda, A_\mu A_\nu A_\rho] + [D_\lambda A_\mu] [A_\nu A_\rho] \right. \\ &\left. + [D_\lambda [D_\lambda [D_\mu A_\mu]]] - [A_\lambda [A_\lambda [D_\mu A_\mu]]] + [D_\lambda [A_\mu [D_\mu D_\lambda]]] - [A_\lambda [D_\mu [D_\mu D_\lambda]]] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

dont l'invariance est manifeste. Le terme en ϵ constituera l'anomalie, tandis que le reste dérive du Lagrangien

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{24\pi^2} \left\{ [D_\lambda A_\lambda]^2 + [A_\mu A_\lambda]^2 - \frac{1}{2} ([D_\mu D_\lambda] - [A_\mu A_\lambda])^2 \right\}, \quad (29)$$

en ce sens que les courants j et j_5 dérivant de \mathcal{L}_e vérifient les identités de Ward (22) avec la densité ρ_5 issue de (28), modulo le terme d'anomalie en ϵ . Concernant la notation, nous avons toujours adopté la convention de sommation des indices tensoriels répétés en omettant le tenseur métrique nécessaire :

$$A_\lambda A_\lambda \rightarrow \sum_\lambda A_\lambda A_\lambda g^{\lambda\lambda} = \sum A_\lambda A^\lambda,$$

$$F_{\lambda\mu} F_{\mu\rho} \rightarrow \sum_\mu F_{\lambda\mu} F_{\mu\rho} g^{\mu\mu} = \sum F_{\lambda\mu} F_\rho^\mu.$$

3.3. COURANT AU CINQUIÈME ORDRE (m^{-2}). — Pour illustrer la méthode, il suffira de se restreindre au cas où le vecteur axial A est nul : $D^\nu \equiv D$.

$$ij = \frac{1}{i^5} \int d^4\tilde{p} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D \right)^5 \frac{1}{p-m} \gamma$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{e} = - \int \frac{d^4\tilde{p}}{(m^2 - p^2)^6} \operatorname{tr} \tilde{p}\mathbf{e}_1 \tilde{p}\mathbf{e}_2 \tilde{p}\mathbf{e}_3 \tilde{p}\mathbf{e}_4 \tilde{p}\mathbf{e}_5 \tilde{p}\mathbf{e} D_{\mathbf{e}_1} D_{\mathbf{e}_2} D_{\mathbf{e}_3} D_{\mathbf{e}_4} D_{\mathbf{e}_5} \quad (30)$$

où \mathbf{e}_i , \mathbf{e} sont des vecteurs indiciels d'un repère de Lorentz quelconque. On écrit \mathbf{e}_i pour $\gamma \cdot \mathbf{e}_i$, \tilde{p} pour $\gamma p + m$; Il suffit de calculer les traces et d'utiliser (27). On obtient dans une première étape automatique

$$\int \frac{d^4\tilde{p}}{(m^2 - p^2)^6} \operatorname{tr} \tilde{p}\mathbf{e}_1, \dots, \tilde{p}\mathbf{e}_6 \equiv T(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_6)$$

$$T = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{10} \sum_{15t.} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) + \sum_{15t.} \pm (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) \\ & - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \sum_{3t.} \pm (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4) \sum_{3t.} \pm (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) \\ & - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) \sum_{3t.} \pm (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) + \frac{1}{4} \sum_{\text{circ.}6t.} \left((\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \sum_{3t.} (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\sum_{15t.} \pm (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_5) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_6) + \sum_{15t.} \pm (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_5) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_6) \right) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Les sommes symétriques sont des hafniens, les sommes alternées $\sum_{3t.} \pm$, des pfaffiens, avec le nombre de termes indiqués sous chaque somme. Comme $T(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_6)$ doit posséder l'invariance circulaire, écrivons (31) sous une forme qui la manifeste

$$T(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_6) = \frac{i}{240\pi^2} \{-2\alpha + 13\beta - 17\gamma + 8\delta + 18\epsilon\} \quad (32)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_5) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_6) \\
 \beta &= \sum_{\substack{\text{circ.} \\ 2\text{t.}}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6) \\
 \gamma &= \sum_{\substack{\text{circ.} \\ 6\text{t.}}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_5) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_6) \\
 \delta &= \sum_{\substack{\text{circ.} \\ 3\text{t.}}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_6) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_5) \\
 \varepsilon &= \sum_{\substack{\text{circ.} \\ 3\text{t.}}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_6) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_5)
 \end{aligned} \tag{33}$$

Il n'est pas évident de regrouper les termes de la somme

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{e} = - \sum_{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_5} T(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_5) D_{\mathbf{e}_1} \dots D_{\mathbf{e}_5} \tag{34}$$

en commutateurs emboîtés, sauf si l'on a la liste des invariants ou covariants possibles à tel ordre, ce qui est facile à établir. Enfin l'invariance circulaire permet de remonter directement au Langrangien et l'on obtient à cet ordre

$$ij = \frac{\delta L}{\delta B} \tag{35}$$

$$L = \frac{m^{-2}}{240\pi^2} \int d^4x \left\{ 13 [D_\lambda, F_{\lambda\mu}]^2 - [D_\lambda, F_{\mu\nu}]^2 \right\} \tag{36}$$

qui ne fait intervenir que deux des trois invariants possibles.

3.4. COURANT AXIAL AU 5-IÈME ORDRE

$$ij_5 = \frac{1}{i^5} \int d^4\bar{p} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D \right)^5 \frac{1}{p-m} \gamma \gamma_5 . \tag{37}$$

on obtient de la même que précédemment :

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_5 &= \frac{m^{-2}}{48\pi^2} \left\{ \begin{aligned}
 &- 4(12) + 2(12) + (13) + (23) + (15) + (25) - 2(14) - 2(34) \\
 &+ 4|123456| - 2|234516| - 2|124536| \\
 &+ \frac{1}{2} (|231546| + |234516| + |123546| + |124536|) \end{aligned} \right\} D_{\mathbf{e}_1} D_{\mathbf{e}_2} D_{\mathbf{e}_3} D_{\mathbf{e}_4} D_{\mathbf{e}_5}
 \end{aligned} \tag{38}$$

où l'on a écrit pour abrégier, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_6$,

$$\begin{aligned}
 (12) &\equiv (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) |\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_5 \mathbf{e}_6| \equiv (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \varepsilon_{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_5 \mathbf{e}_6} \\
 |123456| &\equiv \sum_{15\text{t.}} \pm (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) |\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_5 \mathbf{e}_6|
 \end{aligned} \tag{39}$$

On a encore

$$e \cdot J_5 = -\frac{m^{-2}}{48\pi^2} \{2(12)+2(45)-2(51)+(23)+(34)+(14)+(25)-3(13)-3(35)\} D_{e_1} \dots D_{e_5} . \quad (40)$$

Sur les six covariants vectoriels possibles n'en figurent que quatre pour donner

$$(j_5)_\rho = \frac{-m^{-2}}{48\pi^2} \{ [D_\lambda, F_{\mu\rho}^*] F_{\lambda\mu} + F_{\lambda\mu} [D_\lambda, F_{\mu\rho}^*] + 2[D_\lambda, F_{\lambda\mu}] F_{\mu\rho}^* + 2F_{\mu\rho}^* [D_\lambda, F_{\lambda\mu}] \} \quad (41)$$

avec

$$F_{\lambda\mu} = [D_\lambda, D_\mu] ; \quad F_{\nu\rho}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} F_{\lambda\mu} . \quad (42)$$

3.5. DENSITÉ PSEUDO-SCALAIRE AU 6-IÈME ORDRE

$$\rho_5 = \int d^4\tilde{p} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D \right)^6 \frac{1}{p-m} \gamma_5 . \quad (43)$$

On obtient très directement

$$\rho_5 = \frac{m^{-3}}{48\pi^2} \left\{ 2 \sum_{15t.} \pm (e_1 \cdot e_2) |e_3 e_4 e_5 e| - (e_1 \cdot e_2) |e_3 e_4 e_5 e| - (e_1 \cdot e_4) |e_2 e_3 e_5 e| - (e_3 \cdot e_4) |e_1 e_2 e_5 e| \right\} D_e D_{e_1} \dots D_{e_5} \quad (44)$$

et finalement

$$\rho_5 = \frac{m^{-3}}{96\pi^2} \{ [D_\lambda [D_\lambda, F_{\mu\nu}]] F_{\mu\nu}^* + F_\mu^* [D_\lambda [D_\lambda, F_{\mu\nu}]] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}] [D_\lambda, F_{\mu\nu}^*] - 4F_{\lambda\mu} F_{\mu\nu}^* F_{\nu\lambda} \} \quad (45)$$

ce qu'on pouvait obtenir directement de la relation (22), $[D \cdot J_5] = 2m\rho_5$, à l'aide de l'identité de Jacobi et de l'identité $FF^*F \equiv F^*FF$ qui dérive de celles-ci $\sum_{\text{circ.}} (e_1 \cdot e_2) |e_2 e_3 e_4 e_5| \equiv 0$.

Il serait évidemment plus intéressant de calculer ρ_5 avec le vecteur axial en vue de l'équation PCAC relative au soliton chiral, mais il faut un peu plus de temps.

3.6. ADJONCTION DU CHAMP CHIRAL. — L'adjonction à V du champ chiral $\sigma + i\pi\gamma_5$ qui se transforme selon la loi $a = \sigma + i\pi \rightarrow uav^+, u \times v \in \text{SU}(N) \times \text{SU}(N)$, laisse aussi valide la formule (15). Nous avons effectué le calcul de ρ_5 au quatrième ordre inclus ; les termes contenant σ sont nombreux, mais faciles à obtenir. Voici le résultat $\sigma = 0$, ce qui suffit pour manifester l'invariance diagonale :

$$\rho_5 = \frac{\delta}{\delta\pi} \left\{ + \frac{1}{16\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} \operatorname{tr} (-[D, \pi]^2 + (A, \pi)^2 + \pi^4) - \frac{im^{-1}}{16\pi^2} \operatorname{tr} [D\pi] (A, \pi^2) \right\} . \quad (46)$$

avec la notation $(A, \pi) = A\pi + \pi A$.

Dans le cas $\sigma \neq 0$, le terme divergent manifeste l'invariance chirale complète ; définissant la dérivée chirale

$$D^c(a) = D^L a - a D^R = [D, a] - (A, a),$$

on obtient

$$\rho_5 = \frac{\delta}{\delta\pi} \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} \operatorname{tr} \left(-D^c(a)(D^c(a))^+ + (aa^+)^2 \right) \right\} + \dots \quad (47)$$

qui renormalise un éventuel Lagrangien non-perturbé.

3.7. COURANT j AU 3-ÈME ORDRE EN π . — Il suffit de développer la formule (14) au troisième ordre en π ,

$$ij = \int d^4\tilde{p} \operatorname{tr} \frac{1}{p-m+iD} i\pi\gamma_5 \frac{1}{p-m+iD} i\pi\gamma_5 \frac{1}{p-m+iD} i\pi\gamma_5 \frac{1}{p-m+iD} \gamma \quad (48)$$

pour obtenir le terme dominant (au 6-ème ordre de perturbation)

$$ij = -i^3 \int \frac{d^4\tilde{p}}{(p^2 - m^2)^4}$$

$$\operatorname{tr}(p+m+iD)\pi(p-m+iD)\pi(p+m+iD)\pi(p+m+iD)\gamma\gamma_5$$

soit

$$j_\lambda = 4m \int \frac{d^4\tilde{p}}{(p^2 - m^2)^4} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \{ \pi D_\mu \pi D_\nu \pi D_\rho - D_\mu \pi^2 D_\nu \pi D_\rho + D_\mu \pi D_\nu \pi^2 D_\rho \pi - D_\mu \pi D_\nu \pi D_\rho \pi \}$$

et enfin

$$j_\lambda = \frac{1}{24\pi^2} \left(\frac{i}{m} \right)^3 \{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} [D_\mu \pi] [D_\nu \pi] [D_\rho \pi] + ([D_\mu \pi], \pi F_{\lambda\mu}^* \pi) \} \quad (49)$$

expression évidemment similaire à celle du courant de Goldstone et Wilczek [5], mais seule subsiste ici l'invariance diagonale du fait du choix $\sigma = 0$, et aussi $A = 0$. En l'absence du champ chirale $\sigma + i\pi$, il suffirait en principe d'utiliser l'équivalence (modulo l'anomalie due à la mesure fermionique) [6] du modèle σ au couplage vectoriel-axial ($m = 0$, $\varphi = m_0(\sigma + i\pi) = uv^+$; $A^R = B + A = u^+ \partial u$, $A^L = B - A = v^+ \partial v$) et de calculer le courant au troisième ordre. Ceci nous ramène à un point qui n'a pas été abordé en 3.1 car il dépasse la simple application de l'algorithme.

Si l'on veut établir une expression définie du courant du 3-ème ordre à partir de la donnée perturbative formelle (15), il faut faire appel à une régularisation plus fine que le processus soustractif Σ' qui évacue l'information. Se pose donc la question d'une représentation intégrale analogue à (15), mais finie et invariante (l'invariance n'est assurée par le théorème de la section 2 que pour la partie "divergente" calculée en 3.1). D'abord il suffit d'introduire une coupure en $-p^2 = M^2$ dans l'intégration euclidienne pour définir celle-ci. Ensuite, on constate le fait suivant : si l'on ajoute à l'expression (15) un courant complémentaire *ad hoc* défini par l'intégrale de surface

$$\left(j_\lambda^{R,L} \right)_s = \frac{1}{3} \int_{-p^2 < M^2} d^4\tilde{p} \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{p-m} D^\nu \right)^3 \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad (50)$$

il en résulte que seule reste non-invariante la partie en ε , le reste dérivant du Lagrangien (29) pour la partie finie, et du Lagrangien (25) pour le terme en $\log \frac{M^2}{m^2}$. La seule partie non-invariante qui découle de l'algorithme *ad hoc* (23) + (50) est l'opérateur dérivatif

$$\left(j_\lambda^R \right)_{noninv.} = -\frac{1}{12\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} D_\mu^R D_\nu^R D_\rho^R. \quad (51)$$

Une fois soustrait (51) de (23) + (50), on obtient un courant invariant qui, pour la partie en ε qui nous concerne, s'écrit

$$\begin{aligned} j_\lambda &= \dots + \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \left\{ 2A_\mu A_\nu A_\rho + \frac{3}{2} [D_\mu D_\nu] A_\rho + \frac{3}{2} A_\rho [D_\mu D_\nu] \right\} \\ j_\lambda^{(5)} &= \dots + \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \{ [D_\mu A_\nu] A_\rho + A_\rho [D_\mu A_\nu] \}, \end{aligned} \quad (52)$$

où les points désignent le terme dérivant de (29). Enfin, l'on vérifie les identités

$$\left(j^{R,L} = \frac{1}{2} \left(j \pm j^{(5)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} [D^R \cdot j^R] &= m\rho_5 - \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} D_\lambda^R D_\mu^R D_\nu^R D_\rho^R \\ [D^L \cdot j^L] &= -m\rho_5 + \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} D_\lambda^L D_\mu^L D_\nu^L D_\rho^L \end{aligned} \quad (53)$$

où ρ_5 est donnée par l'expression (28), et où le terme supplémentaire en ε est précisément cette partie de l'anomalie due au jacobien des fermions. La formule de Goldstone-Wilczek s'obtient alors de (52) en prenant les champs $A^{R,L} = B \pm A$ comme des jauges pures ; par exemple si $A^L = 0, A^R = u^+ \partial u,$

$$\begin{aligned} j_\lambda &= -\frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} A_\mu^R A_\nu^R A_\rho^R \\ j_\lambda^{(5)} &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

3.8. ANOMALIE EN DIMENSION QUELCONQUE. — La formule (15) s'étend naturellement à toute dimension Q , en introduisant l'algèbre de Clifford convenable (d'ordre 2^Q). La densité ρ_{Q+1} contient le terme d'anomalie proportionnel à m^{-1}

$$\rho_{Q+1}(x) = -\frac{1}{i^Q} \int \frac{d^Q p}{(2\pi)^Q} \text{tr} \left(\frac{1}{p-m} D_x \right)^Q \frac{1}{p-m} \gamma_{Q+1} \quad (55)$$

où l'on a écrit D pour γD . On se restreindra par simplicité au cas de vecteur axial nul, $A = 0$. Pour une dimension paire, avec la métrique de Lorentz, on a

$$Q = 2q, \gamma_{Q+1} = -i^{q+1} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{2q-1} ; \text{tr } 1 = 2^q ; \gamma_{Q+1}^2 = 1 \quad (56)$$

et

$$\rho_{Q+1} = (-)^q \int \frac{d^Q p}{(2\pi)^Q} \frac{1}{(p^2 - m^2)^Q} \text{tr} (D(p+m))^{Q-1} D \gamma_{Q+1}. \quad (57)$$

Le seul problème est de calculer la trace, ce qu'on fait commodément en introduisant l'algèbre γ' de dimension $(Q+1)$ et la transformation canonique

$$\gamma' = \frac{1}{i} \gamma \gamma_{Q+1}, \quad \gamma_{Q+1}' = \gamma_{Q+1} \quad (58)$$

On écrit alors

$$\text{tr} = \text{tr} (\gamma' \cdot D (\gamma' \cdot p + m))^{Q-1} \gamma' \cdot D \gamma_{Q+1} = \frac{1}{i} ((\gamma \cdot \mathbf{D}) (\gamma \cdot \mathbf{p}))^{Q-1} \gamma \cdot \mathbf{D}$$

avec

$$\gamma \cdot \mathbf{p} = \gamma \cdot p + im \gamma_{Q+1} \quad \mathbf{p} = (p, m), \quad \mathbf{D} = (D, 0) \quad (59)$$

La trace porte sur un nombre impair de matrices γ , mais la dimension est impaire. Elle se décompose en systèmes de contractions usuels multipliés par tout déterminant formé sur $Q+1$ vecteurs. Les seuls non-nuls sont formés sur Q vecteurs \mathbf{D} et un seul \mathbf{p} ; on en déduit

$$\text{tr} = \frac{1}{i} (\mathbf{p}^2)^{q-1} \cdot im \text{tr} (\gamma \cdot D)^Q \gamma_{Q+1} \cdot (-)^{q-1}$$

d'où le résultat connu [7]

$$\begin{aligned}
 m\rho_{Q+1} &= - \int \frac{d^{2q}p}{(2\pi)^{2q}} \cdot \frac{m^2}{(p^2 - m^2)^{q+1}} \cdot \text{tr}(\gamma \cdot D)^Q \gamma_{Q+1} \\
 &= \frac{i^q}{(2\pi)^q q!} \sum \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \dots D_\lambda D_\mu D_\nu D_\rho \dots \\
 &= \frac{i^q}{(4\pi)^q q!} \text{Pf} \{ F_{01} F_{23} \dots F_{2q-2, 2q-1} \} .
 \end{aligned} \tag{60}$$

Bibliographie

- [1] Aitchison I. J. R. and Fraser C. M., Derivative expansions of fermions determinants : Anomaly induced vertices, G-W currents and Skyrme terms, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 2605 ; *Phys. Lett. B* **146** (1984) 63 ; Mackenzie R., Wilczek F. and Zee A., Possible form of vacuum deformation by heavy particles, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 2203 ; Aitchison I. J. R., Fraser C. M. and Miron P. J., The effective Lagrangian for skyrmion physics (Oxford preprint, 1985) ; Ripka G. et Kahana S., The stability of a chiral soliton in the fermion one loop approximation. *Phys. Lett. B* **155** (1985) 327 ; Fraser C. M., Calculation of higher derivative terms in the one loop effective Lagrangian (Oxford preprint, 1985) ; Gaudin M., Lagrangien effectif du champ chiral classique couplé aux fermions, *Saclay S. Ph. T. Janv.* (1984).
- [2] Bardeen W. A., Anomalous Ward identities in spinor field theory, *Phys. Rev.* **184** (1969) 1848 ; Adler S. L., *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426.
- [3] Nepomechie R. I., Evaluating fermion determinants through the chiral anomaly, *Annals of Physics* **158** (1984) 67 ; Balog J., Effective Lagrangian from QCD anomaly, *Phys. Lett. B* **149** (1984) 197 ; Zuk J. A., Gradient expansion of the one loop effective Lagrangian for chiral fermions (Oxford preprint 10, 1985).
- [4] Pauli W. and Villars F., *Rev. Modern Physics* **21** (1949) 434.
- [5] Goldstone J. and Wilczek F., Fractional quantum numbers on solitons, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 986.
- [6] Fujikawa K., Path integral mesure for gauge invariant fermion theory, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1195.
- [7] Frampton P. H. and Kephart T. W., Analysis of anomalies in higher space-time dimensions, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 1010 ; Zumino B., Wu Y. S. and Zee A., Chiral anomalies, higher dimensions and differential geometry, *Nucl. Phys. B* **239** (1984) 477.