

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften
ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE

N₁

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde

Nr. 67 - 70

III

Die Analyse der Polbewegung
mit Hilfe
meteorologischer Erregerfunktionen

von

Horst Jochmann

Herausgeber: Der Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde Potsdam

Als Manuskript gedruckt Potsdam 1981

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Das Modell der Polbewegung	7
1.1. Die Wirkung von Deformationsänderungen infolge von Richtungsänderungen der Zentrifugalkraft durch die Polbewegung	9
1.2. Das Zweikomponentenmodell der Polbewegung	11
1.3. Betrachtungen zu zwei Varianten der Differentialgleichung der erregten Polbewegung	13
2. Die Polbewegung unter dem Einfluß einer periodischen Erregerfunktion	14
2.1. Die Beziehungen zwischen Polbewegung und Erregerfunktion	15
2.2. Die Geometrie der Polbewegungsellipse	16
2.3. Die Polbewegungsellipse als Mittel zur Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung	18
2.4. Die Übertragungsfunktion	23
2.5. Ein Anpassungsverfahren zur Bestimmung der Periode der freien Polbewegung	24
3. Die meteorologische Erregerfunktion	27
3.1. Die Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen	28
3.2. Bemerkungen zur Erregerfunktion der saisonal schwankenden Grundwasserspeicherung	31
3.3. Die Berechnung der Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen	32
3.3.1. Die Jahreswelle der Erregerfunktion der Luftmassenbewegung	32
3.3.2. Fehlertheoretische Betrachtungen zur Berechnung der Erregerfunktion	39
3.3.3. Der Fehlereinfluß der Erregerfunktion auf die resultierende Polbewegung	41
3.4. Ergebnisse von Spektralanalysen der Erregerfunktion	42
4. Die Perioden der Polbewegung	49
4.1. Der Einfluß einer nichtharmonischen Schwingung auf die durch die harmonische Analyse bestimmten Schwingungen	50
4.2. Der Einfluß einer Amplitudenvariation der CHANDLER-Welle auf die durch harmonische Analyse bestimmten Parameter der Jahreswelle	52
4.3. Die Bestimmung der Parameter der Jahreswelle aus der Analyse von 6jährigen Zeitintervallen	53
4.4. Die harmonische Analyse von 10-Jahres-Intervallen der Polbewegung	57
4.4.1. Betrachtungen zu einigen determinierten und quasideterminierten Perioden der Polbewegung	57
4.4.1.1. Die Jahreswelle	57
4.4.1.2. Die CHANDLER-Welle	65
4.4.1.3. Die Halbjahreswelle	65
4.4.2. Folgerungen aus dem von determinierten Anteilen befreiten Energiespektrum	66

	Seite
5. Die Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung durch Eingangs-Ausgangs-Analyse	67
5.1. Die Bestimmung der CHANDLER-Welle auf Grund der Jahreswelle	67
5.2. Ist die CHANDLER-Periode variabel?	71
5.3. Die Bestimmung des Dämpfungsfaktors	72
6. Untersuchung zur Übertragung verschiedener Frequenzen der meteorologischen Erregerfunktion im System der Polbewegung	75
6.1. Determinierte Anteile von Erregerfunktion und Polbewegung	75
6.2. Stochastische Anteile von Erregerfunktion und Polbewegung	78
6.2.1. Ergebnisse einer Kreuzspektralanalyse zwischen Erregerfunktion und Polbewegung	83
7. Abschließende Betrachtungen	88
Literatur	90

Zusammenfassung

Auf Grund der meteorologischen Erregerfunktion wurden die Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung durch Eingangs-Ausgangs-Analyse bestimmt. Mit diesen Parametern wurde ein Modell der Polbewegung konstruiert, das zur Analyse des Einflusses der determinierten und stochastischen Anteile der meteorologischen Erregerfunktion auf die Polbewegung diente.

Summary

The parameters of the differential-equation of polar-motion were determined by input-output-analyses basing on the meteorological excitation function. Using these parameters a model of polar-motion was constructed. This model was used to analyse the influences of the deterministic and stochastic parts of the meteorological excitation function on polar-motion.

Résumé

Par analyse des entrées et sorties, on a déterminé, sur la base de la fonction excitatrice météorologique, les paramètres de l'équation différentielle du mouvement polaire. Ces paramètres ont servi à construire un modèle du mouvement polaire, utilisé pour analyser l'influence des composantes déterminées et stochastiques de la fonction excitatrice météorologique sur le mouvement polaire.

Резюме

На основе метеорологической возбудительной функции определены параметры дифференциального уравнения движения полюсов путём анализа входа-выхода. С помощью этих параметров была создана модель движения полюсов, применявшаяся для анализа влияния определённых и стохастических долей метеорологической возбудительной функции на движение полюсов.

Zur Interpretation physischer Einflüsse auf die Polbewegung müssen Größe und zeitliche Variation der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung bekannt sein. In der Literatur (MUNK, Mac DONALD 1960) werden zahlreiche Verfahren angegeben, mit denen diese Parameter auf Grund der Polkoordinaten des IPMS (International Polar Motion Service) bestimmt werden. Weniger bekannt sind dagegen Arbeiten, die versuchen, diese Parameter auf Grund des Verhaltens der Eingangs- und Ausgangsgrößen im System der Polbewegung zu bestimmen. Eigentlich ist nur auf diesem Wege (physikalisch gesehen) eine Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung möglich, da eine reine Analyse der Polbewegungsdaten zusätzliche Hypothesen über die Erregerfunktion erfordert.

Erstes Ziel vorliegender Arbeit war die Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung, wobei als Eingangsgröße die Erregerfunktion meteorologischer Massenbewegungen verwendet wurde. Als zweites wurden die Einflüsse der meteorologischen Erregerfunktion auf die Polbewegung im Periodenbereich 0,5 bis 3,0 Jahre analysiert.

Die Durchführung dieser Arbeiten erforderte die Aufbereitung umfangreichen Datenmaterials. Für die dabei gewährte Unterstützung sei Fräulein DAMMKÖHLER, Fräulein Ing. FELSMANN und Fräulein WINKLER gedankt.

Potsdam, September 1980

1. Das Modell der Polbewegung

Das mathematische Modell der Polbewegung folgt bekanntlich aus dem Drehimpulssatz, der im erdfesten Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) dargestellt wird:

$$(1) \quad \frac{d\bar{H}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{H} = \bar{M},$$

worin \bar{H} der Drehimpuls, $\bar{\omega}$ der Rotationsvektor und \bar{M} das Moment der äußeren Kräfte ist. Bei Annahme eines konstanten Trägheitsmomentes folgen aus (1) die bekannten EULERSchen Kreisgleichungen. In den weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß die Erde aus Massen zusammengesetzt ist, die infolge interner oder externer Kräfte Relativbewegungen zueinander ausführen. Hierdurch wird (1) in zweierlei Weise beeinflußt:

1. Es verändert sich die Massengeometrie der Erde, wodurch sich eine zeitliche Variation des Trägheitstensors \bar{I} ergibt.
2. Es entsteht eine dynamische Wirkung infolge des Impulses ($m \bar{v}$) der Massenbewegung, die zum Drehimpuls den Beitrag $\bar{h} = \bar{r} \times m \bar{v}$ liefert.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus (1) die Gleichung von LIOUVILLE

$$(2) \quad \bar{M} = \frac{d}{dt} (\bar{I} \bar{\omega} + \bar{h}) + (\bar{\omega} \times (\bar{I} \bar{\omega} + \bar{h})) = \frac{d\bar{I}}{dt} \bar{\omega} + \bar{I} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{d\bar{h}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{I} \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \bar{h}.$$

Der Trägheitstensor ist

$$(3) \quad \bar{I} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente dieses Tensors sind die Trägheits- und Deviationsmomente, die nach folgender Formel erhalten werden:

$$c_{ij} = \int_M (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) dm.$$

Hierin ist nach der EINSTEINschen Summenkonvention über sämtliche x_k zu summieren ($k = 1$ bis 3). Das KRONECKER-Symbol ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Es wird angenommen, daß die Rotationsachse nur geringfügig von der Hauptträgheitsachse abweicht, so daß der Trägheitstensor der Erde

$$(4) \quad \bar{I} = \begin{pmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & A + c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C + c_{33} \end{pmatrix}$$

wird. In (4) sind die Deviationsmomente kleine, zeitlich variable Größen. Die Variabilität der Hauptträgheitsmomente A und C wird durch die Größen c_{11} , c_{22} und c_{33} dargestellt.

Werden in (2) die Komponenten der darin enthaltenen Vektoren und der Trägheitstensor (4) eingeführt, so ergeben sich die skalaren Gleichungen (siehe MUNK, Mac DONALD 1960, JOCHMANN 1976 und LEICK 1978):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{C-A}{A} \omega_2 \omega_3 &= \frac{M_1}{A} + \frac{c_{23}}{A} \omega_3^2 - \frac{\dot{c}_{13}}{A} \omega_3 + \frac{h_2}{A} \omega_3 - \frac{\dot{h}_1}{A} \\ (5) \quad \dot{\omega}_2 - \frac{C-A}{A} \omega_1 \omega_3 &= \frac{M_2}{A} - \frac{c_{13}}{A} \omega_3^2 - \frac{\dot{c}_{23}}{A} \omega_3 - \frac{h_1}{A} \omega_3 - \frac{\dot{h}_1}{A} \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{M_3}{C} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} \omega_3 - \frac{\dot{h}_3}{C}. \end{aligned}$$

In (4) wurden die quadratischen Glieder kleiner Werte vernachlässigt. Da die x_3 -Achse des gewählten Koordinatensystems nahezu mit der Rotationsachse zusammenfällt, kann man

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 u_1 \\ \omega_2 &= \omega_0 u_2 \\ \omega_3 &= \omega_0 (1 + u_3) \end{aligned}$$

setzen, worin u_1 , u_2 die Komponenten der Polbewegung und u_3 die relative Änderung der Rotationsgeschwindigkeit sind. Damit erhält man (4) in komplexer Form

$$\begin{aligned} (6) \quad \dot{u} &= i \beta_r (u - \psi), \\ (7) \quad \dot{u}_3 &= \frac{M_3}{c \omega_0} - \frac{\dot{c}_{33}}{\omega_0} - \frac{\dot{h}_3}{c \omega_0}. \end{aligned}$$

Die weiteren Untersuchungen beschränken sich auf (6), in der

$$\begin{aligned} \beta_r &= \frac{C-A}{A} \omega_0 \text{ die EULERSche Kreisfrequenz} \\ (8) \quad \psi &= \frac{i M}{(C-A) \omega_0^2} + \frac{c}{C-A} - \frac{i \dot{c}}{(C-A) \omega_0} + \frac{h}{(C-A) \omega_0} - \frac{i \dot{h}}{(C-A) \omega_0^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + i u_2, \\ M &= M_1 + i M_2, \\ c &= c_{13} + i c_{23}, \\ h &= h_1 + i h_2 \end{aligned}$$

sind.

In den Gleichungen (6) und (8) sind die Größen h und c Funktionen der Zeit und müssen für verschiedene Phänomene, die die Rotation der Erde beeinflussen, berechnet werden. In der durch (6) gegebenen Form ist die Differentialgleichung grundsätzlich für alle Kontinuumszustände der Erde anwendbar, da alle Möglichkeiten einer Deformation durch die Einführung eines variablen Trägheitstensors offen gelassen wurden.

In der Erregerfunktion ψ sind Glieder mit massengeometrischer und dynamischer Wirkung enthalten. Es läßt sich nachweisen (JOCHMANN 1976), daß die dynamischen Anteile der Erregerfunktion gegenüber den massengeometrischen vernachlässigt werden können, vorausgesetzt, die Perioden der Massenbewegungen sind wesentlich größer als ein Tag. Aus der Theorie von Präzession und Nutation ist bekannt (BUCERIUS-SCHNEIDER 1966), daß die durch sie erzeugte Polhodie einen Öffnungswinkel $\approx 0,01''$ und eine Umlaufdauer von einem Tag hat, so daß die äußeren Momente in der Erregerfunktion nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Es verbleibt für die folgenden Untersuchungen als Erregerfunktion nur der Anteil

$$(9) \quad \psi = \frac{c}{c - A},$$

der geometrisch die Bewegung des Inertialpoles im Polkoordinatensystem u_1, u_2 darstellt.

1.1. Die Wirkung von Deformationsänderungen infolge von Richtungsänderungen der Zentrifugalkraft durch die Polbewegung

Infolge der Polbewegung weicht die Rotationsachse von der Figurenachse (Hauptträgheitsachse) ab. Hierdurch ändert sich die Richtung der auf die Massenelemente der Erde wirkenden Fliehkraft, wodurch das Gleichgewicht zwischen ihr und den zwischen den Massenelementen wirkenden Kräften (Gravitation, Elastizität, innere Reibung) gestört wird. Die Wiederherstellung des Gleichgewichts wird daher eine Änderung der Massengeometrie zur Folge haben, die eine Bewegung des Inertialpoles und damit die Entstehung einer Erregerfunktion in der Differentialgleichung der Polbewegung bewirkt.

Wären die Massenelemente nur gravitativen Kräften und der Fliehkraft unterworfen, so würde der Rotationspol stets mit dem Inertialpol zusammenfallen. Dies wird jedoch durch die anderen inneren Kräfte verhindert, so daß der Inertialpol zwischen seiner ursprünglichen Lage (Nullpunkt des Polkoordinatensystems) und dem Rotationspol liegen wird, d. h., die Erregerfunktion wird

$$(10) \quad \psi_d = \psi_d(u, \dot{u}, t) < u.$$

Vorstehende Formel läßt die rheologischen Eigenschaften des Erdkörpers völlig offen und kann für jeden Fall entsprechend modifiziert werden. Für einen elastischen Körper folgt nach dem HOOKEschen Gesetz

$$(11) \quad \psi_d = k_d \cdot u,$$

womit sich nach (6)

$$(12) \quad \dot{u} = i\beta_r (1 - k_d) u = i\beta u$$

ergibt. In (12) ist

$$(13) \quad \beta = \beta_r (1 - k_d)$$

die CHANDLERsche Kreisfrequenz.

Zwischen k_d und der LOVEschen Zahl k besteht folgende Beziehung:

$$(14) \quad k_d = \frac{k}{C - A} \frac{\omega_0^2 a^5}{3f}$$

(LARMOR 1909, LOVE 1909), worin a der Äquatorradius und f die Gravitationskonstante ist.

Der CHANDLERSchen Kreisfrequenz entspricht eine Periodenlänge von

$$T_0 \approx 1,20 \text{ a}$$

gegenüber der EULERSchen von

$$T_r = 0,823 \text{ a.}$$

Die Periode der freien Bewegung des Poles wird demnach infolge der Elastizität des Erdkörpers verlängert.

Beobachtungen des Verhaltens der Amplitude des freien Polbewegungsanteils zeigen jedoch, daß die Elastizität allein nicht genügt, um das Verhalten der freien Bewegung zu erklären. Offenbar muß eine Dämpfung der freien Bewegung des Pols angenommen werden.

Die Deformation des Erdkörpers erfolgt demnach nicht nach dem HOOKEschen Gesetz. In die Deformationsbeziehung muß eine Komponente eingeführt werden, die die Abhängigkeit der Deformation von der Zeitdauer der Kraftwirkung ausdrückt.

JEFFREYS und LARMOR haben das HOOKEsche Gesetz so modifiziert, daß in ihm die Wirkung einer inneren Reibung (Firmoviskosität) zum Ausdruck kommt. Dies entspricht dem rheologischen Modell von KELVIN-VOIGT.

Unter Voraussetzung des modifizierten Deformationsgesetzes ergibt sich folgende Erregerfunktion:

$$(15) \quad \psi_d = k_d u - k_v \frac{\partial \psi_d}{\partial t}.$$

Da k_v ein kleiner Wert ist, kann in (15) näherungsweise

$$\frac{\partial \psi_d}{\partial t} = k_d \cdot \dot{u}$$

gesetzt werden, so daß man

$$(16) \quad \psi_d = k_d u - k_v k_d \dot{u}$$

erhält. Mit vorstehender Formel wird die Differentialgleichung der freien Polbewegung

$$(17) \quad \ddot{u} = i\beta_r (u - k_d u + k_d k_v \dot{u}),$$

deren Lösung eine gedämpfte freie Schwingung ergibt. Auf der rechten Seite von (17) kann im Hinblick auf den kleinen Wert k_v

$$\dot{u} = i \beta u$$

gesetzt werden. Formel (17) wird dann

$$(18) \quad \dot{u} + \lambda u = i \beta u.$$

In (18) ist

$$(19) \quad \lambda = \beta \beta_r k_d / k_v.$$

Die Lösungen von (17) und (18) unterscheiden sich nur geringfügig. Aus (18) wird unter Berücksichtigung von (6) die Differentialgleichung der Polbewegung mit Erregerfunktion:

$$(20) \quad \dot{u} + \lambda u = i (\beta u - \beta_r \psi).$$

1.2. Das Zweikomponentenmodell der Polbewegung

Dem in 1.1. entwickelten mathematischen Modell der Polbewegung lag ein deformierbarer Erdkörper gleicher Rotationsgeschwindigkeit zugrunde. Eine andere Modellvorstellung geht von einem aus zwei Komponenten bestehenden Erdmodell aus, die unterschiedliche Rotationsgeschwindigkeiten haben und zwischen denen dissipative Kräfte wirksam sind. Ein solches Polbewegungsmodell wurde von BONDI und GOLD (1955) untersucht. Die zwei Komponenten sind bei BONDI und GOLD Kern und Mantel, die als starr angenommen werden. In den folgenden Betrachtungen soll an die Untersuchungen von BONDI und GOLD angeschlossen werden, die jedoch hinsichtlich der Annahme eines firmo-viskosen Mantels erweitert werden sollen. Der Kern wird auch hier als starr angenommen.

Die Bewegungsgleichungen dieses rotierenden Systems lauten, wenn sie auf ein mit dem Mantel fest verbundenes Koordinatensystem bezogen werden:

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{H}_M}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{H}_M) &= \mu_1 (\bar{\Omega} - \bar{\omega}) \\ \frac{d\bar{H}_K}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{H}_K) &= -\mu_1 (\bar{\Omega} - \bar{\omega}). \end{aligned}$$

In Koordinatenschreibweise ergibt sich aus (21):

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{C-A}{A} \omega_2 \omega_3 - \frac{c_{23}}{A} \omega_3^2 &= -\frac{D}{A} (\dot{\Omega}_1 + \omega_2 \Omega_3 - \omega_3 \Omega_2), \\ \dot{\omega}_2 + \frac{C-A}{A} \omega_1 \omega_3 + \frac{c_{13}}{A} \omega_3^2 &= -\frac{D}{A} (\dot{\Omega}_2 + \omega_3 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_3), \\ \dot{\omega}_3 + \frac{c_{33}}{C} + \frac{h_3}{C} &= -\frac{D}{C} (\dot{\Omega}_3 + \omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1). \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_1 + \frac{C-A}{A} \omega_2 \omega_3 - \frac{c_{23}}{A} \omega_3^2 = \frac{\mu_1}{A} (\dot{\Omega}_1 - \omega_1),$$

$$\dot{\omega}_2 + \frac{C-A}{A} \omega_1 \omega_3 + \frac{c_{13}}{A} \omega_3^2 = \frac{\mu_1}{A} (\dot{\Omega}_2 - \omega_2),$$

$$\dot{\omega}_3 + \frac{\dot{c}_{33}}{C} + \frac{\dot{h}_3}{C} = \frac{\mu_1}{C} (\dot{\Omega}_3 - \omega_3);$$

dabei wurde der Kern als eine Kugel mit dem Trägheitsmoment D angenommen.

Wird in vorstehenden Gleichungen

$$\omega_3 = \omega_0 = \text{const.},$$

$$\dot{\Omega}_3 = \omega_0 + d \dot{\Omega}_0$$

$$\alpha = \frac{D}{A}; \mu_1 = D \mu \omega_0$$

gesetzt, so ergibt sich bei Vernachlässigung kleiner Werte II. Ordnung und unter Annahme eines firmoviskosen Mantels

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{u} + \lambda u - i \beta u &= -\alpha (\dot{U} - i \omega_0 (u - U)), \\ \dot{u} + \lambda u - i \beta u &= \alpha \mu \omega_0 (U - u). \end{aligned}$$

Dem Vorgang bei BONDI und GOLD entsprechend wird

$$U = Ku$$

gesetzt und der Lösungsansatz

$$(24) \quad u = a e^{iqt}$$

gemacht; dann ergibt sich

$$(25) \quad K = 1 + \frac{1}{\alpha \mu \omega_0} (\lambda + i (q - \beta)).$$

Für q erhält man eine quadratische Gleichung, von deren Lösungen nur eine mit dem beobachteten Phänomen der Polbewegung verträglich ist. Sie lautet:

$$(26) \quad q = \frac{\beta + \lambda + i (\lambda - \beta \mu)}{1 - i \mu (1 + \alpha)},$$

womit sich aus (24)

$$(27) \quad K = 1 - \frac{\beta}{\omega_0} \frac{1 - i \frac{\lambda}{\beta} (\frac{2}{\alpha} + 1)}{1 - i \mu (1 + \alpha)}.$$

ergibt. Für $K = 1$ wird $\mu = \infty$ und

$$(28) \quad q = \frac{\beta + i \lambda}{1 + \alpha}.$$

Dies entspricht dem in 1.1. behandelten Fall der Firmoviskosität für den gesamten Erdkörper.

Aus (24) folgt, daß die Dämpfung der Polbewegung durch den imaginären Anteil von (26)

$$(29) \quad q_{Im} = \frac{\lambda(1 + \mu^2(1 + \alpha)) + \alpha\mu\beta}{1 + \mu^2(1 + \alpha)^2}$$

repräsentiert wird. Aus $dq_{Im}/d\mu = 0$ ergeben sich die für extreme Dämpfungen geltenden Werte

$$\mu_{1,2} = -\frac{\lambda}{\beta} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{\beta^2} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} + \frac{1}{(1 + \alpha)^2}} \approx \pm \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Der positive Wert μ ergibt das Maximum der Dämpfung. Mit diesem erhält man

$$(30) \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} \beta - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \lambda \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} \lambda + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \beta \right).$$

Für eine mittlere Dichte des Kerns von $\rho = 11 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^2$ wird $\alpha = 0,06$, womit sich aus (30)

$$(31) \quad q = 0,972 \beta - 0,028 \lambda + i (0,972 \lambda + 0,028 \beta)$$

ergibt. Aus (30) und (31) folgt, daß für Friktionsvorgänge an der Kern-Mantel-Grenze die Frequenz der freien Bewegung geringfügig vermindert wird und der Dämpfungsfaktor vergrößert wird. Es ist jedoch zu beachten, daß dieses Ergebnis unter der unrealen Voraussetzung eines starren Kerns erhalten wurde. Bei realeren Kernmodellen (flüssig oder flüssiger äußerer Kern mit festem inneren Kern) wird der Koeffizient α wesentlich geringer werden, so daß die Frequenz der freien Bewegung hauptsächlich durch die rheologischen Verhältnisse des Mantels bestimmt wird. Der Dämpfungsfaktor wird in diesem Fall nur geringfügig durch die Wechselwirkungen zwischen Kern und Mantel beeinflusst. Aus vorstehenden Untersuchungen wird das durch Formel (20) gegebene mathematische Modell verifiziert.

Die Ergebnisse für das Zweikomponentenmodell (Formel (30)) und das Einkomponentenmodell (Formel (19)) zeigen, daß Dämpfungsfaktor und Frequenz der freien Bewegung voneinander abhängen.

1.3. Betrachtungen zu zwei Varianten der Differentialgleichung der erregten Polbewegung

In der Literatur wird die Differentialgleichung der Polbewegung (20) in zwei verschiedenen Formen angegeben:

$$(32) \quad \dot{u} + \lambda u = i \beta \left(u - \frac{\beta}{\beta} \psi \right) \quad (\text{nach MUNK und Mac DONALD 1960}),$$

$$(33) \quad \dot{u} + \lambda u = i \beta (u - \psi) \quad (\text{nach KLEIN und SOMMERFELD 1889}).$$

Formel (33) entspricht der Folgerung, daß eine elastische Erde die gleiche Kreisbewegung wie eine starre ausführt, deren Massengeometrie sich beim Verschwinden der Zentrifugalkräfte einstellen würde. Demzufolge muß hier die Erregerfunktion aus Massenbewegungen an einer starren Erde berechnet werden.

Bei der ersten Variante muß die elastische Nachgiebigkeit der Erdoberfläche infolge der variablen Lasten berücksichtigt werden. Nach MUNK und Mac DONALD (1960) muß in (32) anstelle von ψ die Erregerfunktion

$$\psi' = (1 + k') \psi$$

eingeführt werden, worin

$$k' = - \frac{1}{1 + \mu}$$

ist. ($\mu = 2,3$ ist hier der LAMÉsche Parameter der Erde.)

Man erkennt leicht, daß

$$(1 + k') \cdot \frac{\beta_r}{\beta} \approx 1$$

wird. (32) und (33) sind demnach gleichwertig, wenn die entsprechenden Formen der Erregerfunktion berücksichtigt werden.

2. Die Polbewegung unter dem Einfluß einer periodischen Erregerfunktion

Den folgenden Untersuchungen wird die Differentialgleichung (33)

$$\dot{u} + \lambda u = i \beta (u - \psi)$$

zugrunde gelegt, in welcher die Erregerfunktion in der Form

$$(34) \quad \psi(t) = K_+ e^{i\alpha t} + K_- e^{-i\alpha t}$$

eingeführt wird. In vorstehender Gleichung sind die Werte

$$(35) \quad K_+ = A_+ + B_+ i, \quad K_- = A_- + B_- i$$

komplexe Koeffizienten. Wird die Erregerfunktion in der Darstellung

$$(36) \quad \psi(t) = L_1 \sin \alpha t + L_2 \cos \alpha t + i (K_1 \sin \alpha t + K_2 \cos \alpha t)$$

eingeführt, so bestehen zwischen den Koeffizienten dieser Gleichung und den Koeffizienten von (35) folgende Beziehungen:

$$(37) \quad \begin{aligned} A_+ &= \frac{1}{2} (K_1 + L_2), & B_+ &= \frac{1}{2} (K_2 - L_1), \\ A_- &= \frac{1}{2} (L_2 - K_1), & B_- &= \frac{1}{2} (K_2 + L_1). \end{aligned}$$

Den durch (34) erregten Anteil der Polbewegung erhält man bekanntlich durch den Ansatz

$$(38) \quad u = k_+ e^{i\alpha t} + k_- e^{-i\alpha t}$$

mit $k_+ = a_+ + b_+ i$; $k_- = a_- + b_- i$.

Für (38) läßt sich eine (36) entsprechende Darstellungsform wählen, zwischen deren Koeffizienten k_1, k_2, l_1, l_2 und den Koeffizienten von (38) den Formeln (37) entsprechende Beziehungen bestehen.

2.1. Die Beziehungen zwischen Polbewegung und Erregerfunktion

Durch Einsetzen von (34) und (38) in (33) ergeben sich durch Koeffizientenvergleich folgende Beziehungen zwischen der Erregerfunktion und dem erregten Anteil der Polbewegung:

$$(39) \quad \begin{aligned} a_+ &= -\frac{\beta}{\lambda^2 + (\alpha - \beta)^2} ((\alpha - \beta) A_+ - \lambda B_+), \\ b_+ &= -\frac{\beta}{\lambda^2 + (\alpha - \beta)^2} ((\alpha - \beta) B_+ + \lambda A_+), \\ a_- &= \frac{\beta}{\lambda^2 + (\alpha + \beta)^2} ((\alpha + \beta) A_- + \lambda B_-), \\ b_- &= \frac{\beta}{\lambda^2 + (\alpha + \beta)^2} ((\alpha + \beta) B_- - \lambda A_-). \end{aligned}$$

Nach (37) ist

$$\begin{aligned} l_1 &= b_- - b_+, & k_1 &= a_+ - a_-, \\ l_2 &= a_- + a_+, & k_2 &= b_1 - b_-, \end{aligned}$$

womit sich unter Berücksichtigung gleicher Formeln für die Koeffizienten der Erregerfunktion für die Darstellungsform (36) der Polbewegung und Erregerfunktion folgende Beziehungen ergeben:

$$(40) \quad \begin{aligned} l_1 &= M \cdot \left\{ -\beta(\alpha^2 - \beta^2 - \lambda^2) L_1 + \alpha(\alpha^2 - \beta^2 + \lambda^2) K_2 + (2\alpha\beta L_2 + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2) K_1) \lambda \right\}, \\ l_2 &= M \cdot \left\{ -\beta(\alpha^2 - \beta^2 - \lambda^2) L_2 - \alpha(\alpha^2 - \beta^2 + \lambda^2) K_1 + \right. \\ &\quad \left. + ((\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2) K_2 - 2\alpha\beta L_1) \lambda \right\}, \\ k_1 &= M \cdot \left\{ -\beta(\alpha^2 - \beta^2 - \lambda^2) K_1 - (\alpha^2 - \beta^2 + \lambda^2) L_2 + \right. \\ &\quad \left. + (2\alpha\beta K_2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2) L_1) \lambda \right\}. \end{aligned}$$

$$(40) \quad k_2 = M \cdot \left\{ -\beta (\alpha^2 - \beta^2 - \lambda^2) k_2 + \alpha (\alpha^2 - \beta^2 + \lambda^2) L_1 - \right. \\ \left. - (2\alpha\beta k_1 + (\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2) L_2) \lambda \right\}$$

mit

$$M = \frac{\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)\lambda^2 + \lambda^4}.$$

Mit (39) ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung der Polbewegung

$$(41) \quad u = k_+ e^{i\alpha t} + k_- e^{-i\alpha t} + C e^{(i\beta - \lambda)t},$$

in der allgemein ein erregter und ein freier Anteil der Polbewegung enthalten ist. In den folgenden Untersuchungen soll zunächst nur die Geometrie der erregten Polbewegung betrachtet werden.

2.2. Die Geometrie der Polbewegungsellipse

Die Erregerfunktion ist geometrisch eine Bewegungskurve des Trägheitspoles, die bei periodischen Erregungen im allgemeinen eine Ellipse ist, die in einen Kreis oder eine Gerade ausarten kann. Aus den Beziehungen zwischen Polbewegungskurve und Erregerfunktion folgt, daß dann erstere ebenfalls eine Ellipse sein muß, deren Lage und Form durch Größe und Richtung der Achsen gegeben ist.

Aus dem erregten Anteil der Polbewegung

$$u = k_+ e^{i\alpha t} + k_- e^{-i\alpha t}$$

erhält man die Richtung der Ellipsenachsen aus der Beziehung

$$\frac{du}{dt} = 0.$$

Die Auflösung vorstehender Gleichung ergibt

$$e^{-i2\alpha t} a_{,b} = \frac{k_-}{k_+} = \frac{a_- + i b_-}{a_+ + i b_+},$$

woraus

$$(42) \quad \tan 2\alpha t_{ab} = \frac{b_- a_+ - b_+ a_-}{a_- a_+ + b_- b_+}$$

folgt.

Vorstehende Formel kann als Funktion der Koeffizienten (40) dargestellt werden, womit man

$$(43) \quad \tan 2\alpha t_{ab} = 2 \frac{k_1 k_2 + l_1 l_2}{k_2^2 - k_1^2 + l_2^2 - l_1^2}$$

erhält.

Zur Berechnung der Länge der Halbachsen der Ellipse wird (42) in der Form

$$(44) \quad \tan 2 \alpha t_{ab} = \frac{\frac{b_-}{a_-} \frac{b_+}{a_+}}{1 + \frac{b_-}{a_-} \frac{b_+}{a_+}} = \tan (\gamma_- - \gamma_+)$$

geschrieben. In (44) ist

$$\tan \gamma_- = \frac{b_-}{a_-} \quad \text{und} \quad \tan \gamma_+ = \frac{b_+}{a_+}.$$

Damit erhält man:

$$(45) \quad \alpha t_a = \frac{\gamma_- - \gamma_+}{2}$$

$$\alpha t_b = \frac{\gamma_- - \gamma_+}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Werden diese Werte in die erregten Anteile der Gleichung (41) eingesetzt, so wird

$$u_a = (|k_+| + |k_-|) e^{\frac{i(\gamma_+ + \gamma_-)}{2}},$$

$$u_b = (|k_+| - |k_-|) i e^{\frac{i(\gamma_+ + \gamma_-)}{2}},$$

woraus die Halbachsen

$$(46) \quad a = |k_+| + |k_-|,$$

$$b = |k_+| - |k_-|$$

folgen.

Weiterhin wird in den folgenden Untersuchungen die Fläche der Ellipse benötigt. Diese ist

$$(47) \quad F = a b \pi = (|k_+|^2 - |k_-|^2) \cdot \pi,$$

$$F = (|a_+^2 + b_+^2 - a_-^2 - b_-^2|) \pi.$$

Unter Berücksichtigung von (37) ergibt sich aus (47) folgende Darstellungsform der Gleichung für den Flächeninhalt der Ellipse:

$$(48) \quad F = (|k_1 l_2 - k_2 l_1|) \pi.$$

2.3. Die Polbewegungsellipse als Mittel zur Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung

Die Polbewegungsellipse ist ein Bewegungsanteil einer wesentlich komplizierteren Bewegungskurve, die einer bestimmten Frequenz der Gesamterregung der Polbewegung zugeordnet ist. Sinnvoll ist ihre Berechnung nur für zeitlich determinierte Anteile der Erregerfunktion. Ihre geometrischen Eigenschaften sind Funktionen der Erregerfunktion und der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung, so daß es nahe liegt, diese Parameter aus den durch die geometrischen Eigenschaften der Polbewegungsellipse repräsentierten Beziehungen zwischen der Erregerfunktion und dem zugehörigen Anteil der Polbewegung zu bestimmen.

Hierzu werden die in die Formeln (42) und (47) eingehenden Koeffizienten durch die Beziehungen (39) ersetzt. Danach ergibt sich aus (42)

$$(49) \quad \tan 2 \alpha t_{ab} = \frac{A_+ B_- - B_+ A_- - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} (B_+ B_- + A_+ A_-) \lambda - (B_- A_+ - B_+ A_-) \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2}}{A_+ A_- + B_+ B_- + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} (A_+ B_- - A_- B_+) \lambda - (B_- B_+ + A_- A_+) \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2}}$$

Vernachlässigt man in (49) die Dämpfung, so ergibt sich

$$(50) \quad \tan 2 \alpha t'_{ab} = \frac{A_+ B_- - B_+ A_-}{A_+ A_- + B_+ B_-}$$

Demnach wird die Richtung der Ellipsenachsen im wesentlichen nur von der Erregerfunktion und dem Dämpfungsparameter bestimmt.

Setzt man (50) in (49) ein, so ergibt sich

$$(51) \quad \tan 2 \alpha t_{ab} = \frac{1 - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \cot 2 \alpha t'_{ab} \cdot \lambda - \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2}}{1 + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \tan 2 \alpha t'_{ab} \lambda - \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2}}$$

womit eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des Dämpfungsparameters erhalten wurde. Man braucht lediglich nach (50) aus der Erregerfunktion $\tan 2 \alpha t'_{ab}$ zu bestimmen und diesen Wert mit dem aus den astronomisch ermittelten Polkoordinaten bestimmten Wert $\tan 2 \alpha t_{ab}$ zu vergleichen, der nach (42) oder (43) erhalten wird. Die Kreisfrequenz β der freien Polbewegung braucht nur näherungsweise bekannt zu sein, da λ ein kleiner Wert ist. Wegen des kleinen Wertes ist in (51) in der Regel das quadratische Glied von λ vernachlässigbar. Unter der Voraussetzung, daß $\tan 2 \alpha t'_{ab}$ klein ist, gilt dann näherungsweise folgende Formel

$$(52) \quad \tan 2 \alpha t_{ab} - \tan 2 \alpha t'_{ab} = \frac{-2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} (1 + \tan^2 2 \alpha t'_{ab}) \lambda$$

Hierin ist $\beta \approx 2\pi/1,2$ und Jahresperiode $\alpha = 2\pi$, wenn als Zeiteinheit das Jahr eingeführt wird. Für die Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen wird

$$\tan 2\alpha t'_{ab} \approx 0.$$

Durch Einführung vorstehender Zahlenwerte erhält man aus (52)

$$\tan 2\alpha t_{ab} - \tan 2\alpha t'_{ab} = -1,042 \cdot \lambda.$$

Diese Beziehung liefert nur dann eine plausible Lösung für den Dämpfungsfaktor, wenn die linke Seite negativ wird.

Wird (39) in (47) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F &= \pi \beta^2 \left(\frac{A_+^2 + B_+^2}{(\alpha - \beta)^2 + \lambda^2} - \frac{A_-^2 + B_-^2}{(\alpha + \beta)^2 + \lambda^2} \right) = \\ (53) \quad &= \pi \beta^2 \left(\frac{|K_+|^2}{(\alpha - \beta)^2 + \lambda^2} - \frac{|K_-|^2}{(\alpha + \beta)^2 + \lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Mit

$$F' = \frac{\pi \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} (|K_+|^2 (\alpha + \beta)^2 - |K_-|^2 (\alpha - \beta)^2)$$

wird (53)

$$\begin{aligned} F &= F' + \left\{ \frac{\pi \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} (|K_+|^2 - |K_-|^2) - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} F' \right\} \lambda^2 + \\ (54) \quad &+ \left\{ \frac{4(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^4} F' - \pi \beta^2 \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^4} \cdot (|K_+|^2 - |K_-|^2) \right\} \lambda^4. \end{aligned}$$

Zur numerischen Abschätzung vorstehender Formel werden die Verhältnisse bei der Erregerfunktion der Luftmassenbewegung vorausgesetzt. Für diese gilt

$$|K_+|^2 = |K_-|^2 = \frac{K_2^2 + L_2^2}{4},$$

womit sich aus (54)

$$(55) \quad F = F' - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} F' \lambda^2 + \frac{4(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^4} F' \lambda^4$$

ergibt. Mit den bereits erwähnten numerischen Werten für α und β erhält man:

$$F = F' (1 - 0,919 \lambda^2 + 0,840 \lambda^4).$$

Da λ ein kleiner Wert ist und die Fläche von ihm nur quadratisch beeinflusst wird, kann der Einfluß der Dämpfung auf die Flächengröße in der Regel vernachlässigt werden. Gegebenenfalls müßte F' mit einem geschätzten Wert der Dämpfung korrigiert werden.

Aus (53) geht hervor, daß die Flächengröße der Polbewegungsellipse hauptsächlich durch die Frequenz der freien Bewegung beeinflusst wird, so daß sich ein Flächenvergleich als Mittel zur Bestimmung dieses Parameters anbietet.

In (53) wird $\lambda = 0$ und $r = \alpha/\beta$ gesetzt, wobei r die Länge der Periode der freien Polbewegung ist, wenn einer Schwingung pro Jahr entspricht. Damit ergibt sich

$$(56) \quad F = \frac{\pi}{(r^2 - 1)^2} \{ |K_+|^2 (r + 1)^2 - |K_-|^2 (r - 1)^2 \}.$$

Ist ein Näherungswert r_0 bekannt, mit dem nach vorstehender Formel aus den Koeffizienten der Erregerfunktion in erster Näherung die Fläche der Polbewegungsellipse (F') berechnet werden kann, dann gilt:

$$(57) \quad F = F' + \frac{\partial F'}{\partial r} dr.$$

Ist die aus den Polkoordinaten berechnete Fläche fehlerfrei, so kann aus der Differenz beider Flächen nach (57) eine Korrektur der Länge der freien Polbewegung ermittelt werden.

In (57) ist

$$(58) \quad \frac{\partial F'}{\partial r} = - \frac{2\pi}{(r_0^2 - 1)^3} (|K_+|^2 (r_0 + 1)^3 - |K_-|^2 (r_0 - 1)^3).$$

Für die Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen erhält man aus (56), (57) und (58)

$$(59) \quad F' = \pi (L_2^2 + K_2^2) \frac{r}{(r^2 - 1)^2}$$

und

$$(60) \quad F - F' = - \frac{3r_0^2 + 1}{r_0^2 - 1} F' \frac{dr}{r_0}.$$

(60) wird für die bekannte Periode der freien Polbewegung

$$r_0 = 1,2, \quad F - F' = -10,076 \cdot F' dr.$$

Mit (51) und (57) wurden zwei Beziehungen gewonnen, mit deren Hilfe es möglich ist, auf Grund einer bekannten periodischen Erregerfunktion und des zugehörigen Anteils der Polbewegung die Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung zu bestimmen.

Die Anwendbarkeit der beschriebenen Methode hängt im wesentlichen von der Genauigkeit ab, mit der auf Grund gegebener Meßwerte die Koeffizienten der betreffenden Erregerfunktion und der zugehörigen Polbewegung ermittelt werden können. Wie später noch nachgewiesen wird, kann man die zufälligen Fehleranteile der aus Luftdruckdaten ermittelten Erregerfunktion gegenüber den zufälligen Fehlereinflüssen der aus astronomischen Beobachtungen ermittelten Polkoordinaten vernachlässigen.

Unter dieser Voraussetzung wird die Standardabweichung des Dämpfungsfaktors

$$(61) \quad \sigma_{\lambda} = 0,96 \cdot \sigma_{\tan 2\alpha t_{ab}}$$

$\sigma_{\tan 2\alpha t_{ab}}$ ergibt sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (43). Wird vorausgesetzt, daß die in dieser Formel enthaltenen Koeffizienten der Jahresperiode aus einer harmonischen Analyse für ein Sechsjahresintervall bestimmt wurden, so haben diese Werte folgende Gewichtskoeffizienten:

$$Q_{k_1 k_1} = Q_{k_2 k_2} = Q_{l_1 l_1} = Q_{l_2 l_2} = 0,03 = Q_{ii}$$

Die Kovarianzkoeffizienten verschwinden wegen der Orthogonalität des Normalgleichungssystems bei der harmonischen Analyse.

Nach (43) ergibt sich der Gewichtskoeffizient von $\tan 2\alpha t_{ab}$ zu

$$(62) \quad Q_{\tan \tan} = 4 \frac{k_1^2 + k_2^2 + l_1^2 + l_2^2}{(k_2^2 - k_1^2 + l_2^2 - l_1^2)^2} (1 + 4 \tan^2 2\alpha t) Q_{ii}$$

womit man

$$(63) \quad \sigma_{\tan 2\alpha t_{ab}} = \sqrt{Q_{\tan \tan}} \cdot \sigma_0$$

erhält, worin σ_0 die Standardabweichung der Polkoordinaten ist. Die mittleren Werte der in (62) enthaltenen Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} l_1 &= -0,09", & l_2 &= -0,05", \\ k_1 &= -0,03", & k_2 &= 0,08". \end{aligned}$$

Die Standardabweichung der Polkoordinaten beträgt

$$\sigma_0 \approx 0,01"$$

Mit diesen Werten ergibt sich:

$$\sigma_{\tan 2\alpha t_{ab}} = \pm 0,70$$

und

$$\sigma_{\lambda} = \pm 0,668.$$

Da zu erwarten ist, daß λ wesentlich kleiner als vorstehender Wert ist, kann man nicht annehmen, daß der Dämpfungsfaktor aus kürzeren Zeitreihen nach dem angegebenen Verfahren bestimmt werden kann.

Aus (48) erhält man

$$(64) \quad Q_{FF} = \pi^2 (l_1^2 + l_2^2 + k_1^2 + k_2^2) Q_{11},$$

womit sich aus (60)

$$(65) \quad \sigma_r = r_0 \frac{r_0^2 - 1}{3r_0^2 + 1} \cdot \frac{1}{F'} \cdot \sqrt{Q_{FF}} \sigma_0$$

ergibt.

Mit den Koeffizienten der Jahresperiode wird

$$\sigma_r = \pm 0,003 a.$$

Aus dem Wert von σ_r folgt, daß das dargestellte Verfahren zur Bestimmung der Periode der freien Polbewegung geeignet ist. Auch die auf Grund harmonischer Analysen der Polbewegung ermittelten zeitlichen Variationen dieser Periode (siehe Abb. 14) können nach diesem Verfahren analysiert werden.

Zwischen der gedämpften und ungedämpften Polbewegung besteht eine Phasenverschiebung, die durch Vergleich des aus der Erregerfunktion berechneten Anteils mit dem beobachteten Anteil der Polbewegung ermittelt werden kann. Hinsichtlich der Fehlertheorie bestehen hier für die Bestimmung des Dämpfungsfaktors ähnlich ungünstige Verhältnisse wie bei der Verwendung der Richtungswinkel der Ellipsenachsen. Die Phasenwinkel ergeben sich nach folgenden Formeln.

$$\tan \gamma_y = \tan \gamma'_y \cdot$$

$$(66) \quad \frac{1 + \frac{2\alpha\beta K_1 + (\alpha^2 + \beta^2)L_2}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)(K_2 - \frac{\alpha}{\beta}L_1)} \cdot 1 - \frac{K_2 + \frac{\alpha}{\beta}L_1}{K_2 - \frac{\alpha}{\beta}L_1} \cdot \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{L_2}{K_2 - \frac{\alpha}{\beta}L_1} \cdot \frac{\lambda^3}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)}}{1 - \frac{2\alpha\beta K_2 - (\alpha^2 + \beta^2)L_1}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)(K_1 + \frac{\alpha}{\beta}L_2)} - \frac{K_1 - \frac{\alpha}{\beta}L_2}{K_1 + \frac{\alpha}{\beta}L_2} \cdot \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{L_1}{K_1 + \frac{\alpha}{\beta}L_2} \cdot \frac{\lambda^3}{\beta(\alpha^2 - \beta^2)}}$$

$$\tan \gamma_x = \tan \gamma'_x \cdot$$

$$\frac{1 + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)K_2 - 2\alpha\beta L_1}{(\alpha^2 - \beta^2)(L_2 + \frac{\alpha}{\beta}K_1)} - \frac{L_2 - \frac{\alpha}{\beta}K_1}{L_2 + \frac{\alpha}{\beta}K_1} \cdot \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{K_2}{L_2 + \frac{\alpha}{\beta}K_1} \cdot \frac{\lambda^3}{(\alpha^2 - \beta^2)}}{1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)K_1 + 2\alpha\beta L_2}{(\alpha^2 - \beta^2)(L_1 - \frac{\alpha}{\beta}K_2)} - \frac{L_1 + \frac{\alpha}{\beta}K_2}{L_1 - \frac{\alpha}{\beta}K_2} \cdot \frac{\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{K_1}{L_1 - \frac{\alpha}{\beta}K_2} \cdot \frac{\lambda^3}{(\alpha^2 - \beta^2)}}$$

worin

$$\tan \gamma'_y = \frac{K_2 - \frac{\alpha}{\beta}L_1}{K_1 + \frac{\alpha}{\beta}L_2}$$

und

$$\tan \gamma'_x = \frac{L_2 + \frac{\alpha}{\beta}K_1}{L_1 - \frac{\alpha}{\beta}K_2}$$

die für die ungedämpfte Polbewegung geltenden Phasenwinkel sind. Aus (66) und (67) ist die durch die Dämpfung bewirkte Phasenverschiebung zu erkennen. Auch diese Formeln würden eine in erster Ordnung von der Frequenz der freien Periode unabhängige Bestimmung des Dämpfungsparameters gewährleisten.

2.4. Die Übertragungsfunktion

Berechnet man aus (39) die Amplituden der positiven und negativen Frequenzen, so erhält man eine weitere Beziehung zur Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung auf Grund von Eingangs-Ausgangs-Analysen des Systems der Polbewegung. Es wird

$$a_+^2 + b_+^2 = c_+^2 = \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta)^2 + \lambda^2} (A_+^2 + B_+^2)$$

$$a_-^2 + b_-^2 = c_-^2 = \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)^2 + \lambda^2} (A_-^2 + B_-^2).$$

Von vorstehenden Gleichungen ist nur die erste von Bedeutung, da nur durch sie die Eingangsgrößen verstärkt werden. Die Wirkung der negativen Frequenzen auf die Polbewegung wird so gering, daß durch sie kaum Polbewegungsanteile erzeugt werden, die die Unsicherheit der Beobachtungen überschreiten.

$$(67) \quad \ddot{u}^2(\alpha) = \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta)^2 + \lambda^2}$$

ist die aus der Schwingungstheorie bekannte Übertragungsfunktion, die für die Energieübertragung im System maßgebend ist. Die kinetische Energie einer Schwingung ist bekanntlich dem Amplitudenquadrat der Schwingung proportional, so daß für die Energieübertragung im System der Polbewegung die Beziehung

$$(68) \quad S_u(\alpha) = \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta)^2 + \lambda^2} S_\psi(\alpha)$$

gilt. (68) kann zur Bestimmung von β und λ dienen, wenn die Energiespektren von ψ und u bekannt sind (MUNK und HASSAN 1961). Unter Annahme eines nicht variablen Erregerspektrums im Bereich der freien Bewegung ist es möglich, β und λ zu schätzen, da für

$$\alpha = \beta \pm \lambda$$

die Energie $S_u(\beta \pm \lambda) \approx 1/2 S_u(\beta)$ sein muß (RUDNIK 1956, MUNK und Mac DONALD 1960), wie leicht aus (68) zu erkennen ist. Eine Verfeinerung dieser Methode für stationäre Zufallsprozesse beruht auf der RALEIGH-Verteilung der Amplituden des Energiespektrums. Durch Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode ist es dann möglich, β und λ zu schätzen (MUNK, Mac DONALD 1960, YATSKIV 1974).

2.5. Ein Anpassungsverfahren zur Bestimmung der Periode der freien Polbewegung

In 2.3. wurde dargelegt, daß es mit Hilfe eines Flächenvergleichs möglich ist, auf Grund einer Eingangs-Ausgangs-Analyse die Periode der freien Polbewegung zu bestimmen. In JOCHMANN (1977) wurde ein Anpassungsverfahren der aus Erregerfunktionen ermittelten Polkurve an die aus Polkoordinaten berechnete angegeben, das die gleichen Eigenschaften wie der Flächenvergleich besitzt. Aus Untersuchungen der meteorologischen Erregerfunktion ist bekannt, daß zwischen beiden Polkurven eine zeitliche Phasenverschiebung besteht, die das angegebene Verfahren beeinträchtigt. Um diesen Mangel zu beseitigen, wird dieses Verfahren so erweitert, daß eine gleichzeitige Bestimmung der Phasenverschiebung und der Periode der freien Polbewegung möglich ist.

Zur Formulierung des Verfahrens wird in komplexer Form die Verbesserungsgleichung

$$(69) \quad u'(t) = u(t) + v(t)$$

angesetzt, deren Linearisierung

$$(70) \quad v(t) = u'_0(t) - u(t) + \frac{\partial u'}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial u'}{\partial \Delta \gamma} \Delta \gamma$$

ergibt. $u'(t)$ ist die aus der Erregerfunktion und $u(t)$ die aus den Polkoordinaten des IMPS berechnete Polbewegung. $r = \alpha/\beta$ und $\Delta \gamma$ ist die Phasenverschiebung.

Die Polbewegung wird in (69) in der Form

$$\begin{aligned} u'(t) &= l' \sin(\alpha t + \gamma_x + \Delta \gamma) + i k' \sin(\alpha t + \gamma_y + \Delta \gamma) \\ &= l'_1 \sin \alpha t + l'_2 \cos \alpha t + i (k'_1 \sin \alpha t + k'_2 \cos \alpha t) \end{aligned}$$

eingeführt. Eine ähnliche Beziehung gilt für $u(t)$.

Mit

$$c_1 = \frac{r^2 + 1}{(r^2 - 1)^2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{2r}{(r^2 - 1)^2}$$

erhält man die in (70) enthaltenen Differentialquotienten

$$\frac{\partial u'_1}{\partial r} = (c_2 L_1 - c_1 K_2) \sin \alpha t + (c_1 K_1 + c_2 L_2) \cos \alpha t,$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial r} = (c_1 L_2 + c_2 K_1) \sin \alpha t + (c_2 K_2 - c_1 L_1) \cos \alpha t,$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial \gamma} = -l'_2 \sin \alpha t + l'_1 \cos \alpha t,$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial \gamma} = -k'_2 \sin \alpha t + k'_1 \cos \alpha t,$$

wenn man die Beziehungen (40) berücksichtigt.

Setzt man

$$\begin{aligned} \Delta k_1 &= k_1' - k_1, & \Delta K_1 &= c_1 L_2 + c_2 K_1, \\ \Delta k_2 &= k_2' - k_2, & \Delta K_2 &= -c_1 L_1 + c_2 K_2, \\ \Delta l_1 &= l_1' - l_1, & \Delta L_1 &= -c_1 K_2 + c_2 L_1, \\ \Delta l_2 &= l_2' - l_2, & \Delta L_2 &= c_1 K_1 + c_2 L_2. \end{aligned}$$

so wird (70) in Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} v_1 &= \Delta l_1 \sin \alpha t + \Delta l_2 \cos \alpha t + (\Delta L_1 \sin \alpha t + \Delta L_2 \cos \alpha t) \Delta r + \\ &+ (-l_2' \sin \alpha t + l_1' \cos \alpha t) \Delta \gamma, \\ (71) \quad v_2 &= \Delta k_1 \sin \alpha t + \Delta k_2 \cos \alpha t + (\Delta K_1 \sin \alpha t + \Delta K_2 \cos \alpha t) \Delta r + \\ &+ (-k_2' \sin \alpha t + k_1' \cos \alpha t) \Delta \gamma. \end{aligned}$$

Schreibt man (71) symbolisch in der Form

$$\begin{aligned} v_1 &= -l_1 + a_1 \Delta r + b_1 \Delta \gamma, \\ v_2 &= -l_2 + a_2 \Delta r + b_2 \Delta \gamma \end{aligned}$$

und macht man das Funktional

$$\int_0^T (u'(t) - u(t))^2 dt, \quad T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

zu einem Minimum, so ergeben sich für Δr und $\Delta \gamma$ folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (72) \quad & \left\{ \int_0^T (a_1^2 + a_2^2) dt \right\} \Delta r + \left\{ \int_0^T (a_1 b_1 + a_2 b_2) dt \right\} \Delta \gamma - \int_0^T (a_1 l_1 + a_2 l_2) dt = 0, \\ & \left\{ \int_0^T (a_1 b_1 + a_2 b_2) dt \right\} \Delta r + \left\{ \int_0^T (b_1^2 + b_2^2) dt \right\} \Delta \gamma - \int_0^T (b_1 l_1 + b_2 l_2) dt = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Integrale in (72) ergeben:

$$\begin{aligned} (73) \quad & \int_0^T (a_1^2 + a_2^2) dt = \frac{1}{2} (\Delta K_1^2 + \Delta K_2^2 + \Delta L_1^2 + \Delta L_2^2), \\ & \int_0^T (b_1^2 + b_2^2) dt = \frac{1}{2} (k_1'^2 + k_2'^2 + l_1'^2 + l_2'^2), \\ & \int_0^T (a_1 b_1 + a_2 b_2) dt = \frac{1}{2} (k_1' \Delta K_2 + l_1' \Delta L_2 - k_2' \Delta K_1 - l_2' \Delta L_1) = 0, \\ & - \int_0^T (a_1 l_1 + a_2 l_2) dt = \frac{1}{2} (\Delta k_1 \Delta K_1 + \Delta k_2 \Delta K_2 + \Delta l_1 \Delta L_1 + \Delta l_2 \Delta L_2). \end{aligned}$$

$$(73) \quad - \int_0^T (b_1 l_1 + b_2 l_2) dt = \frac{1}{2} (k_1' \Delta k_2 + l_1' \Delta l_2 - k_2' \Delta k_1 - l_2' \Delta l_1).$$

Damit wird nach (72):

$$(74) \quad \Delta r = \frac{\Delta k_1 \Delta K_1 + \Delta k_2 \Delta K_2 + \Delta l_1 \Delta L_1 + \Delta l_2 \Delta L_2}{\Delta K_1^2 + \Delta K_2^2 + \Delta L_1^2 + \Delta L_2^2},$$

$$\Delta y = \frac{k_1' \Delta k_2 + l_1' \Delta l_2 - k_2' \Delta k_1 - l_2' \Delta l_1}{k_1'^2 + k_2'^2 + l_1'^2 + l_2'^2}.$$

Da nach (73) in (72) Δr und Δy nur in jeweils einer Gleichung auftreten, sind beide Werte voneinander unabhängig.

Die Qualität der Approximation kann auf Grund folgenden Wertes abgeschätzt werden.

$$(75) \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + \Delta l_1^2 + \Delta l_2^2) -$$

$$- \frac{(\Delta k_1 \Delta K_1 + \Delta k_2 \Delta K_2 + \Delta l_1 \Delta L_1 + \Delta l_2 \Delta L_2)^2}{K_1^2 + K_2^2 + L_1^2 + L_2^2} -$$

$$- \frac{(k_1' \Delta k_2 + l_1' \Delta l_2 - k_2' \Delta k_1 - l_2' \Delta l_1)^2}{k_1'^2 + k_2'^2 + l_1'^2 + l_2'^2}.$$

Dieser Wert hat den Charakter einer Varianz, die jedoch nicht im stochastischen Sinne aufgefaßt werden darf, da sie für die Differenz zweier determinierter Kurven repräsentativ ist. Auf Grund (73) lassen sich auch Angaben über die Varianzen von Δy und Δr machen.

$$(76) \quad \sigma_r^2 = \frac{2\sigma^2}{\Delta K_1^2 + \Delta K_2^2 + \Delta L_1^2 + \Delta L_2^2}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{2\sigma^2}{k_1'^2 + k_2'^2 + l_1'^2 + l_2'^2}$$

Man erhält den Einfluß der Polkoordinatenfehler durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (74), wenn man die sich aus der harmonischen Analyse ergebenden Standardabweichungen der Amplituden der betreffenden Periode einführt. In der Regel ist

$$\sigma_{k_1} = \sigma_{k_2} = \sigma_{l_1} = \sigma_{l_2},$$

so daß sich aus (74)

$$(77) \quad \sigma_r^2 = \frac{\sigma_{k_1}^2}{\Delta K_1^2 + \Delta K_2^2 + \Delta L_1^2 + \Delta L_2^2},$$

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{\sigma_{k_1}^2}{k_1'^2 + k_2'^2 + l_1'^2 + l_2'^2}$$

ergibt.

In (77) wurden die Fehler der aus den Erregerfunktionen berechneten Polkoordinaten vernachlässigt, was auf Grund ihrer zu erwartenden kleinen Werte gerechtfertigt ist.

Aus (74) ergibt sich auf Grund der Beziehung $r = \alpha / \beta$ die Frequenz der freien Polbewegung. Ist $\alpha = 2\pi$, d. h., untersucht man die Jahresperiode der Polbewegung, so ist r die Periode der freien Polbewegung in Jahren.

3. Die meteorologische Erregerfunktion

Die in 2.3. und 2.5. beschriebenen Verfahren zur Bestimmung von Periode und Dämpfung der freien Polbewegung setzen die Kenntnis einer Erregerfunktion mit zeitlich gut determiniertem Verlauf voraus. Diese Eigenschaften besitzt die meteorologische Erregerfunktion, die aus einer gut definierten Jahresperiode mit vergleichsweise geringen stochastischen Anteilen besteht. Der Hauptanteil der meteorologischen Erregerfunktion wird durch Luftmassenbewegungen hervorgerufen, die aus Luftdruckmessungen an über die gesamte Erdoberfläche verteilten meteorologischen Stationen berechnet werden können. Einen für die vorliegende Aufgabenstellung nicht zu vernachlässigenden Beitrag zur Erregerfunktion mit Jahresperiode liefert die saisonal schwankende Grundwasserspeicherung (WILSON und HAUBRICH 1976).

Meteorologische Erregerfunktionen werden durch Massenverlagerungen innerhalb einer Schicht an der Erdoberfläche erzeugt. Stellt man diese als zeitliche Dichteveriationen dar, so berechnet man zweckmäßig die in (9) eingehenden Deviationsmomente (4) als Funktion der geographischen Koordinaten. Man erhält damit folgende Erregerfunktion:

$$(78) \quad \psi = -\frac{1}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+h} (\rho(r, \varphi, \lambda, t) - \rho_m(r, \varphi, \lambda)) \cdot r^4 \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi e^{i\lambda} dr d\varphi d\lambda.$$

In (78) ist wegen der Ellipsoidgestalt der Erde

$$r^4 \approx a^4 (1 - 2e^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi),$$

$$2e^2 (1 - e^2) = 0,01325957.$$

In vorstehender Formel ist $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$.

Das Integral über den zeitlichen Mittelwert der Dichte $\rho_m(r, \varphi, \lambda)$ verschwindet in (78), wenn die Polbewegung in einem Koordinatensystem beschrieben wird, dessen Nullpunkt mit der mittleren Lage des Trägheitspoles zusammenfällt. In (78) kann dann

$$\Delta \rho(r, \varphi, \lambda, t) = \rho(r, \varphi, \lambda, t) - \rho_m(r, \varphi, \lambda)$$

gesetzt werden.

3.1. Die Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen

Zur Berechnung der Erregerfunktion der Luftmassenbewegung sind Annahmen über die Variation der Dichte als Funktion der Höhe notwendig. Da nur Dichtedifferenzen gegenüber einem zeitlichen Mittelwert untersucht werden, genügt es, ein einfaches Atmosphärenmodell anzunehmen. Es wurde die isotherme Atmosphäre gewählt,

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{-g}{RT_m} (r - r_0)},$$

$$R = 286,8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ grad}^{-1},$$

$$T_m = \text{mittlere Temperatur der Luftsäule in Kelvin.}$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung erhält man nach JOCHMANN (1976) durch Integration der von r abhängigen Glieder in (78)

$$\int_{r=a}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr = (a + h_m)^4 \frac{\Delta p}{g},$$

worin $h_m = 7000 \text{ m}$ die Schwerpunkthöhe einer Luftsäule ist. Δp ist die Luftdruckdifferenz gegenüber dem der mittleren Dichte entsprechenden Luftdruck.

Mit (79) ergibt sich aus (78) folgende Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen:

$$(80) \quad \psi(t) = -\frac{1}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} D(\varphi, \lambda, t) \sin \varphi \cos \varphi e^{i\lambda} d\varphi d\lambda$$

mit

$$(81) \quad D(\varphi, \lambda, t) = \frac{(a + 7000)^4}{g(\varphi)} \Delta p_0(\varphi, \lambda, t) (0,98674 + 0,01326 \cos^2 \varphi).$$

Vorstehende Formeln gelten für eine starre Erde, deren Oberfläche nicht auf die unterschiedlichen Belastungen durch Luftmassen reagiert. In 1.3. wurde dargestellt, daß für die feste Erde eine Berücksichtigung der Nachgiebigkeit gegenüber Belastungen nicht erforderlich ist, wenn die Berechnung der auf Grund der Erregerfunktion resultierenden Polbewegung nach (33) erfolgt. Etwas anders liegen die Verhältnisse über den Meeresflächen, da hier die Luftmassentransporte durch entsprechende Wassermassentransporte teilweise ausgeglichen werden. Ein vollständiger Ausgleich könnte nur erfolgen, wenn die gesamte Erdoberfläche mit Wasser bedeckt wäre.

Die unvollständige Kompensation erfordert eine Korrektur der in (81) eingehenden Luftdruckdifferenzen Δp . An ihrer Stelle werden in (81) die Werte Δp_0

$$(82) \quad \Delta p_0(\varphi, \lambda, t) = \Delta p(\varphi, \lambda, t) + \frac{g_{45}^0}{S_M} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{\Delta p(\varphi, \lambda, t)}{g} \varepsilon(\varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

gesetzt.

In (82) ist S_M die Meeresfläche. Ferner gilt:

$$\varepsilon(\varphi, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für Landflächen} \\ 0 & \text{für Meeresflächen.} \end{cases}$$

An Stelle von (80) muß die Berechnung der Erregerfunktion nach

$$(83) \quad \psi(t) = -\frac{1}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \varepsilon(\varphi, \lambda) D(\varphi, \lambda, t) \sin \varphi \cos \varphi \cdot e^{-i\lambda} \, d\varphi \, d\lambda$$

erfolgen.

Zur numerischen Berechnung von (83) wurde die Erdoberfläche in $10^0 \times 10^0$ Kompartimente eingeteilt, für die jeweils Flächenmittel des Luftdrucks aus den Messungen der in dem betreffenden Kompartiment vorhandenen meteorologischen Stationen gebildet wurden. Als Luftdruckwerte wurden die in den World Weather Records für die Jahre 1931 bis 1960 gegebenen Monatsmittel des Luftdrucks verwendet.

Für jedes Kompartiment wurde das zeitliche Mittel p_m über einen Zeitraum von zehn Jahren berechnet, gegenüber dem die Differenzen

$$\Delta p'_{jk} = p - p_m$$

gebildet wurden. Die Luftdruckdifferenzen wurden nach

$$\Delta p_{jk} = \Delta p'_{jk} e^{-c(h_{jk}-h_s)}$$

auf die mittlere Geländehöhe h_{jk} reduziert, h_s sind die Stationshöhen der Luftdruckmessungen. Zur Berechnung von (83) wurde das Integral für die einzelnen Kompartimente unter Annahme von invarianten Δp_{jk} berechnet. Das Integral über die gesamte Erdoberfläche wurde durch Summation der für die einzelnen Kompartimente erhaltenen Werte in folgender Form berechnet:

$$c_{jk} = \frac{(a + hm)^4}{C-A} \frac{1}{g_{m,j,7000}} \left\{ (0,328913 (\cos^3 \varphi_{2,j} - \cos^3 \varphi_{1,j}) + 0,002656 (\cos^5 \varphi_{2,j} - \cos^5 \varphi_{1,j}) \right\}.$$

$\varphi_{m,j}, \lambda_{m,j}$ sind die mittleren geographischen Koordinaten eines Kompartiments.

$$g_{m,j,7000} = 978,030 (1 + 0,005202 \sin^2 \varphi_{m,j} - 0,000007 \sin^2 2 \varphi_{m,j}) - 2,156 [\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}].$$

$$\varphi_{2,j} = \varphi_{m,j} + 5^\circ, \quad \varphi_{1,j} = \varphi_{m,j} - 5^\circ,$$

$$\lambda_{2,j} = \lambda_{m,k} + 5^\circ, \quad \lambda_{1,k} = \lambda_{m,k} - 5^\circ,$$

$$x_{1jk} = c_{jk} (\sin \lambda_{2,k} - \sin \lambda_{1,k}),$$

$$x_{2jk} = -c_{jk} (\cos \lambda_{2,k} - \sin \lambda_{1,k}),$$

$$(84) \quad U_1(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\Delta p_{jk} - \Delta p_M) x_{1.jk},$$

$$U_2(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\Delta p_{jk} - \Delta p_M) x_{2.jk},$$

$$\Delta p_M = -\frac{s_0}{s_M} g_{45^\circ} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\Delta p_{jk}}{g_{jk}} \cos \varphi_{m,j},$$

$$s_0 = 2R^2 \cdot \frac{10^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \sin 5^\circ.$$

R ist der Radius der dem Erdellipsoid flächengleichen Kugel.

In der vorstehend kurz skizzierten Rechnung wurden folgende Konstanten eingeführt:

$$c = 0,125242 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{s_0}{s_M} \cdot g_{45} = 3,357587,$$

$$\frac{(a + hm)^4}{c - A} = 0,626394 \cdot 10^4.$$

Bei der Berechnung dieser Konstanten wurde vorausgesetzt, daß die Luftdruckunterschiede in mbar gegeben sind.

Aus (84) erhält man nach dem dargestellten Rechengang die Erregerfunktion

$$(85) \quad \psi(t) = U_1(t) + i U_2(t).$$

Zur Berechnung erfolgte eine Einteilung der Erdoberfläche in Kompartimente, wie sie in Abb. 1 dargestellt ist.

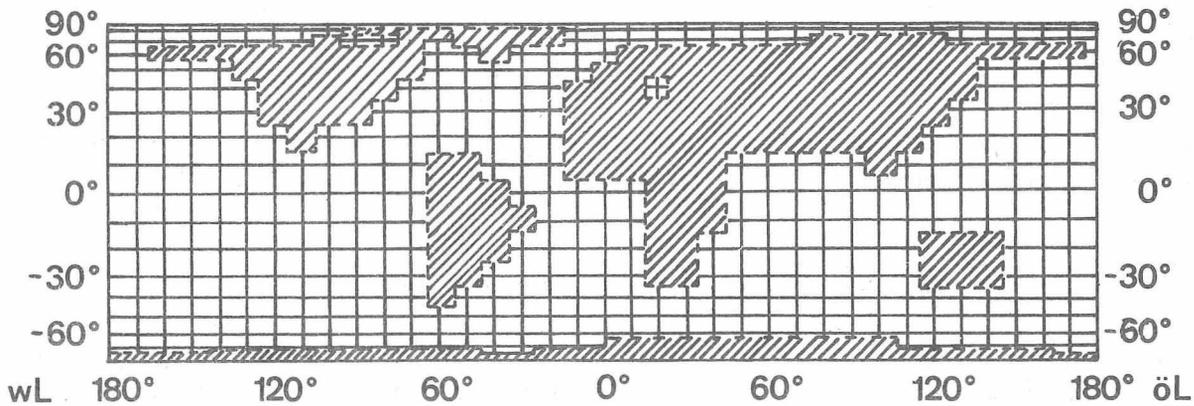


Abb. 1. Land-Meer-Verteilung zur Berechnung der Erregerfunktion
(Äquatorialmaßstab 1 : 22 000 000)

3.2. Bemerkungen zur Erregerfunktion der saisonal schwankenden Grundwasserspeicherung

Zur Bestimmung der Parameter der Polbewegung ist es erforderlich, neben den Luftmassenbewegungen noch die durch saisonal schwankenden Grundwasserstand hervorgerufenen Variationen der Massegeometrie zu berücksichtigen. Entsprechend (78) ergibt sich als Erregerfunktion der Grundwasserspeicherung

$$(86) \quad \psi(t) = \frac{1}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} q \varepsilon(\varphi, \lambda) r^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi e^{i\lambda} d\varphi d\lambda$$

Den variablen Anteil des Grundwassergehaltes q erhält man aus der Wasserhaushaltsgleichung (MUNK, Mac DONALD 1960)

$$(87) \quad P - E = R + \frac{dq}{dt},$$

worin P der Niederschlag, E die Verdunstung und R der Abfluß in Wasserläufen sind.

Zur Lösung von (87) werden verschiedene Methoden angegeben (siehe THORNTWAITE 1948, HYLCKAMA 1956 und BENTON und ESTOQUE 1954).

Neuerdings wurde von KIKUCHI (1977) eine Berechnung des Einflusses des globalen Niederschlags auf die Erregung der Polbewegung vorgenommen, die auf der einfachen Voraussetzung beruht, daß 1/3 des Niederschlags dem Grundwasser zufließt, 1/3 oberirdisch abfließt und 1/3 verdunstet. Die von KIKUCHI angegebenen Werte der Erregerfunktion unterscheiden sich - zumindest für die vorliegende Aufgabenstellung - wesentlich von den durch HYLCKAMA angegebenen Werten. In beiden Fällen ist es auf Grund der Literaturangaben nur möglich, Mittelwerte über längere Zeiträume für die Parameter der Jah-

reswelle der Grundwasserspeicherung anzunehmen. Dies sind:

	K_1	K_2	L_1	L_2	
1. nach HYLCKAMA	5,3	4,5	-0,2	-0,5	
2. nach KIKUCHI	7,6	2,9	1,1	1,5	in 10^{-8} Radian.

In den folgenden Untersuchungen wurden die von HYLCKAMA angegebenen Werte benutzt, da diesen exaktere theoretische Voraussetzungen zugrunde liegen.

3.3. Die Berechnung der Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen

Als Grundlage der Berechnung der Erregerfunktion nach (83) und (84) wurde ein Koordinatensystem gewählt, dessen x_1 -Achse im Äquator vom Erdmittelpunkt in Richtung des Meridians von Greenwich zeigt, Die x_3 -Achse liegt etwa in der Figurenachse der Erde - positiv nach Norden -, und die x_2 -Achse zeigt - vom Meridian von Greenwich aus gesehen - in östliche Richtung. Die östlichen Längen λ werden positiv gezählt. Damit erhält man die Erregerfunktion in einem Polkoordinatensystem, dessen beide Achsen parallel zu den x_1 - und x_2 -Achsen des ihrer Berechnung zugrunde gelegten Koordinatensystems liegen. In den Abbildungen 2 bis 4 sind die Komponenten der Erregerfunktion $U_1(t)$ und $U_2(t)$ (gestrichelt) dargestellt. Die Erregerfunktion der Luftmassenbewegung besteht aus einer persistenten Jahresperiode, der nur relativ schwache stochastische Anteile überlagert sind.

3.3.1. Die Jahreswelle der Erregerfunktion der Luftmassenbewegung

Die in Abb. 2 - 4 dargestellten Werte wurden zur Berechnung der Parameter der Jahreswelle für einzelne Jahre verwendet. Tabelle 1 enthält die Parameter der Jahresperioden für die Darstellungsform

$$(88) \quad \begin{aligned} U_1(t) &= L \sin(\alpha t + \gamma_L), \\ U_2(t) &= K \sin(\alpha t + \gamma_K). \end{aligned}$$

Im Koordinatensystem der Polbewegung ist die Erregerfunktion nach (88) eine Ellipse mit den Achsen

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{|K_+| + |K_-|}, \\ b &= \sqrt{|K_+| - |K_-|}. \end{aligned}$$

Nach (35) ist in vorstehenden Gleichungen

$$(89) \quad \begin{aligned} |K_+|^2 &= \frac{1}{4} (K^2 + L^2 + 2KL \sin(\gamma_L - \gamma_K)), \\ |K_-|^2 &= \frac{1}{4} (K^2 + L^2 - 2KL \sin(\gamma_L - \gamma_K)). \end{aligned}$$

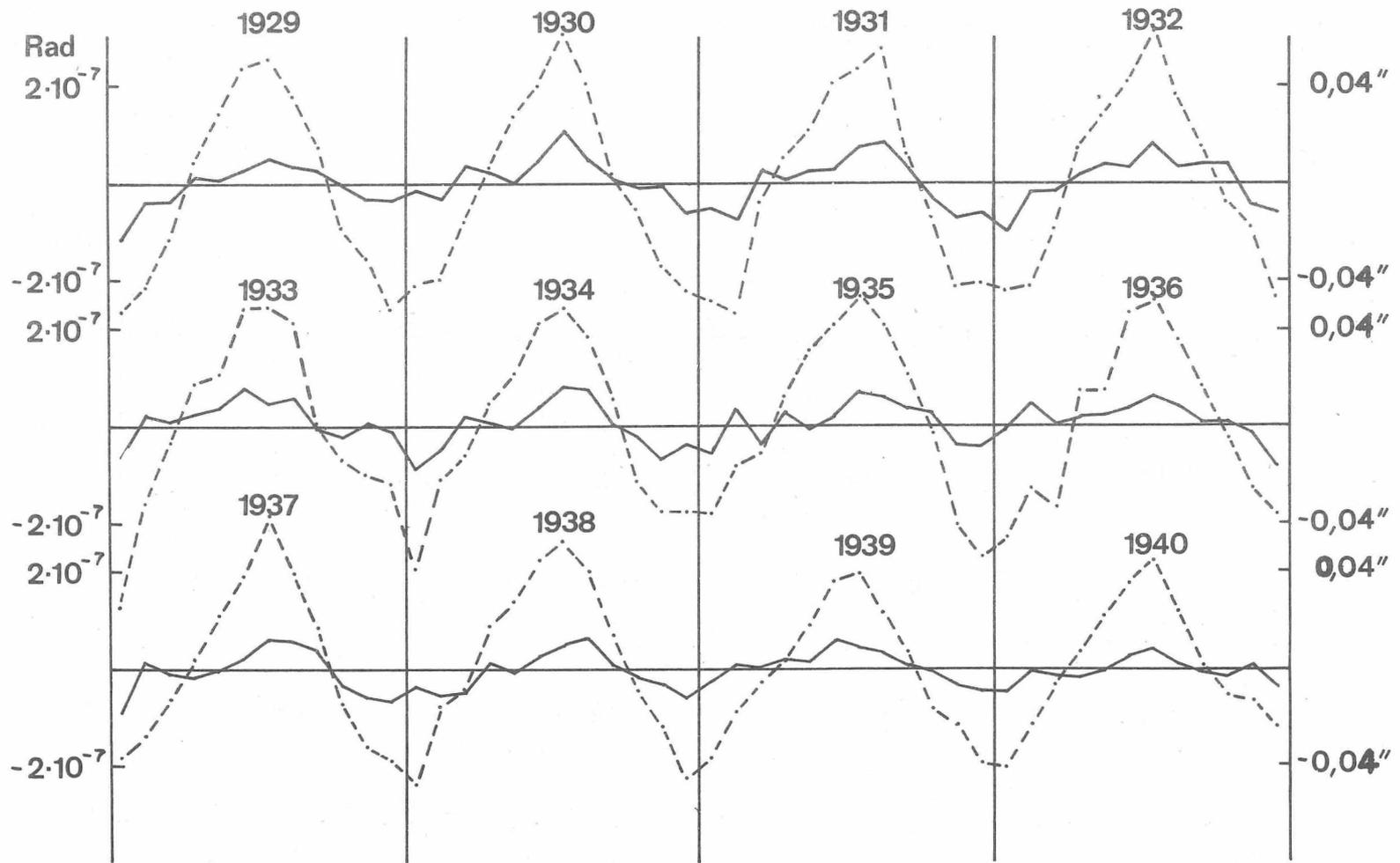


Abb. 2. Erregerfunktionen der Luftmassenbewegung 1929 - 1940.9

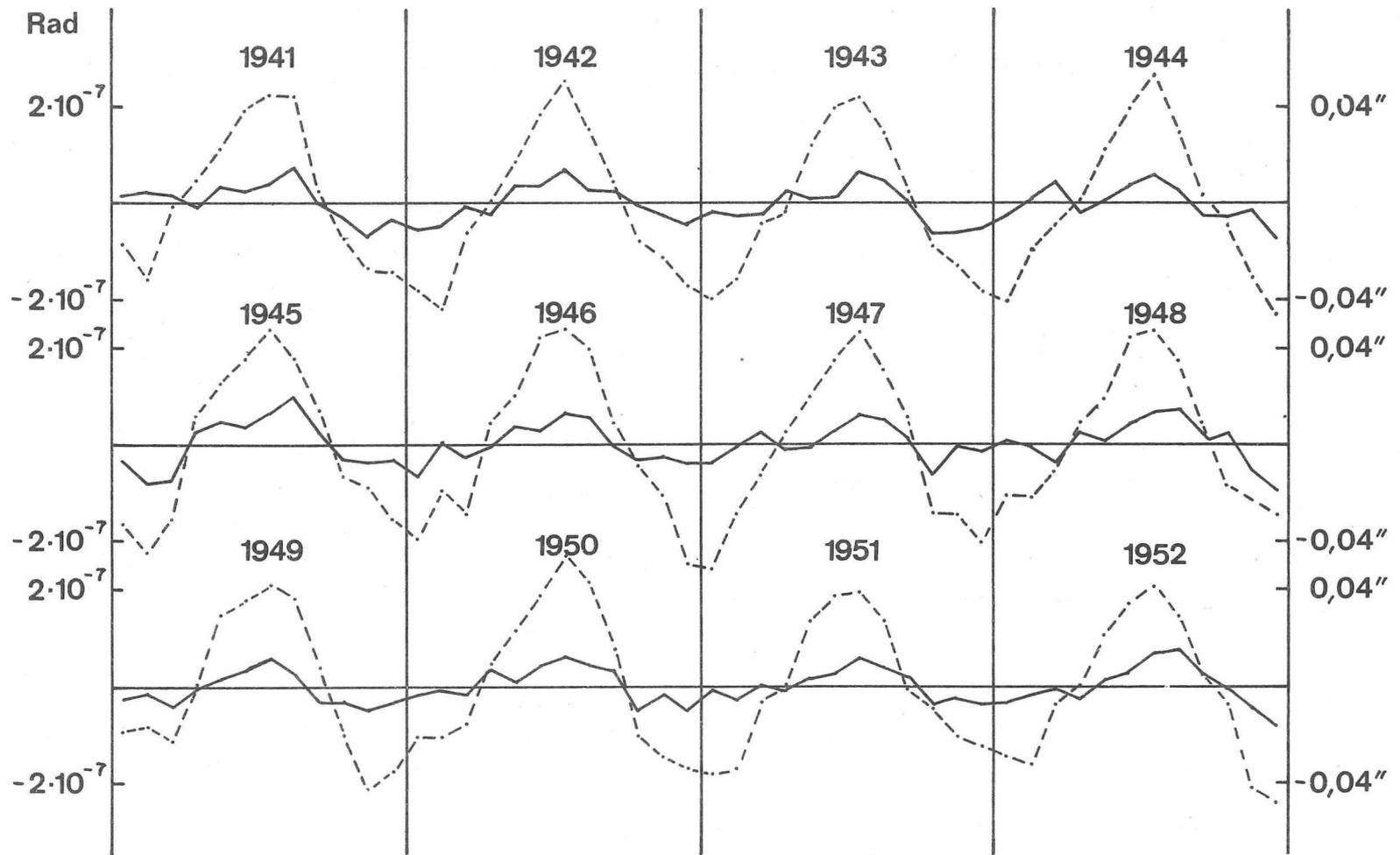


Abb. 3. Erregerfunktionen der Luftmassenbewegung 1941 - 1952.9

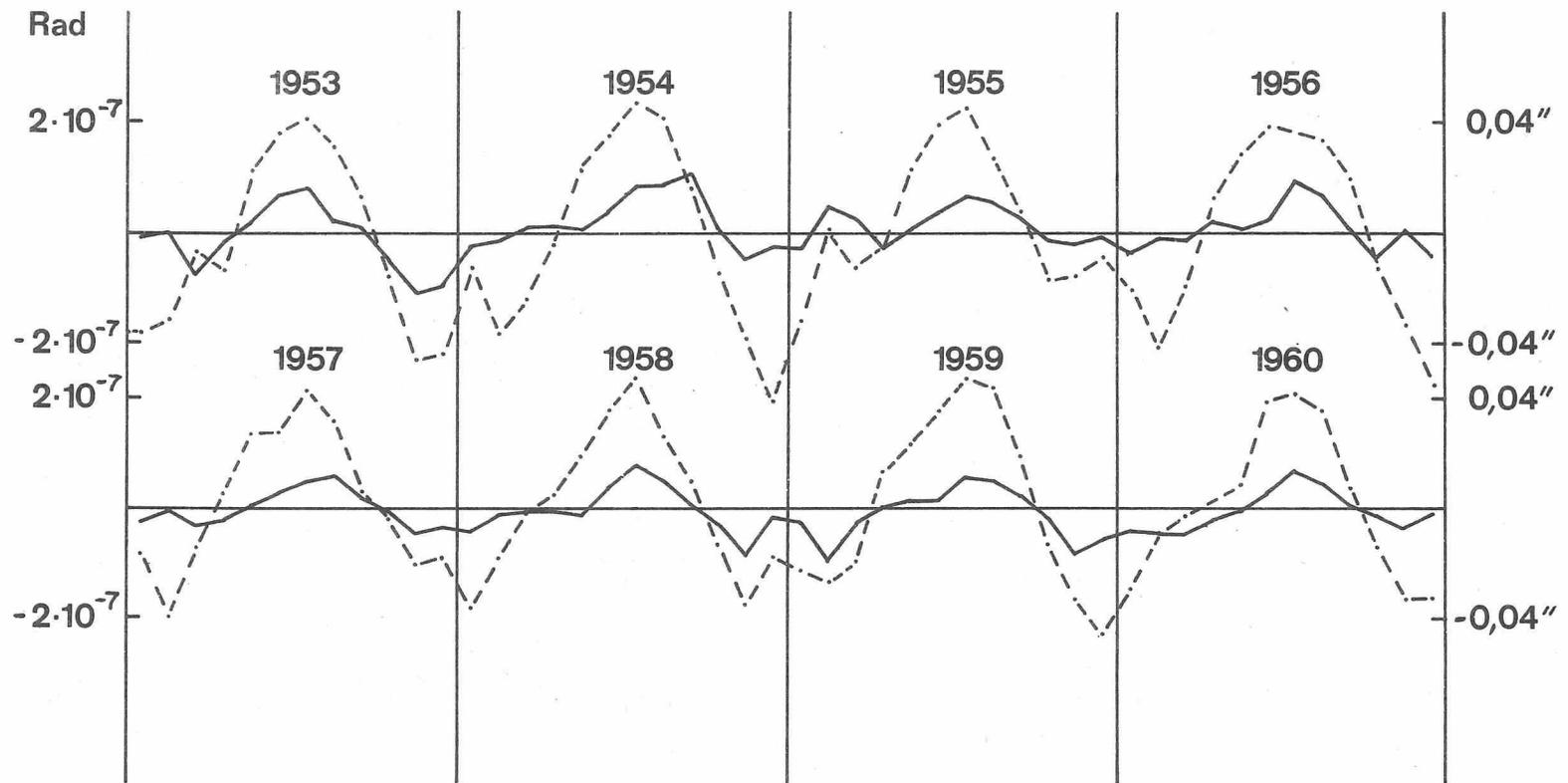


Abb. 4. Erregerfunktionen der Luftmassenbewegung 1953 - 1960.9

Aus (89) ergibt sich, daß diese Ellipsen für $\gamma_L = \gamma_K$ in Geraden ausarten. Aus Tabelle 1 ersieht man, daß zwischen γ_L und γ_K nur geringe Differenzen bestehen.

Tab. 1. Die Parameter der Jahreswelle der Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen

Epoche	$U_1(t)$		$U_2(t)$		γ_a
	L	L	K	K	
1929	0,0107"	256,0 ⁰	0,0535"	266,1 ⁰	78,7 ⁰
30	0,0096	272,2	0,0507	266,0	79,2
31	0,0140	266,7	0,0532	266,0	75,2
32	0,0202	259,2	0,0505	263,3	68,2
33	0,0087	258,7	0,0488	267,1	79,9
34	0,0142	248,5	0,0479	274,2	73,5
35	0,0091	252,8	0,0494	261,1	79,6
36	0,0075	259,3	0,0464	260,7	80,8
37	0,0107	264,1	0,0457	265,2	76,8
38	0,0098	252,1	0,0483	271,7	78,5
39	0,0074	280,9	0,0363	272,4	78,5
40	0,0049	257,1	0,0351	268,7	82,0
41	0,0073	292,7	0,0382	270,3	79,2
42	0,0104	281,6	0,0432	262,5	76,2
43	0,0094	278,6	0,0412	271,5	77,1
44	0,0072	298,0	0,0427	270,4	80,4
45	0,0134	253,2	0,0435	281,1	73,5
46	0,0098	268,8	0,0447	263,8	77,6
47	0,0065	271,8	0,0451	264,8	81,8
48	0,0102	276,2	0,0406	273,1	75,9
49	0,0072	277,1	0,0390	276,8	79,5
50	0,0083	275,5	0,0409	268,3	78,5
51	0,0073	270,0	0,0363	268,4	78,6
52	0,0106	257,5	0,0416	270,7	75,7
53	0,0131	276,9	0,0431	267,6	73,1
54	0,0097	260,5	0,0461	265,2	78,1
55	0,0056	266,9	0,0300	267,3	79,4
56	0,0092	265,0	0,0472	266,8	79,0
57	0,0078	250,6	0,0339	261,2	77,0
58	0,0079	267,8	0,0360	272,2	77,6
59	0,0116	255,6	0,0437	265,8	75,1
60	0,0091	244,0	0,0353	270,3	75,5
Mittel	0,0096	266,1	0,0430	268,1	77,4

Für die Mittelwerte aller Parameter der Erregerfunktion erhält man folgende Ellipsenachsen:

$$a = 0,0447",$$

$$b = 0,0004",$$

$$\gamma_L - \gamma_K = -2,02^0.$$

Für die Maximaldifferenz zwischen den Phasenwinkeln (1945) wird

$$\begin{aligned} a &= 0,0451'', \\ b &= 0,0060'', \\ \gamma_L - \gamma_K &= -27,95^\circ. \end{aligned}$$

Man sieht, daß selbst für diese große Phasendifferenz die elliptische Bahn des Trägheitspoles nur geringfügig von der Geraden abweicht.

Eine Überprüfung der Frage, ob die elliptische Bewegung des Trägheitspoles dem systematischen Anteil der Erregerfunktion entspricht oder ob sie nur durch die stochastischen Anteile der Erregerfunktion verursacht wird, ist mit Hilfe des statistischen t-Testes möglich, da die Parameter der Jahreswelle nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt wurden.

Im Durchschnitt wurden die Parameter der Jahreswelle mit folgenden Standardabweichungen ermittelt:

$$\begin{aligned} \sigma_{L_1} &= \sigma_{L_2} = \pm 0,0021'' = \sigma_L, \\ (90) \quad \sigma_{K_1} &= \sigma_{K_2} = \pm 0,0042'' = \sigma_K. \end{aligned}$$

Die Kovarianzmatrizen des Ausgleichungssystems waren Diagonalmatrizen, so daß sich die Standardabweichungen der Phasen nach folgenden Formeln ergeben:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma_L} &= \frac{\sigma_L}{L}, & \sigma_{\gamma_K} &= \frac{\sigma_K}{K}, \\ (91) \quad \sigma_{\gamma_L} &= \pm 10,0^\circ, & \sigma_{\gamma_K} &= \pm 5,6^\circ. \end{aligned}$$

Nach dem t-Test ergeben sich folgende zulässige Phasendifferenzen zwischen den Komponenten der Erregerfunktion

$$(92) \quad |\gamma_L - \gamma_K| = t_n \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_K^2}.$$

Für 9 Freiheitsgrade und die angegebenen Konfidenzbereiche ergeben sich

$$\begin{aligned} n = 95 \% \quad |\gamma_L - \gamma_K| &= 24,1^\circ, \\ n = 90 \% \quad |\gamma_L - \gamma_K| &= 19,9^\circ. \end{aligned}$$

Nach den in Tabelle 1 angegebenen Phasenwinkeln (γ_L, γ_K) wird der durch vorstehende Werte gegebene Konfidenzbereich nur in wenigen Fällen überschritten. In ähnlicher Form läßt sich nachweisen, daß die Variation der Werte der Phasenwinkel für die einzelnen Werte die Signifikanzschwelle nur in wenigen Fällen überschreitet.

Der systematische Anteil der Erregerfunktion wird im wesentlichen durch eine geradlinige Bewegung des Trägheitspoles beschrieben, deren Richtung sich nach

$$(93) \quad \gamma_a = \arctan \frac{K}{L}$$

ergibt. Sie beträgt im Mittel $\gamma_a = 77,6^\circ$, d. h., der Trägheitspol bewegt sich infolge der Luftmassenbewegungen etwa im Meridian 78° ö. L.

Die Lage des Meridians der Trägheitspolbewegung wird einmal durch die Verteilung der Amplituden der Luftdruckschwankung und zum anderen durch die Land-Meer-Verteilung bestimmt.

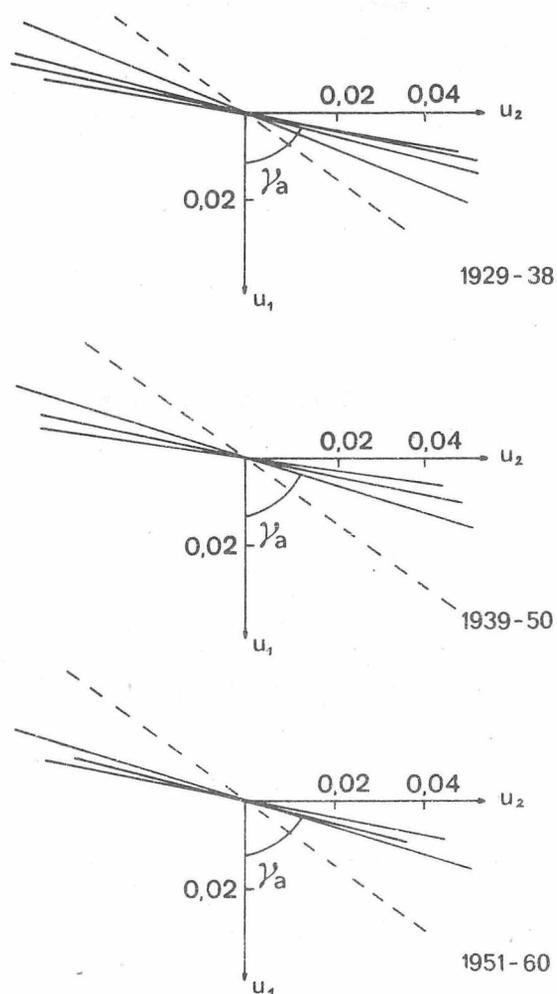


Abb. 5. Die Lage der Erregerfunktionen der Luftmassenbewegungen im Polkoordinatensystem

Nimmt man auf dem gesamten Festland eine gleichmäßige Druckschwankung an (gewählt wurde $\Delta p = 1$), so erhält man folgende Amplituden für die Komponenten der Erregerfunktion:

$$\begin{aligned} L &= 0,0019", \\ K &= 0,0026". \end{aligned}$$

Mit vorstehenden Werten ergibt sich nach (93)

$$\gamma_a = 53,8^\circ.$$

Man sieht, daß die Lage des Meridians der Trägheitspolbewegung hauptsächlich durch die Land-See-Verteilung bestimmt wird. Die zusätzliche Verschiebung des Meridians um 24° nach Osten deutet auf größere Druckschwankungen in der östlichen Hemisphäre hin, für die hauptsächlich das Winterhoch über Sibirien verantwortlich ist. Abb. 5 zeigt die Lage der Erregerfunktionen im Polkoordinatensystem. Die gestrichelte Gerade entspricht der für $\Delta p = 1$ berechneten Trägheitspolbewegung.

3.3.2. Fehlertheoretische Betrachtungen zur Berechnung der Erregerfunktion

Die zu erwartenden Fehler der Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen werden durch die Fehler der Luftdruckwerte und der zur Berechnung angenommenen Land-See-Verteilung verursacht.

Da die für jedes Kompartiment berechneten Luftdruckwerte - soweit es die Messung betrifft - bis auf wenige Ausnahmen voneinander unabhängig sind, ergeben sich nach (84) die Standardabweichungen der Komponenten der Erregerfunktion zu

$$\begin{aligned} \sigma_{U_1}^2 &= \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_{1jk}^2 \right\} \sigma_p^2, \\ (94) \quad \sigma_{U_2}^2 &= \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_{2jk}^2 \right\} \sigma_p^2. \end{aligned}$$

In den World Weather Records 1947 wird für die dort angegebenen interpolierten Druckwerte eine Standardabweichung $\sigma_p = \pm 0,5$ mb angegeben. Nimmt man an, daß sich dieser Wert infolge der in einigen Kompartimenten schwach verteilten Meßwerte auf das Doppelte erhöht, so erhält man als Standardabweichung der Komponenten der Erregerfunktion

$$\begin{aligned} \sigma_{U_1} &= \pm 4,23 \cdot 10^{-9} \text{ Rad} = \pm 0,0009", \\ \sigma_{U_2} &= \pm 5,35 \cdot 10^{-9} \text{ Rad} = \pm 0,0011". \end{aligned}$$

Vereinfachend wird für die weitere Untersuchung

$$\sigma_{U_1} \approx \sigma_{U_2} = \pm 0,001"$$

angenommen.

Zur Berechnung der Standardabweichungen von Amplituden und Phasen der Jahreswelle der Erregerfunktion wird die Varianz-Kovarianz-Matrix des Ausgleichungssystems benötigt. Diese hat die Form:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,0833 & & \\ & 0,1668 & \\ & & 0,1668 \end{pmatrix}$$

Aus vorstehender Matrix ergeben sich die Standardabweichungen der Parameter der in der Form

$$U_1 = L_0 + L_1 \sin \alpha t + L_2 \cos \alpha t$$

dargestellten Jahreswelle zu

$$\begin{pmatrix} \sigma_{L_0}^2 \\ \sigma_{L_1}^2 \\ \sigma_{L_2}^2 \end{pmatrix} = Q \sigma_{U_1}^2.$$

Entsprechende Beziehungen gelten für U_2 . Da

$$\sigma_L = \sigma_{L_1} = \sigma_{L_2},$$

$$\sigma_K = \sigma_{K_1} = \sigma_{K_2}$$

ist, wird

$$(95) \quad \sigma_L = \sigma_K = \pm 0,0004''$$

und nach (90)

$$(96) \quad \sigma_{\gamma_L} = \pm 2,4^\circ, \quad \sigma_{\gamma_K} = \pm 0,5^\circ.$$

Nach (90) und (91) kann der Einfluß der Meßfehler auf die Jahresperiode gegenüber dem Einfluß der stochastischen Anteile der Erregerfunktion vernachlässigt werden.

Die zur Berechnung der Erregerfunktion verwendete Land-Meer-Verteilung stellt infolge der Einteilung der Erdoberfläche in $10^0 \times 10^0$ -Kompartimente nur eine Approximation der tatsächlichen Land-Meer-Verteilung dar. Zu Fehlern wird es dabei an den Kontinenträndern kommen, wo sich die Kompartimente aus Land und Meer zusammensetzen. Um den Einfluß einer verfälschten Land-Meer-Verteilung abzuschätzen, wurden die in Abb. 1 dargestellten Kontinentränder stochastisch um $10^0 \times 10^0$ -Kompartimente erweitert oder verringert. Auf diesem Wege wurden 10 verschiedene Land-Meer-Verteilungen konstruiert, für die nach (84) die zugehörigen Erregerfunktionen ermittelt wurden. Aus den verschiedenen Werten der Erregerfunktionen konnten die Standardabweichungen infolge von Fehlern der Kompartimentswahl berechnet werden.

$$\sigma_{\dot{U}_1} = \pm 0,0015'', \quad \sigma_{\dot{U}_2} = 0,0024''.$$

Man sieht, daß der Fehlereinfluß der Kompartimentswahl etwa doppelt so groß wie der Fehlereinfluß der Luftdruckmessung ist. Bei der Beurteilung dieser Werte ist jedoch zu berücksichtigen, daß hier die Berechnung der Erregerfunktion mit einer konstanten Luftdruckschwankung über dem Festland erfolgt, die so gewählt wurde, daß mit der nach Abb. 1 vorausgesetzten Land-See-Verteilung die tatsächliche Erregerfunktion erhalten wurde. Da in der Nähe des Meeres im allgemeinen die Luftdruckschwankungen geringer sind als über den Zentren der Kontinente, kann man annehmen, daß $\sigma_{\dot{U}_1}$ und $\sigma_{\dot{U}_2}$ tatsächlich kleiner als die oben angegebenen Werte sein werden.

Letztlich sei noch erwähnt, daß ein Fehler der Land-See-Verteilung die Richtung γ_a (siehe (93)) der Erregerfunktion beeinflusst. Dieser systematisch wirkende Fehler kann unter Umständen einige Grad betragen. Bekanntlich legt die Richtung der Erregerfunktion die Achsen der Ellipse der aus ihr resultierenden Polbewegung fest, so daß auch hierdurch das in 2.3. beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Dämpfungsfaktors beeinträchtigt wird.

3.3.3. Der Fehlereinfluß der Erregerfunktion auf die resultierende Polbewegung

Wie in 2.5. dargelegt, soll die CHANDLER-Periode durch Vergleich der aus Luftmassenbewegungen ermittelten Jahresperiode der Polbewegung mit der aus Polkoordinaten abgeleiteten Jahresperiode bestimmt werden. Zur Abschätzung des Fehlereinflusses der meteorologischen Erregerfunktion werden daher die Fehler der Parameter der aus ihr abgeleiteten Jahresperiode der Polbewegung bestimmt. Aus (40) ergeben sich unter Vernachlässigung der Dämpfung folgende Beziehungen zwischen den Amplituden der Jahresperiode der Polbewegung und der Erregerfunktion

$$k = \frac{1}{r^2 - 1} \{K^2 + r^2 L^2\}^{1/2},$$

$$l = \frac{1}{r^2 - 1} \{L^2 + r^2 K^2\}^{1/2},$$

(97)

woraus man die Beziehungen zwischen den Standardabweichungen der Amplituden

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{(r^2 - 1)^4} \frac{K^2}{k^2} \sigma_K^2 + \frac{r^4}{(r^2 - 1)^4} \frac{L^2}{k^2} \sigma_L^2,$$

$$\sigma_l^2 = \frac{1}{(r^2 - 1)^4} \frac{L^2}{l^2} \sigma_L^2 + \frac{r^4}{(r^2 - 1)^4} \frac{K^2}{l^2} \sigma_K^2$$

(98)

erhält. In (98) wurde eine schwache Korrelation zwischen L und K, die durch ihre Berechnung nach (84) entsteht, vernachlässigt. Mit dem in Tab. 1 (S. 36) angegebenen Mittelwert von K und L und (90) erhält man die aus den stochastischen Restanteilen der Erregerfunktion folgenden Standardabweichungen

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \pm 0,009", \\ (99) \quad \sigma_1 &= \pm 0,011". \end{aligned}$$

Die aus den Fehlern der Luftdruckwerte und der Land-See-Verteilung folgenden Einflüsse sind etwa eine Zehnerpotenz kleiner als die unter (99) angegebenen Werte, so daß sie weiterhin nicht betrachtet zu werden brauchen.

Die Amplituden der aus Polkoordinaten abgeleiteten Jahresperioden haben Standardabweichungen, die etwa in der gleichen Größenordnung wie (99) liegen. Allerdings sind dies Mittelwerte über 6 Jahre, während (99) aus einzelnen Jahreswerten ermittelt wurde. Die Fehler der aus Luftmassenbewegungen ermittelten Amplituden werden demnach im allgemeinen kleiner als die Fehler der aus Polkoordinaten abgeleiteten Amplituden der Jahresperiode der Polbewegung sein.

3.4. Ergebnisse von Spektralanalysen der Erregerfunktion

Zur Feststellung weiterer Periodizitäten, die für die Polbewegung von Bedeutung sein könnten, wurden für die Zeiträume 1930 - 1940, 1940 - 1950 und 1950 - 1960 Spektralanalysen der Erregerfunktion der Luftmassenbewegung durchgeführt. Dabei wurden Perioden im Bereich von 0,5 bis 3 Jahren untersucht. Da anzunehmen war, daß nicht alle im Spektrum vorhandenen Periodizitäten Amplituden und Phasen mit verschwindendem Erwartungswert haben - d. h., es liegt kein reiner Zufallsprozeß vor - wurde das WIENER-CHINTSCHIN-Theorem nicht angewandt. Die Energien $S(f)$ wurden durch eine FOURIER-Transformation der Zeitreihen $x(t)$ nach

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n x(t) \cos \frac{2\pi}{100} j t, \\ (100) \quad b_j &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n x(t) \sin \frac{2\pi}{100} j t, \end{aligned}$$

$$S(f) = a_j^2 + b_j^2 = c_j^2$$

ermittelt. Als Zeiteinheit wurde das Jahr eingeführt, so daß sich die Frequenzen

$$f = \frac{1}{100}$$

als Zyklen pro Jahr (z. p. a) ergeben. Als Grundperiode wurde eine Periode von 100 Jahren angenommen. Das nach (100) berechnete Spektrum wird durch die determinierten Perioden gestört, die neben dem Hauptmaximum eine Reihe von Nebenmaxima erzeugen. Die ermittelten Energien wurden daher wegen dieses Einflusses reduziert. Ist

$$x_k(t) = c_k \sin \left(\frac{2\pi}{100} k t + \gamma \right)$$

die determinierte Periode, so ergibt sich die Reduktion der Periode $f = j/100$ nach

$$\Delta a_j = -\frac{2}{p} \int_0^p x_k(t) \cos \frac{2\pi}{100} j t dt,$$

$$(101) \quad \Delta b_j = -\frac{2}{p} \int_0^p x_k(t) \sin \frac{2\pi}{100} j t dt.$$

Im vorliegenden Fall war $p = 10a$.

Nach (101) wurden die auf Grund von (100) ermittelten Energien wegen der Jahresperiode reduziert.

In Abb. 6 sind die Energiespektren der nach (37) berechneten positiven Frequenzen der Erregerfunktion in logarithmischer Form dargestellt. Es wurden die Werte

$$\ln S/S_0$$

aufgetragen, wobei $S_0 = 10^{-18} \text{ Rad}^2 = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ so gewählt wurde, daß es etwa dem als weißes Rauschen wirksamen Einfluß der Streuung infolge der Meßunsicherheit entspricht.

Die Reduktion wegen des Einflusses der Jahresperiode erfolgte bei den in Abb. 6 dargestellten Spektren auf Grund der über 10 Jahre gemittelten Amplitude und Phase der Jahresperiode. In Abb. 7 sind Spektren dargestellt, die wegen Jahresperioden reduziert wurden, deren Parameter für jedes einzelne Jahr berechnet wurden.

Vergleicht man Abb. 6 mit Abb. 7, so erkennt man, daß die Energiedichten in letzterer im wesentlichen etwas geringer sind. Dies ist auf die Wirkung stochastischer Anteile der Jahreswelle zurückzuführen, deren Einfluß in Abb. 7 durch das gewählte Reduktionsverfahren vermindert wurde.

In beiden Abbildungen zeigt sich deutlich der Einfluß einer Halbjahresperiode, die wegen der vorhandenen Nebenmaxima als determiniert bezeichnet werden kann. Dies bestätigt sich auch bei Berechnung der mittleren Parameter der Halbjahresperiode für die untersuchten drei Zeitabschnitte (siehe Tab. 2).

Tab. 2. Die Parameter der Halbjahreswelle der Erregerfunktion der Luftmassenbewegungen

Epoche	U_1		U_2		a	b	$\alpha_{ab} t$
	L	γ_L	K	γ_K			
1930.0 - 39.9	0,0028"	105,5°	0,0028"	67,1°	0,0037"	0,0013"	86,16°
1940.0 - 49.9	0,0036	58,5	0,0066	35,8	0,0075	0,0012	40,79
1950.0 - 59.9	0,0044	61,7	0,0064	48,1	0,0078	0,0009	52,45
1930.0 - 59.9	0,0034	71,0	0,0052	46,6	0,0062	0,0012	53,49

Die Richtung der großen Halbachse der elliptischen Bahn mit Halbjahresperiode hat im Polkoordinatensystem die Richtung

$$\gamma_a = 61,3^\circ.$$

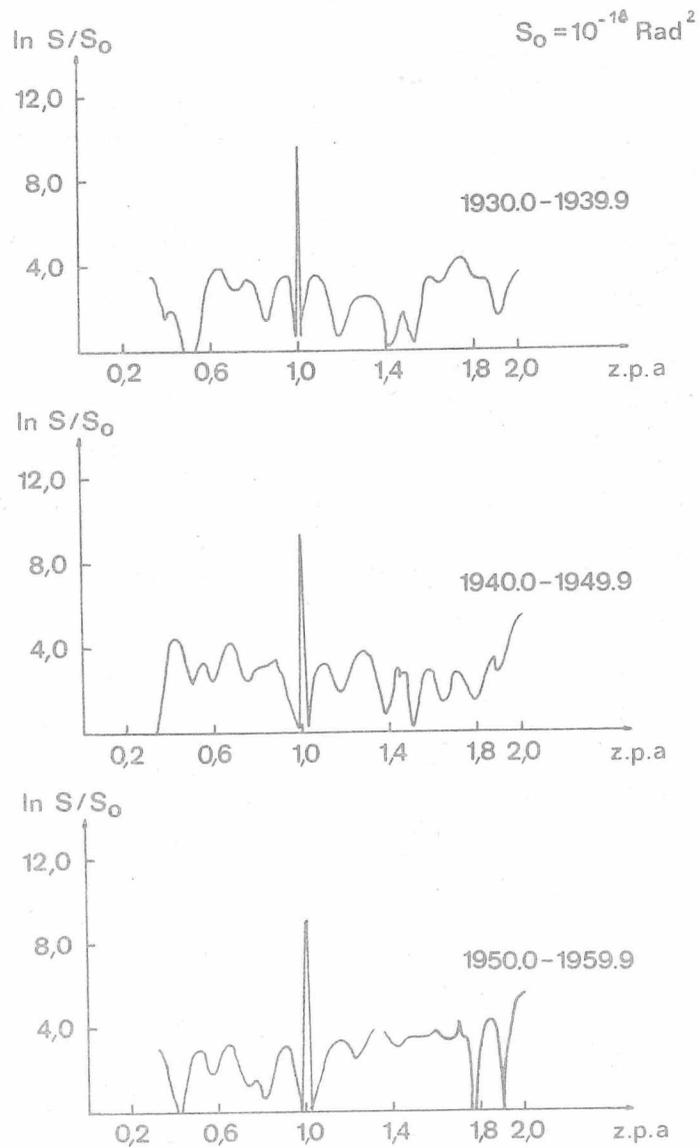


Abb. 6. Energiespektren positiver Frequenzen der Erregerfunktion

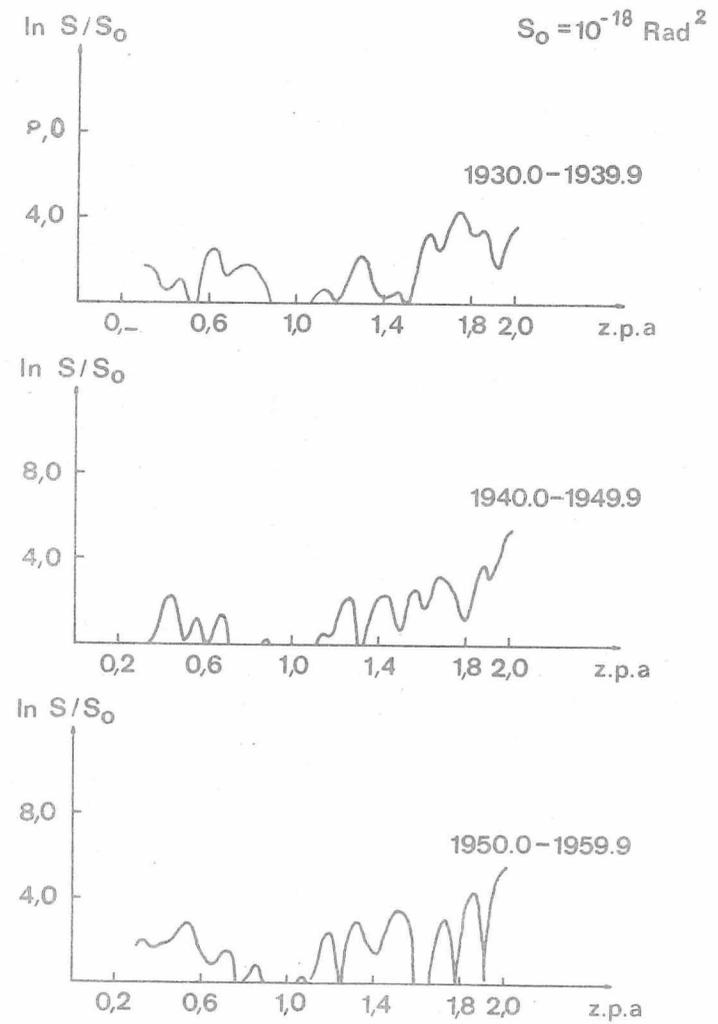


Abb. 7. Energiespektren positiver Frequenzen (nach Beseitigung der Jahresperioden für einzelne Jahre)

Sie weicht nicht stark von der Bewegungsrichtung des Trägheitspoles mit Jahresperiode ($\gamma_a = 77,4^\circ$) ab. Vorstehende Ergebnisse bestätigen, daß die Halbjahresperiode im wesentlichen determiniert ist.

Die Existenz einer Halbjahresperiode der Erregerfunktion der Luftmassenbewegung ist auch physikalisch begründet. Die Luftmassenbewegung ist ein thermodynamischer Prozeß, der durch die vom geographischen Ort und der Jahreszeit abhängigen Wärmestrahlung der Sonne erzeugt wird. Infolge der elliptischen Bahn der Erde um die Sonne ändern sich Einfallswinkel der Strahlung und Entfernung der Sonne. Hierdurch entstehen Variationen der Intensität der Sonneneinstrahlung mit Jahres- und Halbjahresperiode.

BÖHME (1969) hat den Einfluß der heliographischen Breitenänderung der Sonnenflecken mit 2jähriger Periode auf die atmosphärische Zirkulation nachgewiesen. In Abb. 7 ist in der Nähe von $f = 0,5$ ein mehr oder weniger ausgeprägtes Energiemaximum zu erkennen. Verwendet man die Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion zur Interpretation dieser Erscheinung (Abb. 8 bis 13), so zeigt sich, daß diese Maxima besonders bei der U_1 -Komponente der Erregerfunktion ausgeprägt sind. Sie liegen in den einzelnen Zeitabschnitten zwischen $f = 0,44$ und $f = 0,51$ z. p. a. Eine Untersuchung des Gesamtzeitraumes ergab für U_1 eine Doppelspitze mit $f = 0,44$ und $f = 0,56$ z.p.a., die man als Spitze mit einer Frequenz $f = 0,5$ z. p. a und variabler Amplitude auffassen kann. U_2 hatte eine schwache Energiespitze bei $f = 0,5$ z. p. a. Diese nicht sehr persistenten Eigenschaften der zweijährigen Periode wurden auch in der genannten Literatur dargelegt. Aus dem Nachweis der nahezu 2jährigen Periode der Erregerfunktion kann ein Einfluß der Änderung der mittleren heliographischen Breite der Sonnenflecken auf die Luftmassenbewegung gefolgert werden.

Rein empirisch läßt sich aus Abb. 7 wegen des Auftretens in allen drei Zeitabschnitten eine Energiespitze zwischen $f = 1,2$ und $1,3$ z. p. a feststellen, der wegen der vorhandenen kleinen Nebenmaxima eine gewisse Determiniertheit zugesprochen werden muß. Eine physikalische Begründung für seine Existenz läßt sich nicht angeben. Die Realität dieses Maximums könnte ein Vergleich mit dem Energiespektrum der Polbewegung bestätigen, da für diese Frequenzen im System der Polbewegung noch eine verhältnismäßig günstige Übertragung vorliegt.

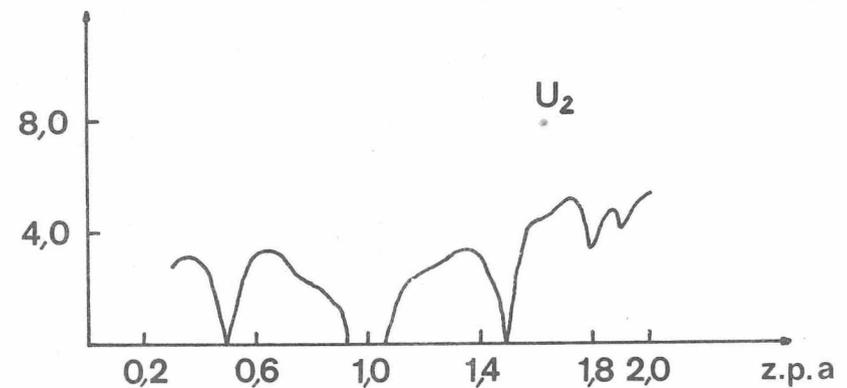
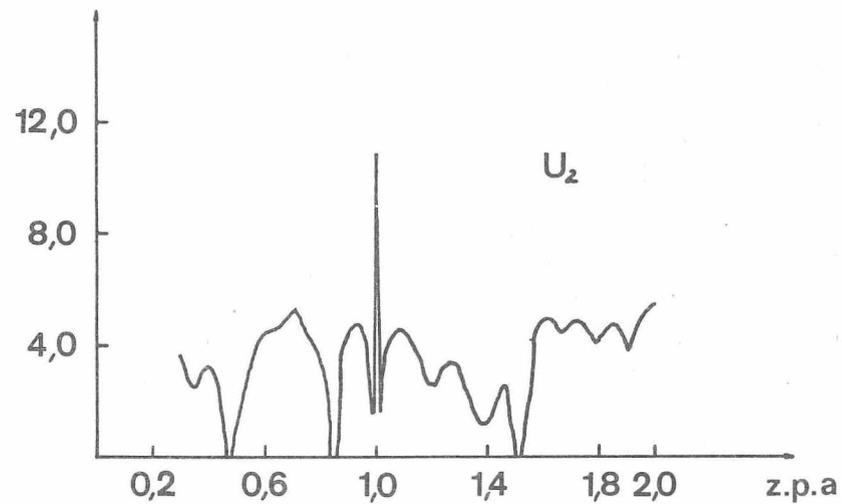
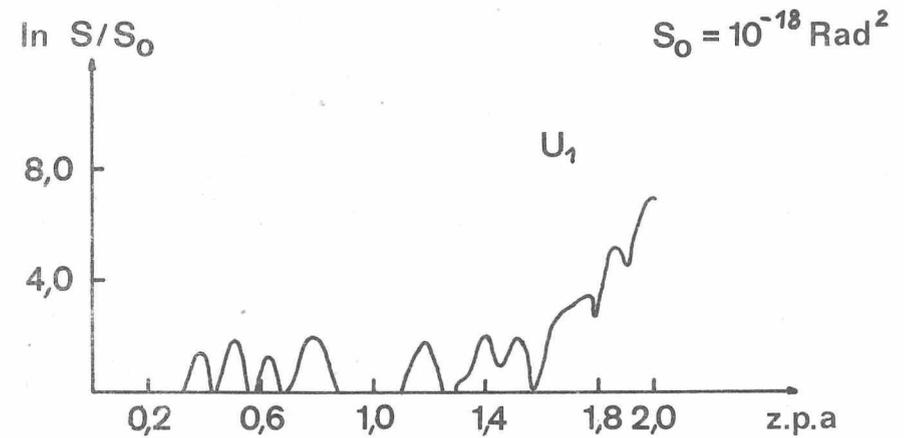
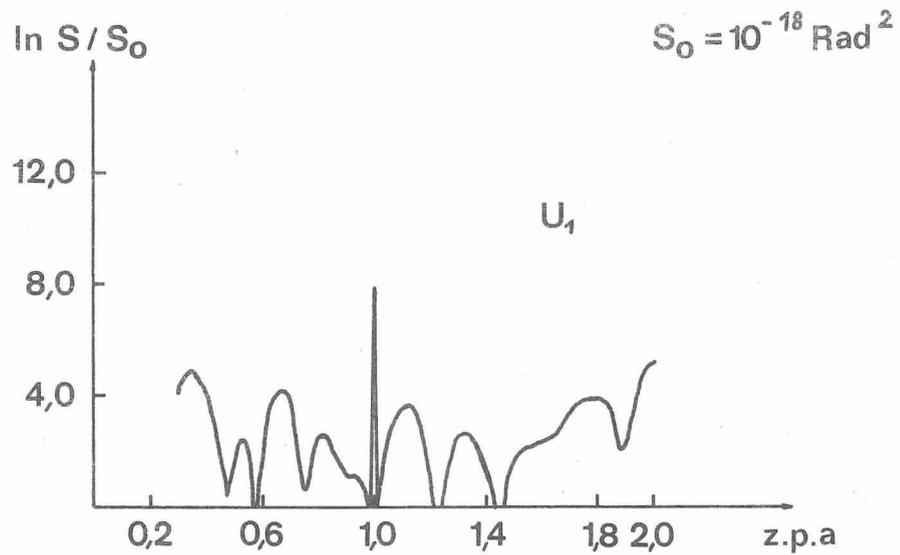


Abb. 8. Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion (1930.0 - 39.9)

Abb. 9. Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion (nach Beseitigung der Jahresperioden) (1930.0 - 39.9)

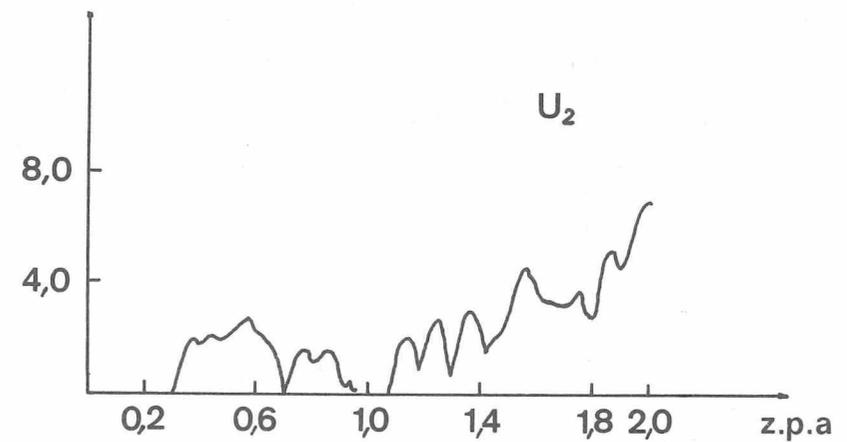
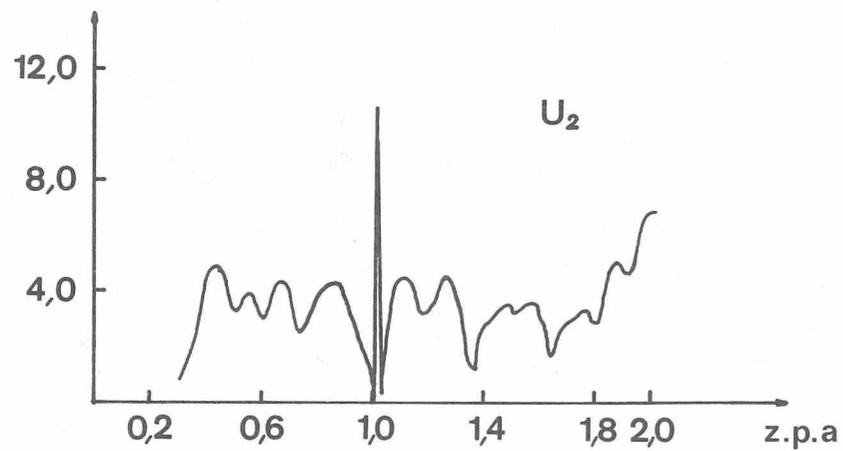
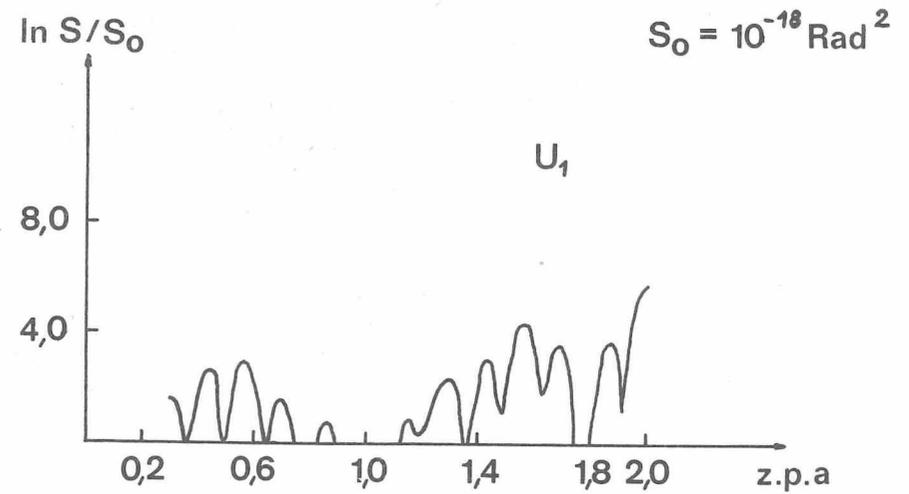
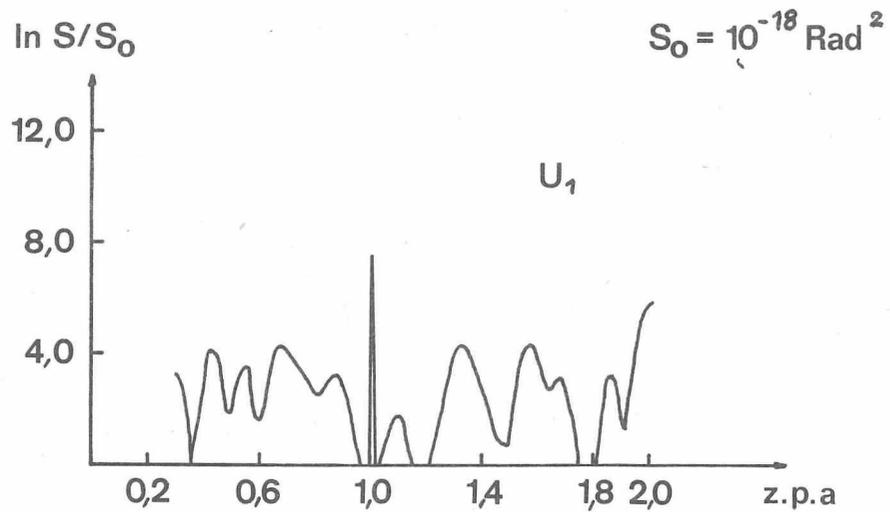


Abb. 10. Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion (1940.0 - 49.9)

Abb. 11. Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion (nach Beseitigung der Jahresperioden) (1940.0 - 49.9)

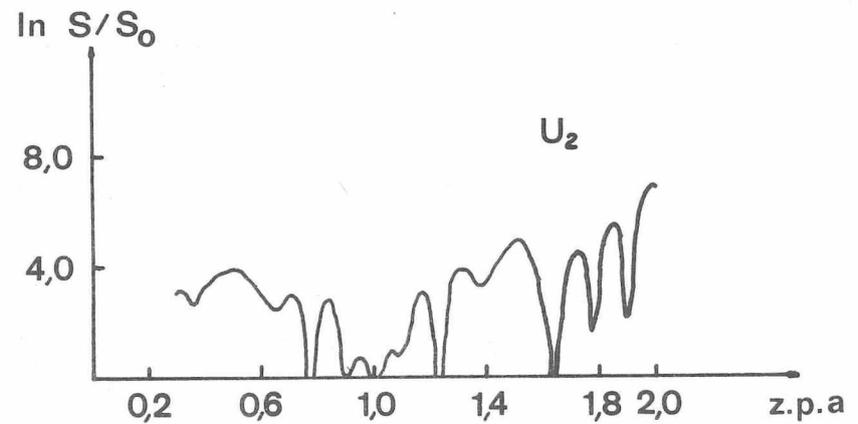
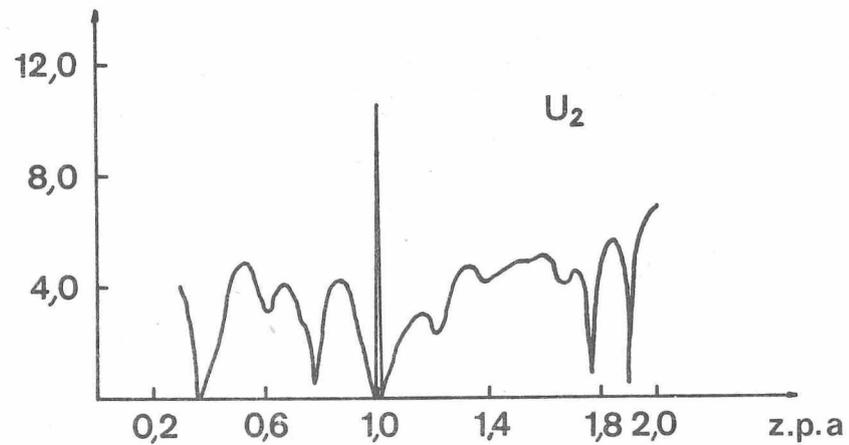
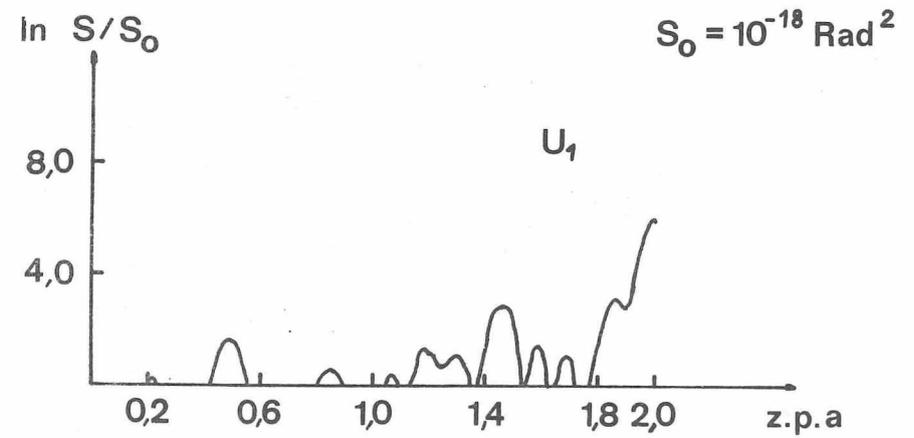
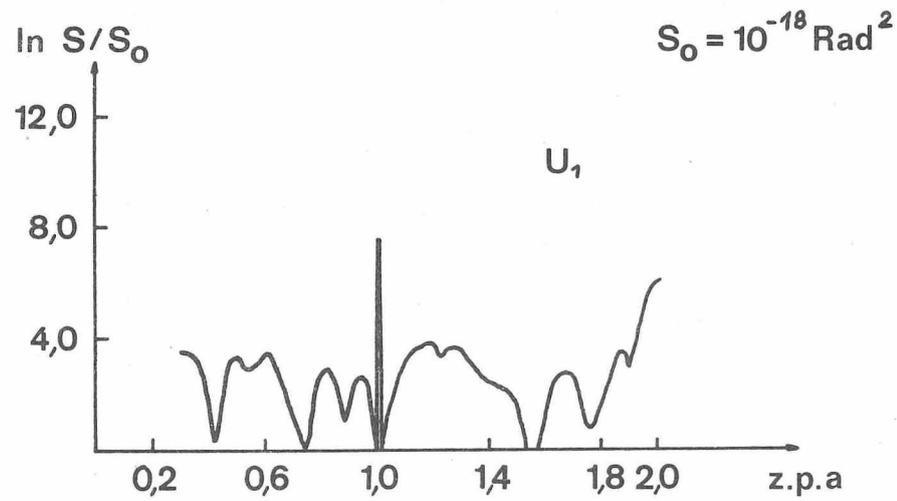


Abb. 12. Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion (1950.0 - 59.9)

Abb. 13. Energiespektren der Komponenten der Erregerfunktion (nach Beseitigung der Jahresperioden) (1950.0 - 59.9)

4. Die Perioden der Polbewegung

Zur Anwendung der in 2.3. angegebenen Verfahren zur Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung müssen die Parameter der mit den Perioden der Erregerfunktion korrespondierenden Perioden der Polbewegung gewisse Genauigkeitsansprüche erfüllen. Diese Genauigkeit wird nicht nur durch zufällige Fehleranteile bestimmt, wie sie durch Meßfehler oder stochastische Anteile des Prozesses entstehen, sondern auch durch systematische Anteile, die zum Teil durch ein dem Prozeß nicht adäquates mathematisches Modell hervorgerufen werden. Mit (74) ergibt sich nach

$$dr = \frac{\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta L_1 + \Delta L_2}{\Delta K_1^2 + \Delta K_2^2 + \Delta L_1^2 + \Delta L_2^2} dk_1 .$$

(102)

$$dk_1 = dk_1 = dk_2 = dl_1 = dl_2$$

der Fehler der CHANDLER-Periode infolge systematischer Fehler der Amplituden und Phasen der Polbewegung.

Mit den in Tab. 1 angegebenen Mittelwerten der Parameter der Jahresperiode der Erregerfunktion wird

$$dr \overline{[a]} = 0,58 dk_1 ,$$

woraus die relativ hohe Genauigkeit folgt, mit der die Parameter der Jahresperiode ermittelt werden müssen. Deren Bestimmung mit Hilfe der harmonischen Analyse bereitet insofern Schwierigkeiten, als der Jahresperiode die CHANDLER-Periode eng benachbart ist und letztere in der Regel nicht die Voraussetzungen erfüllt, die die Anwendung der harmonischen Analyse erfordert.

Mit der harmonischen Analyse werden bekanntlich periodische Funktionen durch eine Folge von trigonometrischen Funktionen (FOURIER-Reihe) approximiert. Die Entwicklung der FOURIER-Reihe läßt sich prinzipiell so weit ausdehnen, daß jeder Funktionswert der periodischen Funktion mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann. Dies bedeutet jedoch nicht, daß die im Verlauf dieser Reihenentwicklung ermittelten Amplituden und Phasen tatsächlich bei der ursprünglichen Funktion vorhanden sind. Dies trifft nur zu, wenn die durch die FOURIER-Entwicklung vorausgesetzten Frequenzen mit den Frequenzen der ursprünglichen Funktion übereinstimmen und darüber hinaus die Amplituden und Phasen dieser Funktion nur zufälligen Schwankungen unterworfen sind. Nur in diesem Fall können die ermittelten Amplituden und Phasen als erwartungstreue Schätzwerte der real vorhandenen Parameter aufgefaßt werden.

Die Polbewegung erfüllt diese Voraussetzungen nicht. Einmal ist es schwierig, einen Analysezeitraum so zu wählen, daß Jahresperiode und CHANDLER-Periode zueinander harmonisch sind, und zum anderen liegen systematische Variationen von Amplitude und Phase bei der CHANDLER-Periode vor. Die Jahresperiode besitzt solche Variationen zwar auch, jedoch sind diese relativ klein und vorwiegend zufälligen Charakters.

4.1. Der Einfluß einer nichtharmonischen Schwingung auf die durch harmonische Analyse bestimmten Schwingungen

Nach den vorstehenden Betrachtungen ist es erforderlich, den Einfluß der nicht erfüllten Voraussetzungen auf das Ergebnis der harmonischen Analyse zu untersuchen. Die nichtharmonische Schwingung sei durch die Funktion

$$(103) \quad x_k(t) = c_k \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{L} t + \gamma_k\right)$$

gegeben, wobei L die Länge des Analysenzeitraumes ist. Den Einfluß von (103) auf eine beliebige harmonische Schwingung erhält man dann bekanntlich nach

$$(104) \quad \begin{aligned} a_{j1} &= \frac{2}{L} \int_0^L x_k(t) \cos j \frac{2\pi}{L} t \, dt, \\ b_{j1} &= \frac{2}{L} \int_0^L x_k(t) \sin j \frac{2\pi}{L} t \, dt. \end{aligned}$$

Die Lösung vorstehender Integrale ergibt

$$(105) \quad \begin{aligned} a_{j1} &= \frac{2c_k}{\pi} \frac{k}{k^2 - j^2} \sin(\gamma_k + \pi k) \sin \pi k, \\ b_{j1} &= \frac{2c_k}{\pi} \frac{j}{k^2 - j^2} \cos(\gamma_k + \pi k) \sin \pi k. \end{aligned}$$

Führt man hierin $k/L = f_k$ und $j/L = f_j$ ein, so ergibt sich aus (105)

$$(106) \quad \begin{aligned} a_{j1} &= \frac{2c_k}{\pi} \frac{1}{L} \frac{f_k}{f_k^2 - f_j^2} \sin(\gamma_k + \pi L f_k) \sin \pi L f_k, \\ b_{j1} &= \frac{2c_k}{\pi} \frac{1}{L} \frac{f_j}{f_k^2 - f_j^2} \cos(\gamma_k + \pi L f_k) \sin \pi L f_k. \end{aligned}$$

Aus (106) folgt, daß der Einfluß einer unharmonischen Schwingung auf die Schwingungen der FOURIER-Reihe um so kleiner wird, je kleiner $(\sin \pi L f_k)/L$ wird. Bis auf Spezialfälle, in denen keine Verminderung des Einflusses eintritt, trifft dies für wachsendes L zu. In den erwähnten Spezialfällen ist infolge des kleinen Wertes $\sin \pi L f_k$ der Einfluß der unharmonischen auf die harmonischen Schwingungen ohnehin sehr klein. Im Falle der Polbewegung kann die CHANDLER-Welle eine unharmonische sein. Man wird durch geeignete Wahl von L jedoch anstreben, daß die CHANDLER-Welle zur Jahreswelle möglichst harmonisch ist, was für $L = 6a$ zutrifft. Für diesen Fall wird

$$f_j = 1 \text{ z. p. a}$$

und

$$f_k = 0,8333 \dots \text{ z. p. a} = \beta/2\pi$$

vorausgesetzt. Weicht f_k von diesem Wert ab, so kommt es zu einer fehlerhaften Beeinflussung der Jahreswelle. In der Regel weicht die CHANDLER-Frequenz etwas vom obenge-

nannten Wert ab. Meist beträgt $f_k \approx 0,840$. Es soll daher für diesen Fall der Einfluß auf die Jahresperiode angegeben werden.

Für

$$L = 6a, \quad f_k = 0,840 \text{ z. p. a}, \quad f_j = 1 \text{ z. p. a}$$

erhält man

$$a_{j1} = 0,038 c_k \sin (\gamma_k + 0,1256 \text{ Rad} + \pi),$$

$$b_{j1} = 0,045 c_k \cos (\gamma_k + 0,1256 \text{ Rad} + \pi).$$

Da im ungünstigsten Fall $c_k \approx 0,3''$ werden kann, muß selbst bei dieser geringen Abweichung der CHANDLER-Frequenz vom vorausgesetzten Wert für die Jahreswelle mit einem Amplitudenfehler von $c_j \approx 0,01''$ gerechnet werden. Infolge systematischer Phasenänderungen kann die aus der harmonischen Analyse erhaltene CHANDLER-Frequenz beträchtlich vom tatsächlichen Wert abweichen. Interessant ist daher noch der Fall:

$$L = 6a, \quad f_k = 0,869 \text{ z. p. a}, \quad f_j = 1 \text{ z. p. a},$$

$$a_{j1} = 0,234 c_k \sin (\gamma_k + 0,6723 \text{ Rad} + \pi),$$

$$b_{j1} = 0,270 c_k \cos (\gamma_k + 0,6723 \text{ Rad} + \pi).$$

Im Hinblick auf die zu erwartenden Größen der Amplitude der CHANDLER-Welle muß hier eine Korrektur der Jahreswelle erfolgen, damit nach dem in 2.5. angegebenen Verfahren der Wert der CHANDLER-Periode nicht durch diesen Einfluß verfälscht wird (siehe (102)).

Zur Untersuchung einer eventuell vorhandenen Variabilität der CHANDLER-Periode wäre es interessant, ihre Bestimmung nach (74) für einen möglichst kurzen Zeitraum durchzuführen. Aus dem Fall

$$L = 1a, \quad f_k = 0,840 \text{ z. p. a}, \quad f_j = 1 \text{ z. p. a},$$

$$a_{j1} = -0,875 c_k \sin (\gamma_k + 2,638 \text{ Rad})$$

$$b_{j1} = -1,041 c_k \cos (\gamma_k + 2,638 \text{ Rad})$$

erkennt man, daß einer beliebigen Verkürzung des Untersuchungszeitraumes Grenzen gesetzt sind. Selbst wenn man annimmt, daß die für das einzelne Jahr bestimmten Parameter der Jahreswelle durch schrittweise Annäherung ermittelt werden - indem z. B. die aus der Analyse eines 6 Jahresintervalls berechneten Parameter der CHANDLER-Welle zur Korrektur der Polkoordinaten verwendet werden - muß infolge der Restfehler mit so großem Einfluß auf die Parameter der Jahreswelle gerechnet werden, daß deren Parameter nicht zur Auswertung von (74) verwendet werden können. Auch eine Weiterführung der schrittweisen Annäherung durch wechselweise Korrektur mit Hilfe der aus 1,2 Jahresintervallen gewonnenen Parameter der CHANDLER-Welle bzw. der aus Jahresintervallen berechneten Parameter der Jahreswelle führt zu keinen besseren Ergebnissen.

Eine Bestimmung der CHANDLER-Periode nach (74) wird daher nur mit Hilfe zeitlicher Mittelwerte der Parameter der Jahreswelle möglich sein, wobei das Analysenintervall nicht kleiner als 6 Jahre sein sollte.

4.2. Der Einfluß einer Amplitudenvariation der CHANDLER-Welle auf die durch harmonische Analyse bestimmten Parameter der Jahreswelle

Für die folgenden Untersuchungen wird ein linearer Anstieg der Amplitude angenommen. Ferner wird vorausgesetzt, daß die CHANDLER-Welle im betrachteten Analysenintervall unharmonisch zu den berechneten Gliedern der FOURIER-Reihe sei. Den Einfluß auf die Schwingungen der FOURIER-Reihe erhält man, wenn man in (104) die Funktion

$$x_k(t) = (c_k + c_{k1} t) \sin \left(k \frac{2\pi}{L} t + \gamma_k \right)$$

einsetzt. In der in 4.1. dargestellten Art erhält man dann:

$$\begin{aligned} a_j &= a_{k1} + c_{k1} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{f_k}{f_k^2 - f_j^2} \cos(2\pi L f_k + \gamma_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2 L} \frac{f_k^2 + f_j^2}{(f_k^2 - f_j^2)^2} \cos(\pi L f_k + \gamma_k) \sin \pi L f_k \right\}, \\ (107) \quad b_j &= b_{j1} + c_{k1} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{f_j}{f_k^2 - f_j^2} \sin(2\pi L f_k + \gamma_k) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi^2 L} \frac{2 f_j f_k}{(f_k^2 - f_j^2)^2} \sin(\pi L f_k + \gamma_k) \sin \pi L f_k \right\}. \end{aligned}$$

In (107) stellt das zweite Glied des Klammersausdrucks die Wirkung einer nichtharmonischen Frequenz f_k dar. Es vermindert sich mit der Länge des Analysenintervalls. Für harmonische f_k ergibt sich aus (107)

$$\begin{aligned} a_j &= - \frac{c_{k1}}{\pi} \frac{f_k}{f_k^2 - f_j^2} \cos \gamma_k, \\ (108) \quad b_j &= \frac{c_{k1}}{\pi} \frac{f_j}{f_k^2 - f_j^2} \sin \gamma_k. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung des Einflusses eines linearen Anstiegs der Amplitude der CHANDLER-Welle soll der Fall

$$L = 6a, \quad f_k = 0,840 \text{ z. p. a}, \quad f_j = 1 \text{ z. p. a}$$

betrachtet werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_j &= a_{j1} + c_{k1} \left\{ 0,908 \cos(0,2513 + \gamma_k) - 0,042 \cos(0,1256 + \pi + \gamma_k) \right\}, \\ b_j &= b_{j1} + c_{k1} \left\{ 1,081 \sin(0,2513 + \gamma_k) + 0,040 \sin(0,1256 + \pi + \gamma_k) \right\}. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß der Steigungsfaktor c_{k1} die Jahreswelle in voller Größe beeinflussen kann, so daß gegebenenfalls die Parameter der Jahreswelle entsprechend zu korrigieren sind.

In ähnlicher Weise läßt sich der Einfluß einer säkularen Variation des Pols auf die harmonische Analyse berechnen. Diese wird als lineare Variation des konstanten Gliedes der FOURIER-Reihe aufgefaßt. Auf Grund dieser Voraussetzung erhält man folgenden Einfluß auf das Element der FOURIER-Reihe mit der Frequenz f_j :

$$(109) \quad \begin{aligned} a_j &= 0, \\ b_j &= -\frac{1}{\pi f_j} a_{0.1}, \end{aligned}$$

wenn $a_{0.1}$ der Steigungsfaktor ist.

4.3. Die Bestimmung der Parameter der Jahreswelle aus der Analyse von 6jährigen Zeitintervallen

Nach den Untersuchungen der Abschnitte 4.1. und 4.2. empfiehlt es sich, die Parameter der Jahreswelle aus der harmonischen Analyse von 6jährigen Zeitintervallen zu bestimmen. Da in diesem Fall CHANDLER- und Jahreswelle zueinander nahezu harmonisch sind, wird die gegenseitige Beeinflussung beider Schwingungen minimal sein. Die Berechnung erfolgte nach dem von YUMI (1970) angegebenen Verfahren. Bei diesem werden Amplituden, Phasen und Perioden der Jahres- und CHANDLER-Welle bestimmt.

In Abb. 14 sind die Amplituden der beiden Komponenten der CHANDLER-Bewegung und deren Periode T_0 als Funktion der mittleren Epoche des jeweiligen Analysenintervalls dargestellt.

Die Standardabweichungen der Amplituden betragen mit geringen Variationen etwa

$$\sigma_k = \sigma_1 = \pm 0,01''$$

und die Periode

$$\sigma_{T_0} = \pm 0,01 \text{ a.}$$

σ_{T_0} schwankt in den einzelnen Analysenintervallen zwischen 0,003 a und 0,02 a. Es sei hier nochmals bemerkt, daß die in Abb. 14 dargestellten Werte der CHANDLER-Periode nicht als exakte Schätzwerte dieses Parameters angesehen werden können, da sie von Phasenvariationen der CHANDLER-Welle beeinflußt sein können.

An Hand der Amplituden und Perioden der CHANDLER-Welle werden nach (106) und (107) die Korrekturen der Jahreswelle berechnet. Auf eine Anwendung von (109) kann verzichtet werden, da die säkularen Anteile der Polbewegung nicht groß genug sind, um die Amplituden der Jahreswelle spürbar zu beeinflussen.

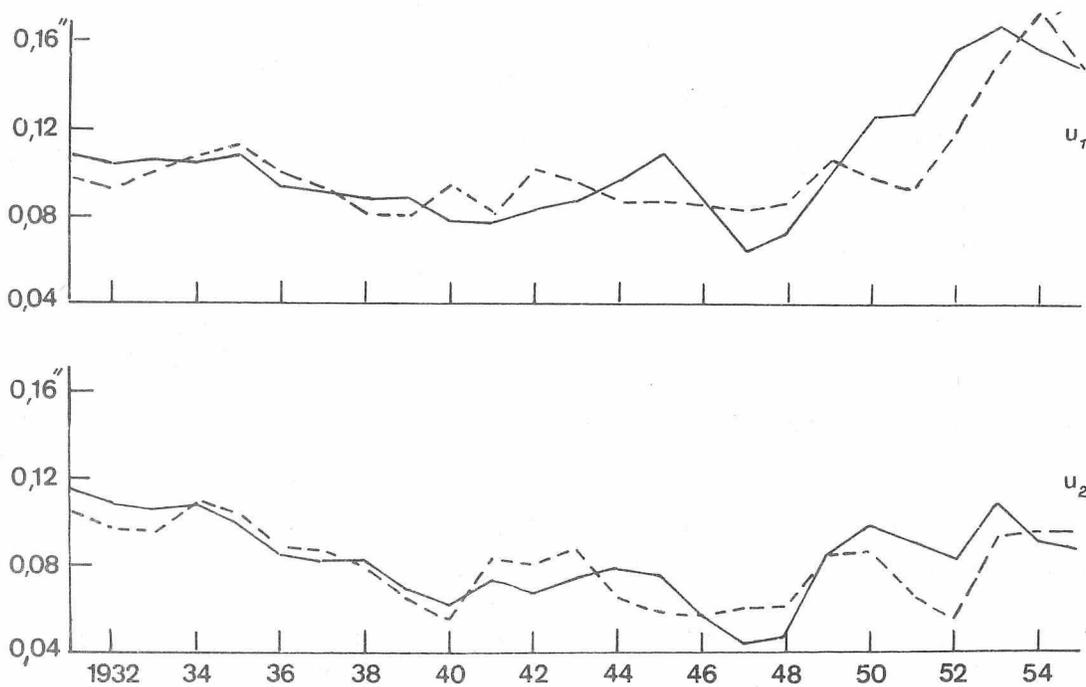


Abb. 14. Periode und Amplituden der CHANDLER-Welle

Nach Abb. 14 ergeben sich drei wesentliche Bereiche für die Anwendung der verschiedenen Korrekturformeln. Im Zeitraum 1931 - 1940 weicht T_0 wesentlich von dem harmonischen Wert (1,2 a) ab, so daß der nach (106) wirkende Einfluß beseitigt werden muß. Die für die Epochen 1940 - 1950 ermittelten Werte der Amplituden der Jahreswelle müssen zusätzlich wegen des Anstiegs der Amplitude der CHANDLER-Welle (107) korrigiert werden, und für 1951 - 1955 muß zur Korrektur eine kompliziertere Formel angesetzt werden, die den gekrümmten Verlauf der Amplitudenvariation der CHANDLER-Welle beschreibt.

Dieser Amplitudenverlauf wurde durch eine periodische Funktion approximiert,

$$x_k(t) = (c_k + c_{k1} \sin(2\pi\nu t + \delta_\nu)) \cdot \sin(2\pi f_k + \delta_k),$$

mit der sich nach (104) die Korrekturformel ergab. Diese lautet:

$$(110) \quad \Delta a_j = -a_{j1} - \frac{c_{k1}}{\pi L} \left\{ \frac{f_k - \nu}{(f_k - \nu)^2 - f_j^2} \cos(\pi(f_k - \nu)L + \delta_k - \delta_\nu) \sin \pi(f_k - \nu)L - \frac{f_k + \nu}{(f_k + \nu)^2 + f_j^2} \cos(\pi(f_k + \nu)L + \delta_k + \delta_\nu) \cdot \sin \pi(f_k + \nu)L \right\},$$

$$\Delta b_j = -b_{j1} - \frac{c_{k1}}{\pi L} \left\{ \frac{f_k - \nu}{(f_k - \nu)^2 - f_j^2} \sin(\pi(f_k - \nu)L + \delta_k - \delta_\nu) \cdot \right. \\ \cdot \sin \pi(f_k - \nu)L - \frac{f_k - \nu}{(f_k + \nu)^2 - f_j^2} \sin(\pi(f_k + \nu)L + \delta_k - \delta_\nu) \cdot \\ \left. \cdot \sin \pi(f_k + \nu)L \right\}.$$

a_{j1} und b_{j1} werden nach (106) berechnet.

Zur numerischen Berechnung von (110) wurde $\nu = 0,12$ z. p. a gewählt. c_{k1} und δ_ν wurden durch eine Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. In Abb. 15 sind die Amplituden der aus der Analyse 6jähriger Intervalle ermittelten Jahreswellen dargestellt.

Tabelle 3 enthält die Amplituden und Phasen der korrigierten Jahreswelle.

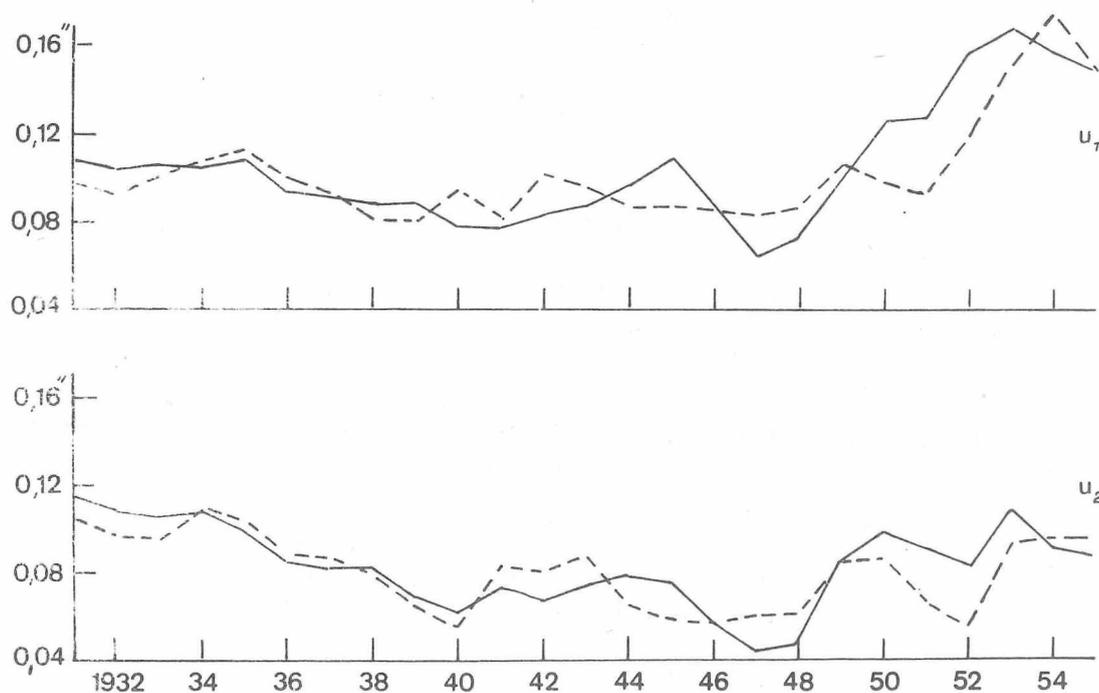


Abb. 15. Amplituden der Jahreswelle (gestrichelt, korrigiert wegen des Einflusses der CHANDLER-Welle)

Tab. 3. Amplituden und Phasen der korrigierten Jahreswelle

Epoche	u_1		u_2	
	1	γ_1	k	γ_k
1931	0,0976"	204,5°	0,1057"	103,5°
32	0,0918	207,6	0,0969	107,7
33	0,1005	209,7	0,0953	108,8
34	0,1068	206,3	0,1097	108,8
35	0,1122	202,0	0,1041	101,2
36	0,0985	197,9	0,0892	98,0
37	0,0923	197,9	0,0841	102,2
38	0,0797	199,0	0,0799	106,1
39	0,0799	204,9	0,0643	115,8
40	0,0945	205,7	0,0559	128,3
41	0,0813	217,0	0,0834	117,9
42	0,1017	206,4	0,0807	114,7
43	0,0957	200,6	0,0881	123,9
44	0,0861	212,1	0,0647	111,8
45	0,0865	197,2	0,0580	104,4
46	0,0844	207,2	0,0561	116,9
47	0,0834	209,8	0,0005	116,0
48	0,0877	211,8	0,0613	121,2
49	0,1060	212,7	0,0845	123,4
50	0,0976	202,9	0,0867	119,1
51	0,0918	193,9	0,0641	87,9
52	0,1197	217,1	0,0567	121,9
53	0,1511	218,6	0,0936	114,5
54	0,1750	227,8	0,0974	131,7
55	0,1510	220,3	0,0917	115,4
Mittel	0,0971	206,3	0,0741	109,5
1930-60	$\pm 0,003$	$\pm 1,8$	$\pm 0,003$	$\pm 1,8$

Die Standardabweichungen der in vorstehender Tabelle zusammengestellten Amplituden betragen im Durchschnitt

$$\sigma_{1,k} = \pm 0,008''.$$

Für die einzelnen Werte schwankt $\sigma_{1,k}$ zwischen $\pm 0,005$ und $\pm 0,010''$. Die Standardabweichung des Phasenwinkels beträgt im Durchschnitt

$$\sigma_{\gamma_{k,1}} = \pm 5,3^\circ.$$

Auf Grund vorstehender Standardabweichungen ergibt sich nach dem T-Test, daß Amplitudenvariationen als signifikant zu betrachten sind, wenn sie die Werte

$$\Delta k, \Delta 1 = 0,019'' \text{ zum Konfidenzniveau } 90 \%$$

und

$$\Delta k, \Delta 1 = 0,022'' \text{ zum Konfidenzniveau } 95 \%$$

überschreiten. Die Phasenvariationen müssen $12,3^\circ$ bzw. $14,7^\circ$ überschreiten, um als

signifikant zu gelten. Die in Tab. 3 zusammengestellten Werte zeigen, daß sowohl Phasen wie Amplituden veränderlich sind.

4.4. Die harmonische Analyse von 10-Jahresintervallen der Polbewegung

Nach 4.3. zeigt die Variation der Amplitude der CHANDLER-Welle für gewisse Zeiträume ein besonders typisches Verhalten. Nach Abb. 14 sind dies die Bereiche

1930 - 39.9

1940 - 49.9

und

1950 - 59.9.

Für diese wurden nach (100) und (101) harmonische Analysen durchgeführt, deren Ergebnisse für die Komponenten der Polbewegung in den Abbildungen 16 bis 18 dargestellt sind. Abb. 19 zeigt das Energiespektrum der positiven Frequenzen, für die eine besonders günstige Energieübertragung vorliegt.

Zur besseren Darstellung der Energie der stochastischen Anteile wurden die Verhältnisse der Energiedichten S/S_0 logarithmisch dargestellt, wobei S_0 so gewählt wurde, daß es etwa dem durch die Varianz der Meßwerte zu erwartendem Rauschen entspricht.

Auf allen Abbildungen treten Jahres- und CHANDLER-Welle als determinierte Perioden deutlich hervor. Daneben sind eine Anzahl weiterer Energiespitzen zu verzeichnen, über deren Realität zunächst nichts ausgesagt werden kann.

In Abb. 20 bis 23 sind die Ergebnisse von Spektralanalysen dargestellt, bei denen die Reduktion des Einflusses der beiden Hauptperioden mit den für Jahres- bzw. 1,2-Jahresabschnitte berechneten Parametern dieser Wellen durchgeführt wurde. Man erkennt durch Vergleich der Abb. 20 - 23 mit den Abb. 16 - 19, daß das mittlere Energieniveau bei den erstgenannten niedriger liegt. Dies ist auf die Beseitigung der Variationen der Jahres- und CHANDLER-Welle innerhalb des Zehnjahresintervalls zurückzuführen. Es verschwinden auch eine Anzahl von Energiespitzen, die sicher als Nebenmaxima der determinierten Wellen aufzufassen sind, die infolge der vernachlässigten Variationen ihrer Parameter entstehen.

4.4.1. Betrachtungen zu einigen determinierten und quasideterminierten Perioden der Polbewegung

4.4.1.1. Die Jahreswelle

Aus der harmonischen Analyse erhält man folgende Parameter der Jahreswelle:

Tab. 4. Amplituden und Phasen der Jahreswelle (aus harmonischer Analyse von Zehnjahresintervallen)

Epoche	l	γ_1	k	γ_k
1930 - 39.9	0,0995"	203,05°	0,0971"	101,89°
1940 - 49.9	0,0809	221,44	0,0619	132,76
1950 - 59.9	0,1221	207,16	0,0716	115,94
1930 - 59.9	0,1008	210,55	0,0769	116,86

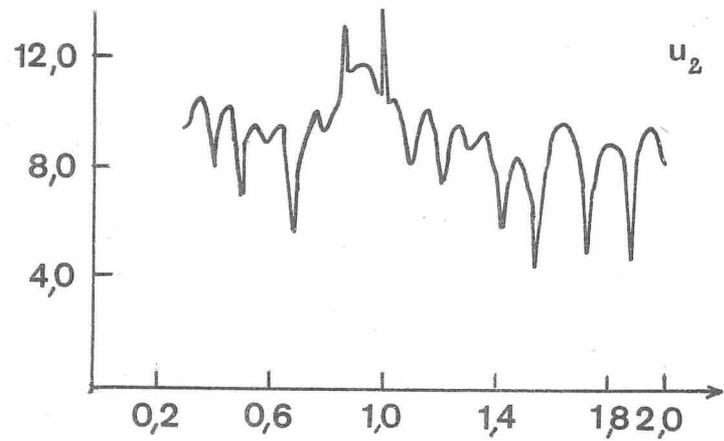
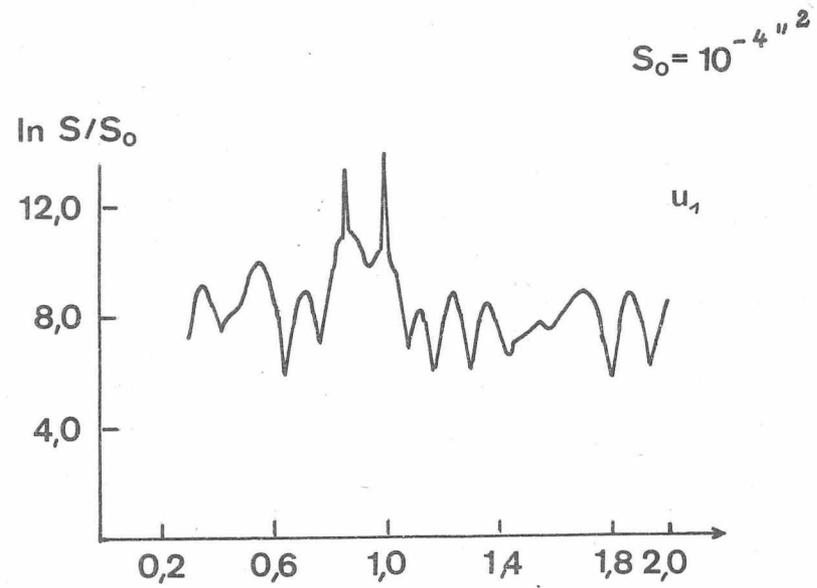


Abb. 16. Energiespektren der Komponenten der Polbewegung 1930 - 39.9

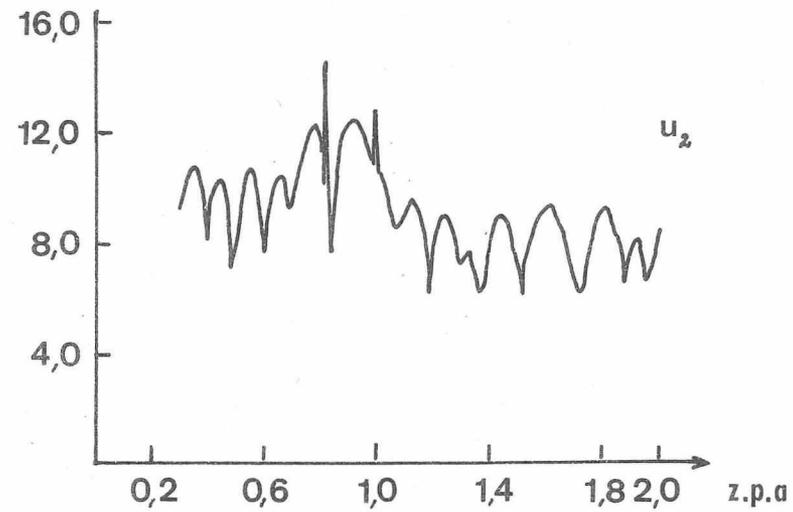
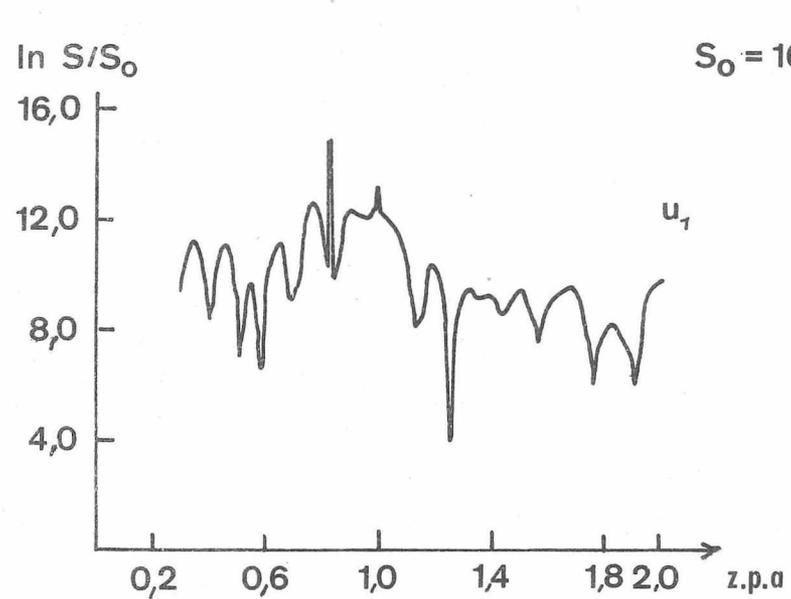


Abb. 17. Energiespektren der Komponenten der Polbewegung 1940 - 49.9

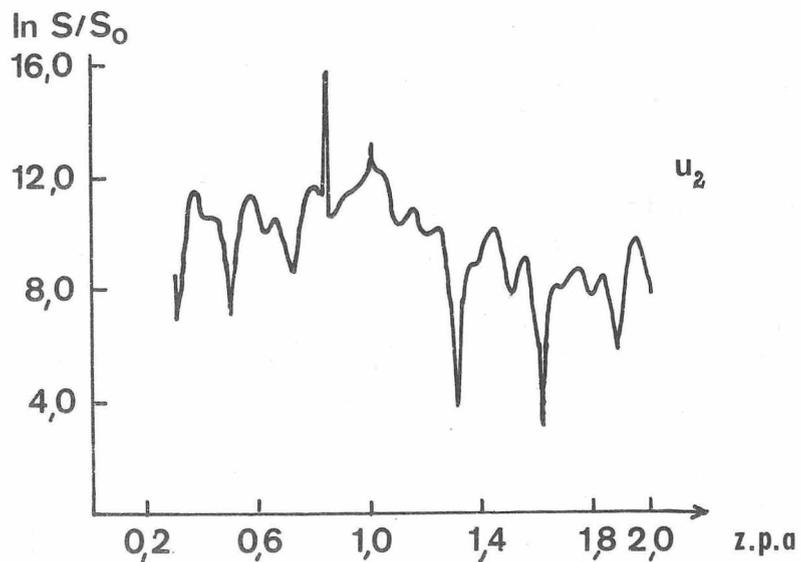
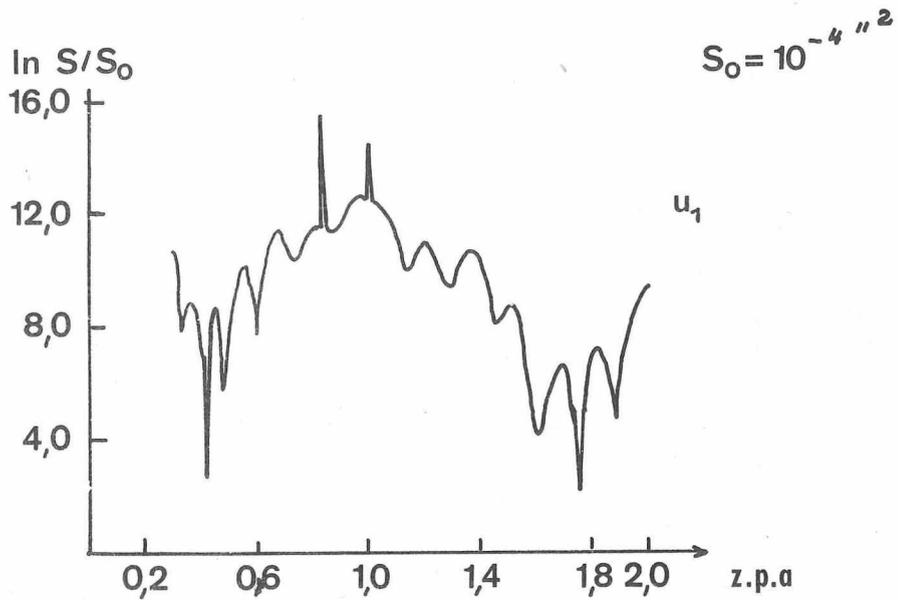


Abb. 18. Energiespektren der Komponenten der Polbewegung 1950 - 59.9

Auf Grund des Fehlereinflusses der Polkoordinaten erhält man für die Amplituden der Jahreswelle die Standardabweichung

$$\sigma_{1,k} = \pm 0,0012''.$$

Dieser Wert ist für eine reale Genauigkeitsabschätzung nicht brauchbar, da die Darstellung der Polbewegung durch eine Anzahl determinierter Perioden von stochastischen Bewegungsanteilen fehlerhaft beeinflusst wird.

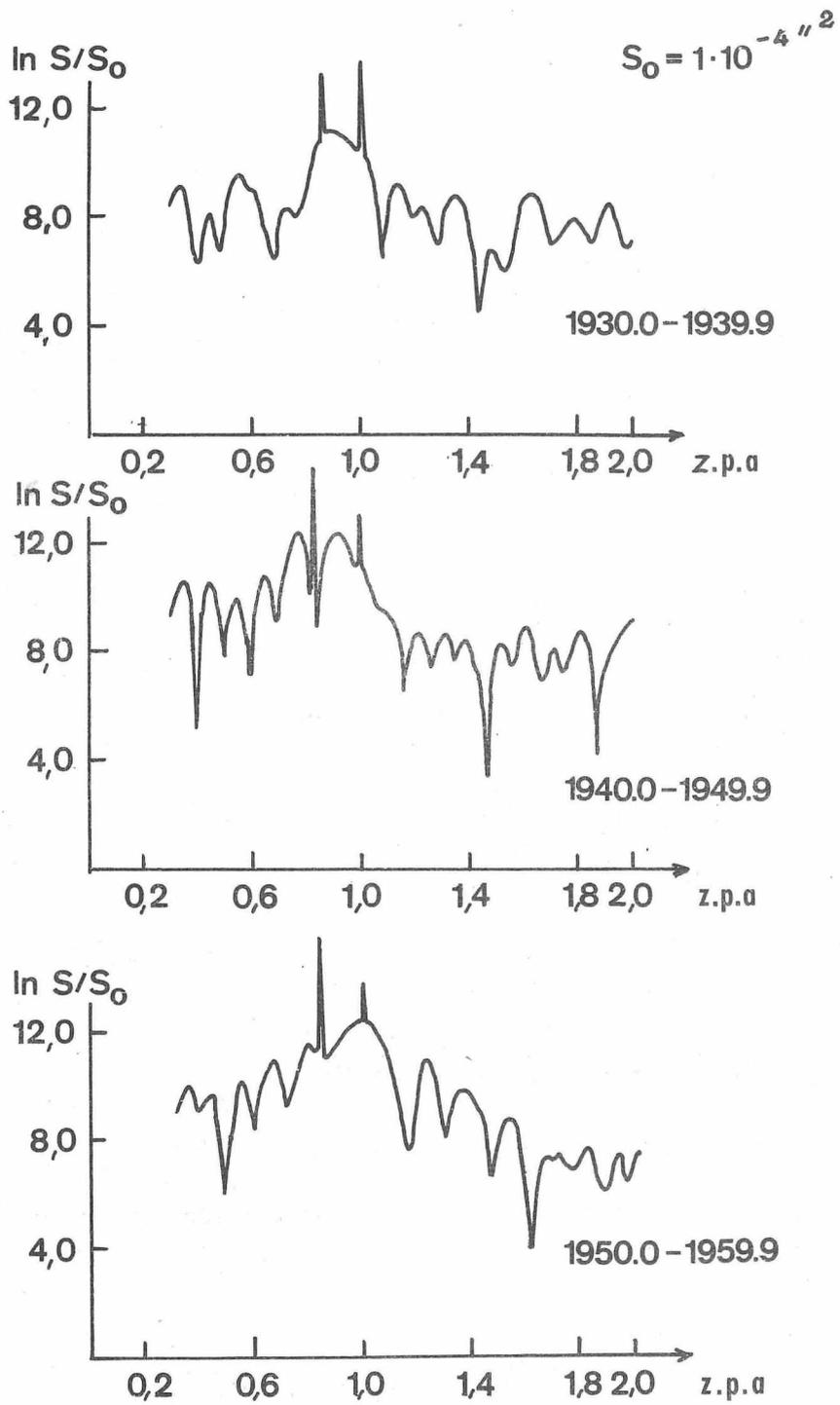


Abb. 19. Energiespektren positiver Frequenzen der Polbewegung

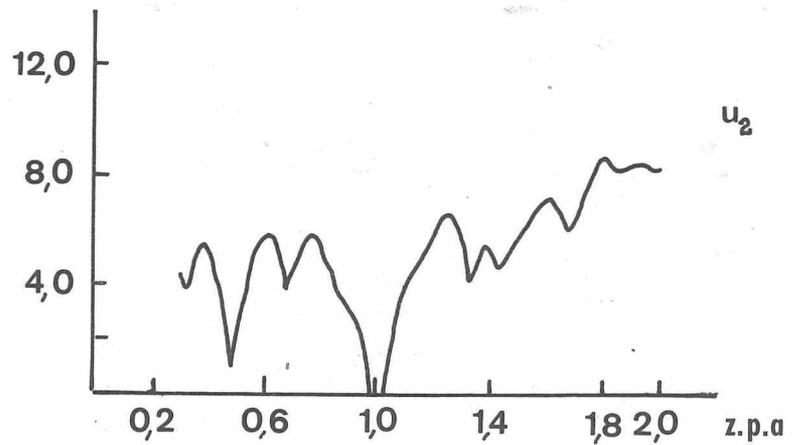
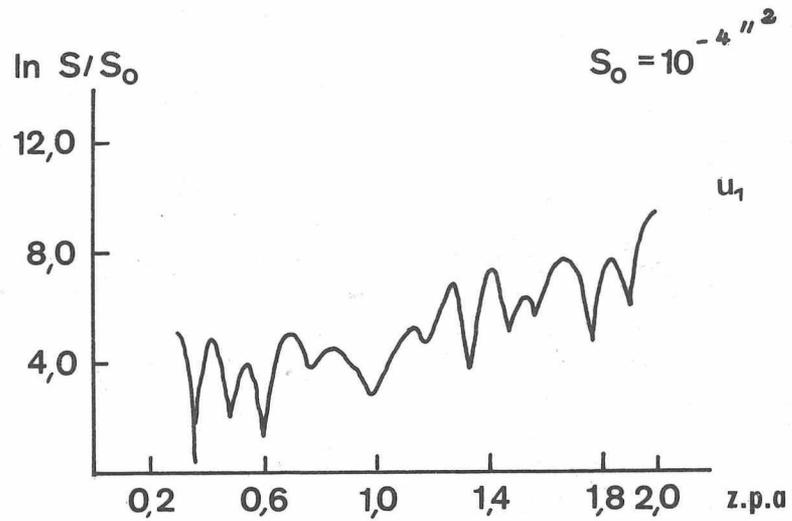


Abb. 20. Energiespektren der Komponenten der Polbewegung (nach Elimination der CHANDLER- und Jahreswelle für einzelne Jahre), 1930 - 39.9

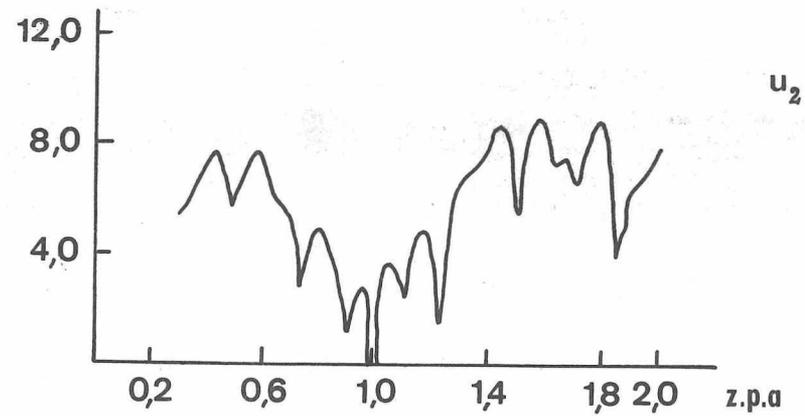
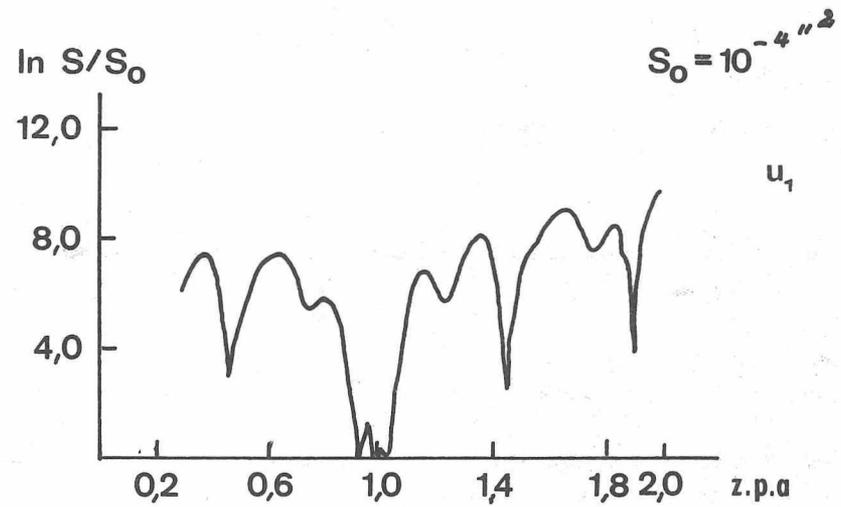


Abb. 21. Energiespektren der Komponenten der Polbewegung (nach Elimination der CHANDLER- und JAHRESWELLE für einzelne Jahre), 1940 - 49.9

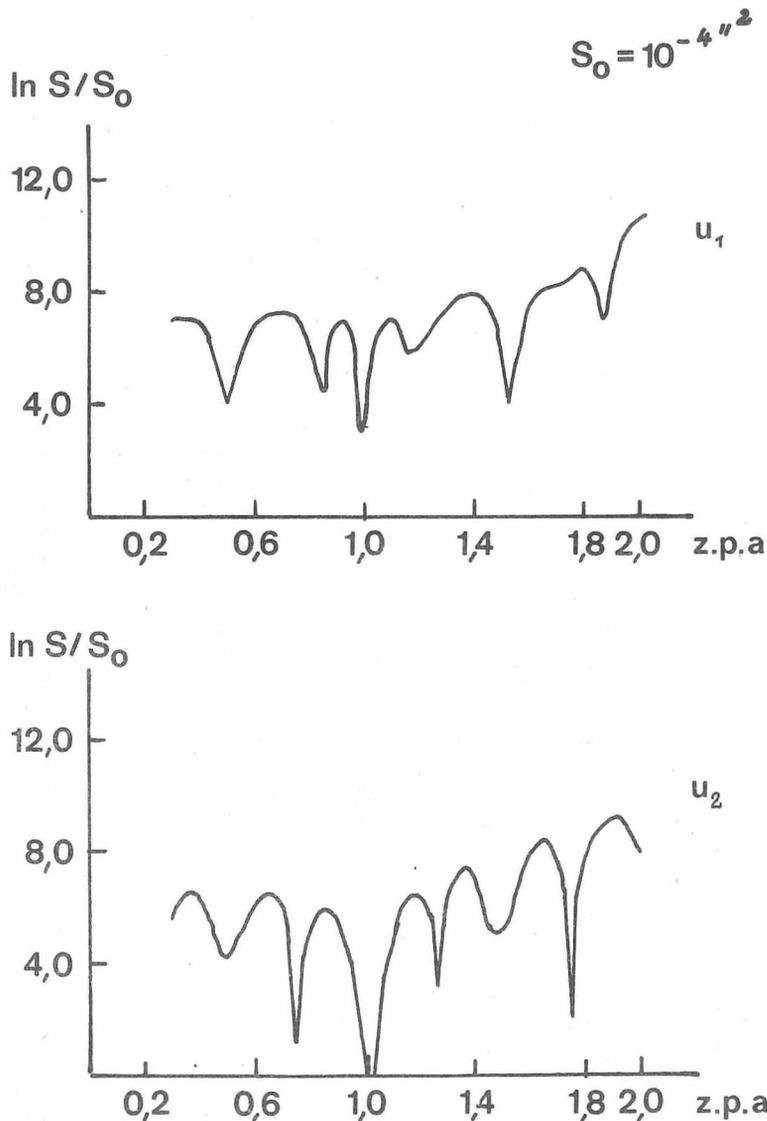


Abb. 22. Energiespektren der Komponenten der Polbewegung (nach Elimination der CHANDLER- und Jahreswelle für einzelne Jahre), 1950 - 59.9

Deren Einfluß ergibt sich aus der Summe der Energiedichten

$$(111) \quad 2 \cdot \sigma_0^2 = \sum_{f=0,2}^{2,0} S(f) - S(f_0) - S(1,0) - S(2,0).$$

Bei der Aufstellung von (111) wurde angenommen, daß zur Konstruktion des determinierten Modells der Polbewegung die CHANDLER-Welle ($S(f_0)$), die Jahreswelle ($S(1,0)$) und die Halbjahreswelle verwendet wurden, so daß deren Energiedichten keinen Beitrag zur Varianz σ_0^2 liefern. Ist n die Anzahl der in die harmonische Analyse eingeführten diskreten Werte, so erhält man für die Standardabweichungen der Amplituden

$$(112) \quad \sigma_{1,k} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma_0$$

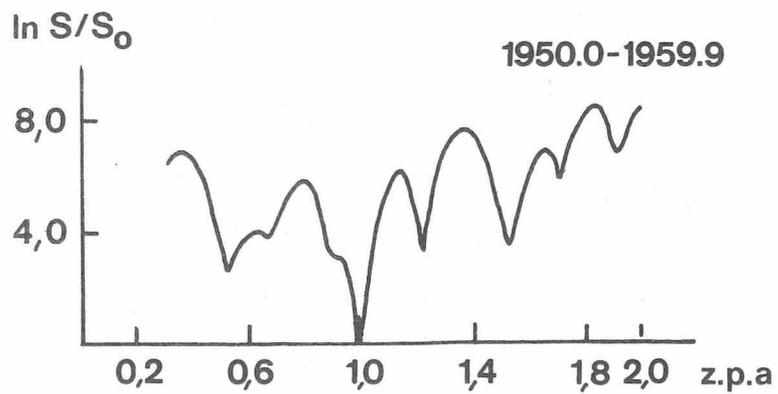
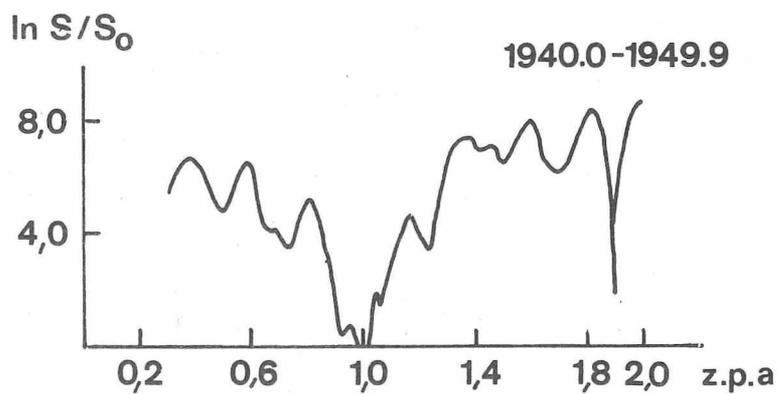
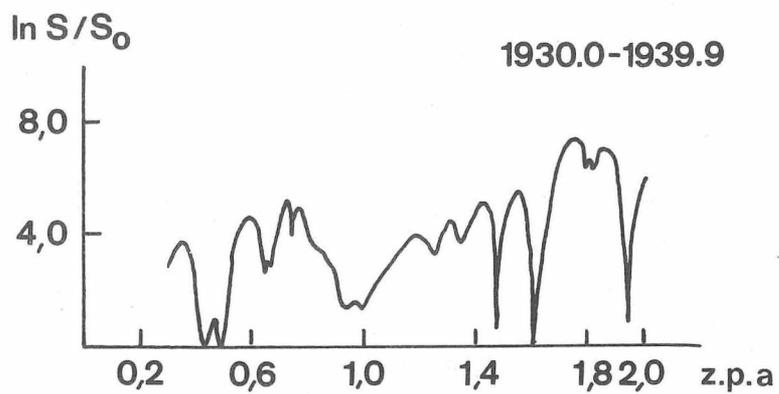


Abb. 23. Energiespektren positiver Frequenzen der Polbewegung (nach Elimination der CHANDLER- und Jahreswelle für einzelne Jahre)

und nach (91) aus (112) die Standardabweichungen der Phasen. Legt man der Berechnung dieser Werte die in Abb. 16 - 18 dargestellten Energiespektren zugrunde, so ergeben sich folgende Standardabweichungen (Tab. 5).

Tab. 5. Standardabweichungen der Parameter der Jahreswelle

Epoche	σ_1	u_1	σ_{δ_1}	σ_k	u_2	σ_{δ_k}
1930 - 39.9	0,0127"		6,4 ⁰	0,0160"		9,4 ⁰
1940 - 49.9	0,0231		16,3	0,0220		20,3
1950 - 59.9	0,0260		12,2	0,0241		19,2
1930 - 59.9	0,0211		12,0	0,0211		15,6

Die verhältnismäßig großen Standardabweichungen in vorstehender Tabelle werden durch die Amplitudenvariationen von CHANDLER- und Jahreswelle hervorgerufen (siehe Abb. 14). Für den Zeitraum 1930 - 39.9 sind die Standardabweichungen am kleinsten, was auf die relativ geringen Variationen der Parameter der CHANDLER-Welle in diesem Bereich zurückzuführen ist.

Wegen dieser Variationen sind die in Tab. 4 angegebenen Parameter der Jahreswelle systematisch verfälscht. Durch eine den Formeln (108) bzw. (110) entsprechende Korrektur ergeben sich die in Tab. 6 enthaltenen Parameter.

Tab. 6. Korrigierte Amplituden und Phasen der Jahreswelle

Epoche	1	u_1	δ_1	k	u_2	δ_k
1930 - 39.9	0,0995"		203,05 ⁰	0,0971"		101,89 ⁰
1940 - 49.9	0,0871		209,93	0,0721		121,06
1950 - 59.9	0,1050		206,28	0,0557		108,39
1930 - 59.9	0,0938		206,64	0,0738		110,87

Die Standardabweichungen vorstehender Werte ergeben sich aus den in Abb. 20 bis 22 dargestellten Spektren (Abb. 7).

Tab. 7. Standardabweichungen der Parameter der korrigierten Jahreswelle

Epoche	σ_1	u_1	σ_{δ_1}	σ_k	u_2	σ_{δ_k}
1930 - 39.9	0,0071"		4,03 ⁰	0,0082"		4,72 ⁰
1940 - 49.9	0,0110		7,23	0,0101		7,95
1950 - 59.9	0,0102		5,45	0,0100		10,29
1930 - 59.9	0,0094		5,75	0,0094		7,30

Vergleicht man die Tabellen 4 und 6 miteinander, so zeigt sich, daß infolge der ausgeführten Korrektur die Variationen von Amplituden und Phasen geringer geworden sind. Die verbleibenden Variationen sind nicht mehr statistisch signifikant.

4.4.1.2. Die CHANDLER-Welle

Für die CHANDLER-Welle wurden aus der harmonischen Analyse die in Tab. 8 zusammengestellten Parameter erhalten.

Tab. 8. Amplituden, Phasen und Perioden der CHANDLER-Welle

Epoche	u_1		u_2		T_0
	1	γ_1	k	γ_k	
1930 - 39.9	0,0767"	89,62 ⁰	0,0701"	172,61 ⁰	1,163 a
1940 - 49.9	0,1786	142,41	0,1608	232,91	1,205
1950 - 59.9	0,2189	236,00	0,2571	322,00	1,190
1930 - 59.9	0,0878	179,09	0,0922	278,05	1,191

In der gleichen Art wie für die Jahreswelle ergeben sich für vorstehende Parameter folgende Standardabweichungen:

Tab. 9. Standardabweichungen der Parameter der CHANDLER-Welle

Epoche	u_1		u_2		T_0
	σ_1	σ_{γ_1}	σ_k	σ_{γ_k}	
1930 - 39.9	0,0071"	5,30 ⁰	0,0082"	6,70 ⁰	0,003 a
1940 - 49.9	0,0110	3,53	0,0101	3,59	0,003
1950 - 59.9	0,0101	2,69	0,0100	2,22	0,003
1930 - 59.9	0,0094	8,49	0,0094	6,66	0,002

Die in Tab. 8 zusammengestellten Werte bestätigen das in Abb. 14 dargestellte Verhalten von Amplitude und Periode der CHANDLER-Welle.

Die relativ großen Phasenunterschiede sind auf Grund der Differenzen zwischen den für die einzelnen Zeiträume erhaltenen Perioden zu erwarten. Man sieht, daß große Phasendifferenzen mit den entsprechenden Periodendifferenzen korrespondieren. Über ihre Realität kann noch nichts ausgesagt werden, da auf Grund der harmonischen Analyse beide Phänomene nicht exakt voneinander getrennt werden können.

4.4.1.3. Die Halbjahreswelle

Bei der Analyse der meteorologischen Erregerfunktion (siehe 3.4.) wurde die Existenz eines mit Halbjahresperiode variablen Anteils festgestellt, der physikalisch plausibel ist. Es wurde daher versucht, auch bei der Polbewegung eine derartige Periode nachzuweisen, obwohl nicht zu erwarten ist, daß infolge der schlechten Energieübertragung in diesem Periodenbereich ein signifikanter Zusammenhang zwischen erregter und erregender Periode herzustellen ist.

Aus den Darstellungen der Energiespektren ist für $f = 2$ zunächst keine Energiespitze zu erkennen, die sich gegenüber den Nachbarspitzen besonders auszeichnen würde. Allerdings erkennt man aus den Abbildungen 20 bis 23 ein allmähliches Ansteigen des Energieniveaus mit wachsender Frequenz. Dies kann auf einen Einfluß der Halbjahrespe-

riode zurückzuführen sein, deren - durch das Auswerteverfahren verursachter Einfluß - auf Nachbarfrequenzen nicht beseitigt wurde. Rein formal ergeben sich aus der harmonischen Analyse folgende Amplituden und Phasen.

Tab. 10. Amplituden und Phasen der Halbjahreswelle

Epoche	u_1		u_2	
	1	δ_1	k	δ_k
1930 - 39.9	0,0103"	4,66°	0,0058"	107,62°
1940 - 49.9	0,0122	31,82	0,0085	210,29
1950 - 59.9	0,0199	126,88	0,0050	71,96
1930 - 59.9	0,0083	69,42	0,0032	141,20

Die Standardabweichungen der Amplituden betragen

$$\sigma_{1,k} = \pm 0,003''$$

und der Phasen

$$\sigma_{\delta_1} = \pm 20^\circ, \quad \sigma_{\delta_k} = \pm 30^\circ.$$

Obwohl die Amplituden der Halbjahreswelle für die verschiedenen Untersuchungszeiträume nur gering voneinander abweichen, muß wegen der Phasenvariationen geschlossen werden, daß es sich bei der berechneten Halbjahreswelle nicht um einen determinierten Bewegungsanteil handelt. Auf Grund der Existenz einer Halbjahreswelle bei der Erregerfunktion kann zwar ein entsprechender Bewegungsanteil bei der Polbewegung erwartet werden, jedoch können dessen Parameter nicht die Größe der für die Polbewegung ermittelten Werte erreichen (siehe auch 6.1.).

4.4.2. Folgerungen aus dem von determinierten Anteilen befreiten Energiespektrum

Nachdem die das mittlere Energieniveau wesentlich überschreitenden Spitzen der CHANDLER- und Jahresperiode beseitigt worden sind, lassen sich etwaige Energiespitzen im Restspektrum nur schwer bestimmen. Es wurden nur solche Energiespitzen als signifikante Indikatoren für vorhandene Perioden definiert, die in allen Spektren (Abb. 20 bis 23) auftreten. Daneben sollen auch die in den Energiespektren der Erregerfunktion gefundenen Perioden als Hinweise für mögliche Perioden in der Polbewegung benutzt werden.

Aus den Spektren der Erregerfunktion wurden Energiespitzen für

$$f \approx 0,5 \text{ z. p. a} \quad \text{und} \quad f \approx 1,2 \text{ bis } 1,3 \text{ z. p. a}$$

ermittelt. Für die gleichen Frequenzen zeigten die Spektren der Polbewegung ebenfalls Energiespitzen. Die Energiespitzen der Zweijahresperiode verhalten sich bei der Polbewegung ähnlich wie bei der Erregerfunktion. In beiden Fällen traten Doppelspitzen auf. Energiespitzen, die dem zweiten Frequenzbereich der Erregerfunktion entsprechen könnten, liegen bei der Polbewegung zwischen $f \approx 1,3 \text{ z. p. a}$ und $f \approx 1,4 \text{ z. p. a}$. Weitere auf vorhandene Perioden hinweisende Energiespitzen liegen in den Spektren der Pol-

bewegung bei $f \approx 1,58$ bis $1,66$ z. p. a und $f = 1,8$ z. p. a. Für diese Perioden konnte rein empirisch kein Bezug zur meteorologischen Erregerfunktion hergestellt werden.

5. Die Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung durch Eingangs-Ausgangs-Analyse

Die Beziehungen zwischen der Eingangsgröße (Erregerfunktion) und der Ausgangsgröße (Polbewegung) werden durch die Differentialgleichung (33) dargestellt. Aus dieser wurden in 2.3. und 2.5. Verfahren abgeleitet, mit deren Hilfe es für determinierte Bewegungsanteile des Poles möglich ist, den Dämpfungsfaktor und die Periode der freien Bewegung (CHANDLER-Periode) zu bestimmen. Mit Hilfe der Übertragungsfunktion (siehe 2.4.) ist es möglich, auch stochastische Bewegungsanteile zur Bestimmung dieser Größen heranzuziehen.

5.1. Die Bestimmung der CHANDLER-Periode auf Grund der Jahreswelle

Zur Anwendung des in 2.5. dargestellten Verfahrens stehen die in den Tab. 1 und 3 zusammengestellten Werte zur Verfügung. Die Parameter der Jahreswelle der Erregerfunktion müssen hierzu aus den in Tab. 3 angegebenen Werten über sechs Jahre gemittelt werden. Dies muß symmetrisch zu den in Tab. 3 angegebenen mittleren Epochen erfolgen. Nach Formel (77) beträgt die a priori zu erwartende Standardabweichung der nach diesem Verfahren berechneten CHANDLER-Periode

$$\sigma_{T_0} = \pm 0,02 \text{ a.}$$

Neben der CHANDLER-Periode wird nach dem in 2.5. dargestellten Verfahren auch ein Wert für die Phasendifferenz zwischen der aus der meteorologischen Erregerfunktion und aus astronomisch bestimmten Polkoordinaten abgeleiteten Jahreswelle erhalten. Deren Standardabweichung kann a priori zu

$$\sigma_{\phi} = \pm 6^{\circ}$$

geschätzt werden.

Nachdem der in Tab. 1 enthaltenen Erregerfunktion der Luftmassenbewegung noch der Einfluß der saisonalen Variation der Wasserspeicherung (nach HYLCKAMA 1956) hinzugefügt wurde, ergab die Berechnung die in Tab. 11 zusammengestellten Daten der CHANDLER-Periode T_0 .

Man erkennt aus dieser Tabelle und Abb. 24, daß die typischen mit den Amplitudenvariationen (siehe Abb. 24) korrelierten Schwankungen von T_0 mit Hilfe der Eingangs-Ausgangs-Analyse nicht erhalten wurden. Die in Abb. 24a dargestellten Variationen können auf Grund der Standardabweichungen nicht als reell angesehen werden. Man erkennt, daß sich die Fehlerbereiche des Gesamtmittels und der aus Sechsjahresmitteln berechneten Werte T_0 nur in wenigen Fällen nicht überdecken. Die auf Grund der harmonischen Analyse erhaltenen Variationen der CHANDLER-Periode können demnach auf Grund der Eingangs-Ausgangs-Analyse nicht bestätigt werden.

Tab. 11. CHANDLER-Periode T_0 und Phasenverschiebung $\Delta\delta$

Epoche	T_0	σ_{T_0}	$\Delta\delta$	$\sigma_{\Delta\delta}$
1931	1,195 a	0,032 a	26,1°	8,5°
32	1,207	0,031	29,0	7,8
33	1,193	0,018	29,6	4,9
34	1,169	0,021	25,6	6,3
35	1,169	0,012	17,4	4,0
36	1,187	0,011	12,4	3,2
37	1,185	0,009	12,0	2,8
38	1,197	0,021	13,4	6,0
39	1,214	0,015	23,0	3,9
40	1,199	0,054	26,8	14,0
41	1,180	0,024	30,0	6,7
42	1,166	0,007	28,8	2,6
43	1,176	0,028	30,9	9,5
44	1,217	0,011	32,2	2,8
45	1,227	0,021	17,9	5,6
46	1,233	0,027	29,3	6,6
47	1,224	0,015	29,9	3,7
48	1,212	0,023	28,8	5,8
49	1,163	0,013	29,0	4,0
50	1,171	0,022	23,2	6,7
51	1,208	0,026	5,1	8,0
52	1,172	0,043	34,4	15,1
53	1,155	0,027	33,7	9,8
54	1,151	0,027	60,7	11,5
55	1,160	0,023	45,1	9,7
Mittel	1,191	0,009	24,8	2,6

Als weiteres Ergebnis wurde auf Grund der Eingangs-Ausgangs-Analyse eine Phasenverschiebung zwischen der mit Hilfe der meteorologischen Erregerfunktion ermittelten Jahresperiode der Polbewegung und der aus IPMS-Daten erhaltenen berechnet. Diese beträgt im Mittel $24,8^\circ \pm 2,6^\circ$, was hinreichend mit den Werten anderer Autoren übereinstimmt (z. B. KORSUN und YATSKIV 1977), die 30° angeben. KIKUCHI (1977) wies nach, daß diese Phasenverschiebung bei Berücksichtigung der saisonalen Speicherung der Niederschläge beseitigt werden könne. Ein Versuch mit den von KIKUCHI angegebenen Werten führte zu einer Verminderung der Phasenverschiebung um etwa 50 %. Allerdings sind die für die CHANDLER-Periode erhaltenen Werte im Durchschnitt zu hoch (siehe Tab. 12). Die Erklärung der Phasenverschiebung von KIKUCHI konnte auf Grund der durchgeführten Berechnung nicht bewiesen werden. Sein Erklärungsversuch kann allerdings als plausibel bezeichnet werden, da spezielle Eigenschaften der Mechanik der Polbewegung (z. B. die Dämpfung) eine derartige Phasenverschiebung nicht hervorrufen können.

Obwohl auf Grund der in Abb. 24 und Tab. 11 zusammengestellten Werte T_0 schon geschlossen werden kann, daß die nach der harmonischen Analyse erhaltenen großen Schwankungen der CHANDLER-Periode nicht existieren, kann das Ergebnis wegen der zum Teil großen Standardabweichungen nicht befriedigen. Es muß vermutet werden, daß ein Teil

Tab. 12. CHANDLER-Periode T_0 und Phasenverschiebung $\Delta\gamma$ (berechnet mit den nach KIKUCHI reduzierten Werten der Erregerfunktion)

Epoche	T_0	σ_{T_0}	$\Delta\gamma$	$\sigma_{\Delta\gamma}$
1931	1,225 a	0,034 a	14,9°	8,7°
32	1,241	0,032	17,5	7,9
33	1,227	0,022	18,0	5,5
34	1,201	0,024	14,6	6,5
35	1,200	0,017	6,7	4,9
36	1,218	0,012	1,2	3,7
37	1,225	0,012	2,1	3,2
38	1,243	0,023	10,8	5,7
39	1,263	0,009	14,7	2,1
40	1,248	0,046	17,9	11,0
41	1,228	0,027	14,8	6,8
42	1,202	0,006	18,0	1,8
43	1,210	0,034	19,1	9,1
44	1,240	0,015	6,0	3,6
45	1,297	0,065	15,4	1,0
46	1,280	0,021	17,4	4,8
47	1,269	0,018	16,9	2,4
48	1,261	0,017	18,1	4,0
49	1,204	0,010	18,1	2,0
50	1,211	0,019	11,7	5,3
51	1,253	0,037	6,1	9,0
52	1,211	0,063	22,5	16,1
53	1,181	0,039	23,3	11,5
54	1,136	0,030	34,5	12,8
55	1,151	0,031	19,1	11,7
Mittel	1,232	0,009	12,8	2,3

dieser Ungenauigkeit auf Unsicherheiten der Korrektur wegen des Einflusses der Amplitudenvariation der CHANDLER-Welle zurückzuführen ist. Um diesen Einfluß zu reduzieren, wurden Werte der CHANDLER-Periode aus Mitteln der Jahreswelle über 10 Jahre berechnet, die aus den Spektralanalysen von Erregerfunktion und Polbewegung erhalten wurden.

Innerhalb der Untersuchungsintervalle der Spektralanalysen (1930 - 39.9, 1940 bis 49.9 und 1950 - 59.9) liegt eine gleichartige Variation der Amplitude der CHANDLER-Welle vor, so daß im Mittel ein geringerer Einfluß von Korrekturfehlern zu befürchten ist. Die Berechnung führte zu den in Tab. 13 zusammengestellten Werten.

Tab. 13. CHANDLER-Periode T_0 und Phasenverschiebung $\Delta\gamma$ (aus Jahresperiode der Spektralanalyse)

Epoche	T_0	σ_0	σ'_0	T'_0	$\Delta\gamma$	$\sigma_{\Delta\gamma}$
1930 - 39.9	1,197 a	0,002 a	0,017 a	1,163 a	22,5°	5,0°
1940 - 49.9	1,203	0,002	0,013	1,205	31,7	4,1
1950 - 59.9	1,187	0,002	0,039	1,190	20,6	9,0
1930 - 59.9	1,190	0,001	0,010	1,191	28,6	4,2

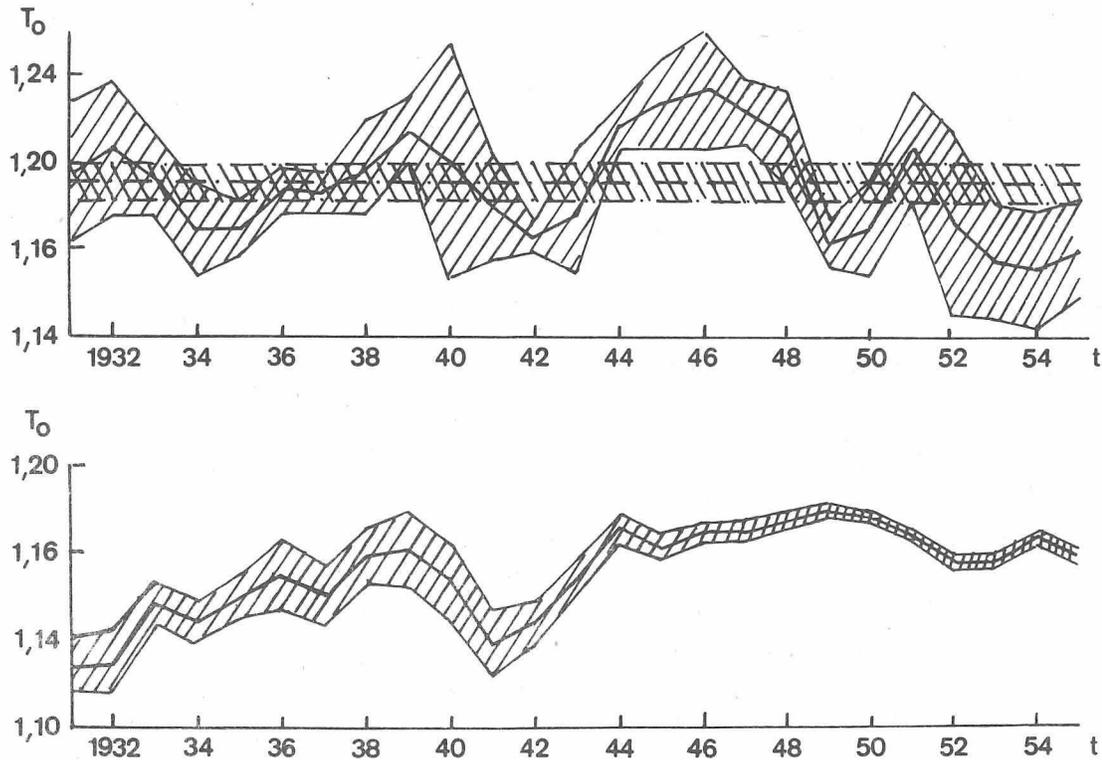


Abb. 24. CHANDLER-Periode, Werte für verschiedene Epochen.
 a) aus Eingangs-Ausgangs-Analyse mit meteorologischer Erregerfunktion
 b) aus harmonischer Analyse der Polbewegung

Diese Werte bestätigen das mit Hilfe von Sechsjahresmitteln der Parameter der Jahresperiode erhaltene Ergebnis. Die aus der harmonischen Analyse abgeleiteten Schwankungen der CHANDLER-Periode T_0 können nicht als reell angesehen werden. Zum Vergleich sind in Tab. 13 die aus Spektralanalyse der Polbewegung erhaltenen Werte der CHANDLER-Periode (T'_0) mit dargestellt. Wie man sieht, läßt sich der besonders niedrige Wert T'_0 für den Zeitraum 1930 - 39.9 durch die Eingangs-Ausgangs-Analyse nicht bestätigen. Da die Eingangs-Ausgangs-Analyse die Eigenschaften des mechanischen Modells der Polbewegung berücksichtigt, - wogegen die harmonische Analyse ein rein mathematisches Verfahren ist - sind die nach diesem Verfahren ermittelten Werte reellere Schätzwerte der CHANDLER-Periode.

Die in Tab. 13 noch enthaltenen Unterschiede von T_0 können auf Grund der Unsicherheit der Bestimmung von T_0 nicht als Variationen dieses Wertes angesehen werden. Die auf Grund der harmonischen Analyse erhaltenen Variationen der CHANDLER-Periode müssen als systematische oder quasisystematische Phasenänderungen der CHANDLER-Welle angesehen werden. Aus der guten Übereinstimmung der für den Bereich 1930 - 59.9 aus harmonischer Analyse und Eingangs-Ausgangs-Analyse erhaltenen Werte der CHANDLER-Periode folgt, daß sich die Phasenänderungen im langjährigen Mittel aufheben (s. auch YATSKIV 1974).

Die in Tab. 13 angegebenen Standardabweichungen σ_0 und σ_0^+ kennzeichnen die innere und äußere Genauigkeit. Die innere Genauigkeit ist durch die Fehler der Polkoordinaten und der Bestimmung der Luftdruckschwankungen gegeben. σ_0^+ ist ein Maß für die Unsicherheit des mathematischen Modells. Dieser Wert wird vor allem durch nicht berücksichtigte Anteile der Erregerfunktion und Unsicherheiten in der Separierung der Jahreswelle der Polbewegung gegenüber benachbarten Perioden bestimmt.

Für die Phasenverschiebung zwischen der aus der Erregerfunktion und der aus Polkoordinaten abgeleiteten Jahreswelle ergab sich ein zwischen 20° und 30° liegender Wert, was mit den Werten, die aus der Analyse von Sechsjahresmitteln abgeleitet wurden, hinreichend übereinstimmt.

5.2. Ist die CHANDLER-Periode variabel?

Wird die Frage in dieser direkten Weise gestellt, so kann man nur antworten: "Sie ist variabel". Dies folgt schon aus der Formel von LOVE und LARMOR

$$(113) \quad T_0 = \frac{C - A}{A} \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{1 - \frac{k}{C - A} \frac{\omega_0^2 a^5}{3f}},$$

in die einige zeitlich variable Größen eingehen. So beeinflussen z. B. die die Erregerfunktion hervorrufenden Massenbewegungen auch die Trägheitsmomente, und Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit ω_0 sind eine bekannte Tatsache. Änderungen der Elastizitätsparameter wären infolge von Variationen des Wärmehaushaltes der Erde denkbar, die die LOVEsche Zahl beeinflussen würden. Präzisiert man jedoch die Frage dahingehend, ob Änderungen in einer Größenordnung möglich wären, die nach den angegebenen Verfahren bestimmt werden könnten, so muß nach der aus (113) folgenden Beziehung

$$\frac{dT_0}{T_0} = 0,186 \frac{d\omega_0}{\omega_0} + 0,289 \frac{dk}{k} + 2 \frac{dA}{A}$$

die Frage verneint werden, da in kurzen Zeiträumen keine geophysikalischen Ereignisse denkbar sind, die eine Variation von ω_0 , k und der Massengeometrie verursachen, welche auch nur annähernd eine bestimmbare Größe der Variation der CHANDLER-Periode hervorrufen. Diese Folgerung trifft auch noch zu, wenn die Unsicherheit der Bestimmung von T_0 um 1 bis 2 Größenordnungen kleiner ist.

Dies läßt den Schluß zu, daß die experimentell nicht ganz gesicherte Invarianz von T_0 in nicht-säkularen Zeiträumen angenommen werden kann. Die infolge der Luftmassenbewegung theoretisch vorhandene jahresperiodische Variation der CHANDLER-Periode ist bedeutungslos, da das Trägheitsmoment der Luftmassen $C_L \approx 10^{-6} C$ ist.

5.3. Die Bestimmung des Dämpfungsfaktors

In 2.3. wurde bereits festgestellt, daß eine Berechnung von λ mit Hilfe der Jahresperiode nach der Beziehung (51) voraussichtlich nicht zu einem plausiblen Wert des Dämpfungsfaktors führt. Neben den dort angegebenen - aus Genauigkeitsbetrachtungen folgenden - Argumenten sei noch die Phasendifferenz erwähnt, die zwischen der aus der meteorologischen Erregerfunktion und den astronomischen Daten abgeleiteten Jahreswelle der Polbewegung besteht, die ebenfalls die Anwendung der Beziehung (51) zur Bestimmung des Dämpfungsparameters fraglich macht. Eine rein formale Berechnung mit den für den Zeitraum 1930 - 59.9 geltenden Mittelwerten der Jahreswellen führte zu dem unplausiblen Wert

$$\lambda = 0,397 \text{ 1/a.}$$

Die Ungenauigkeit von λ ist größer als der erhaltene Wert.

Ein weiterer Parameter, mit dem die Eingangs-Ausgangs-Beziehungen im System der Polbewegung dargestellt werden können, ist die in 2.4. behandelte Übertragungsfunktion, für die sich aus (67)

$$(114) \quad O^2(f) = \frac{1}{\left(\frac{f}{T_0} - 1\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 f_0^2}}$$

ergibt. In dieser Gleichung ist der Dämpfungsfaktor λ enthalten. Durch die Übertragungsfunktion wird zwischen den Energiespektren der positiven Frequenzen der Erregerfunktion ($S_\psi(f)$) und der Polbewegung ($S_u(f)$) die Beziehung

$$(115) \quad S'_u(f) = O^2(f) S_\psi(f)$$

hergestellt.

Berechnet man auf Grund von (115) das Spektrum $S'_u(f)$ aus dem Energiespektrum der Erregerfunktion $S_\psi(f)$, so kann der Dämpfungsfaktor durch eine Anpassung des Spektrums $S'_u(f)$ an das aus den Polkoordinaten abgeleitete Spektrum $S_u(f)$ berechnet werden.

Setzt man in (114)

$$(116) \quad K_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 f_0^2}$$

und wählt für K_0 einen geeigneten Näherungswert (K_0), so erhält man zur Bestimmung einer Korrektur ΔK_0 dieses Wertes die linearisierte Beziehung

$$(117) \quad V(f, \Delta K_0) = \frac{1}{\left(\frac{f}{T_0} - 1\right)^2 + (K_0)} S_\psi(f) - S_u(f) + S(f) \frac{\partial O^2}{\partial K_0} \Delta K_0$$

mit

$$\frac{\partial O^2}{\partial K_0} = - \frac{1}{\left\{\left(\frac{f}{T_0} - 1\right)^2 + (K_0)\right\}^2}.$$

Aus (117) erhält man nach

$$(118) \int_{f_1}^{f_2} v(f, \Delta K_0)^2 df \rightarrow \text{Min}$$

eine Gleichung zur Bestimmung von ΔK_0 . Ein Maß für die Güte der Approximation erhält man, wenn man den Ausdruck

$$(119) D^2 = \int_{f_1}^{f_2} \left\{ \frac{S_{\psi}(f)}{\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)^2 + (K_0)} - S_u(f) \right\}^2 df$$

mit

$$(120) d^2 = \int_{f_1}^{f_2} v(f)^2 df$$

vergleicht. In (120) ist

$$v(f) = \frac{S_{\psi}(f)}{\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)^2 + (K_0)} - S_u(f)$$

mit

$$K_0 = (K_0) + \Delta K_0.$$

Es muß

$$d^2 \ll D^2$$

sein. Aus (120) ergibt sich als Maß für die Bestimmungsgenauigkeit von K_0

$$\sigma_{K_0}^2 = \frac{d^2}{\left\{ \int_{f_1}^{f_2} \frac{S_{\psi}^2(f)}{\left\{ \left(\frac{f}{f_0} - 1\right)^2 + (K_0) \right\}^4} df \right\}} \cdot \frac{1}{f_2 - f_1}.$$

Hieraus ergibt sich die Standardabweichung des Dämpfungsfaktors

$$(121) \sigma_{\lambda} = \pi f_0 \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sigma_{K_0}.$$

Das vorstehend beschriebene Verfahren wurde auf die von CHANDLER- und Jahreswelle befreiten Energiespektren angewandt (Abb. 7 und Abb. 23).

In die Berechnung wurden folgende Werte der CHANDLER-Periode eingeführt:

$T_0 = 1,190$ a		$f_0 = 0,8403$ z. p. a
$= 1,195$	entspricht	$= 0,8368$
$= 1,200$		$= 0,8333$.

Damit ergaben sich die in Tab. 14 enthaltenen Dämpfungsfaktoren.

Tab. 14. Dämpfungsfaktoren

T_0	Epoche	$\lambda \pm \sigma_\lambda \sqrt{1/a}$		
		1930 - 39.9	1940 - 49.9	1950 - 59.9
1,190		$0,0474 \pm 1,0 \cdot 10^{-3}$	$0,0475 \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$	$0,0474 \pm 0,7 \cdot 10^{-3}$
1,195		$0,0521 \pm 1,3 \cdot 10^{-3}$	$0,0516 \pm 1,3 \cdot 10^{-3}$	$0,0519 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$
1,200		$0,0523 \pm 1,9 \cdot 10^{-3}$	$0,0535 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$	$0,0525 \pm 1,2 \cdot 10^{-3}$

Aus den mittleren Fehlern ergibt sich, daß die beste Approximation für den mit dem wahrscheinlichsten Wert der CHANDLER-Periode (1,190) berechneten Dämpfungsfaktor erzielt wurde. Um die Güte der Approximation noch besser zu erkennen, werden die Werte D^2 und d^2 in folgender Tabelle 15 zusammengestellt:

Tab. 15. Approximationsmaße D^2 und d^2

T_0	1930 - 39.9		1940 - 49.9		1950 - 59.9	
	D^2	d^2	D^2	d^2	D^2	d^2
1,190	1587	98	28,4	2,5	725,4	38,7
1,195	1092	91	16,1	1,3	454,6	28,8
1,200	1240	85	9,5	1,2	391,8	27,9

Aus Tab. 15 kommt der größere Approximationsgrad für $T_0 = 1,190$ nicht so deutlich zum Ausdruck. Man wird jedoch den für $T_0 = 1,190$ a berechneten Dämpfungsfaktor als wahrscheinlichsten Wert annehmen, da zu seiner Berechnung der plausibelste Wert von T_0 verwendet wurde. Die Berechnungen wurden für den Frequenzbereich

$$f_1 = 0,7 \text{ z. p. a} \quad \text{bis} \quad f_2 = 1,0 \text{ z. p. a}$$

durchgeführt. Aus dem hohen Approximationsgrad kann man folgern, daß zumindest in diesem Frequenzbereich eine enge Beziehung zwischen den stochastischen Anteilen der Erregerfunktion und der Polbewegung besteht.

Mit Hilfe des dargestellten Approximationsverfahrens wurde der Dämpfungsfaktor mit einer relativ kleinen Standardabweichung erhalten. Diese enthält jedoch nicht alle Fehlereinflüsse, da in die Berechnung die CHANDLER-Periode als fehlerfreier Wert eingeführt wurde. Berücksichtigt man, daß die CHANDLER-Periode eine Standardabweichung von

$$\sigma_{T_0} = \pm 0,01 \text{ a besitzt, so ergibt sich für den Dämpfungsfaktor an Stelle von}$$

$$\sigma_\lambda = \pm 0,001 \text{ 1/a der Wert}$$

$$\sigma_\lambda = \pm 0,005 \text{ 1/a.}$$

Mit den Ergebnissen der Abschnitte 5.1. und 5.2. können folgende plausibelste Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung zusammengestellt werden:

$$T_0 = 1,190 \text{ a} \pm 0,01,$$

$$f_0 = 0,8403 \text{ z. p. a} \pm 0,0071,$$

$$\lambda = 0,0474 \text{ 1/a} \pm 0,005,$$

$$Q = (\pi f_0) / \lambda = 56 \pm 6.$$

In 2.4. wurde dargelegt, daß es auf Grund der Halbwertsbreite der Energiespitze der CHANDLER-Periode möglich ist, den Dämpfungsfaktor zu bestimmen. Bei Anwendung dieser Methode erhält man

$$\lambda = 0,01 \text{ 1/a.}$$

Dieser Wert weicht beträchtlich von dem durch Eingangs-Ausgangs-Analyse berechneten Wert ab. JEFFREYS (1952) bezweifelt jedoch, daß eine Bestimmung des Dämpfungsparameters aus der Breite der Energiespitze möglich ist, da diese auch von anderen Effekten beeinflußt wird. Erwähnt seien nur die systematischen Amplitudenvariationen der CHANDLER-Welle, die nicht durch die Dämpfung verursacht werden. Vorstehende Ergebnisse sind demnach eine Bestätigung der von JEFFREYS geäußerten Meinung.

6. Untersuchungen zur Übertragung verschiedener Frequenzen der meteorologischen Erregerfunktion im System der Polbewegung

Mit Hilfe der in Abschnitt 5. angegebenen Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung ist es möglich, die Eingangs-Ausgangs-Beziehungen dieses Systems für verschiedene Erregerfunktionen zu analysieren. Eine erste Aussage bezüglich der Erregung der Polbewegung durch meteorologische Einflüsse wurde in 5. bereits für den Frequenzbereich 0,7 bis 1,0 z. p. a erhalten. Nach den dort erhaltenen Ergebnissen scheinen für diesen Bereich die determinierten und stochastischen Anteile der Polbewegung durch die meteorologische Erregerfunktion hervorgerufen zu sein. Durch die folgenden Betrachtungen soll diese Aussage erhärtet und die Untersuchung auf den Frequenzbereich 0,3 bis 2,0 z. p. a der Polbewegung und Erregerfunktion ausgedehnt werden. Aus methodologischen Gründen werden zunächst die als determiniert zu betrachtenden Anteile von Erregerfunktion und Polbewegung untersucht.

6.1. Determinierte Anteile von Erregerfunktion und Polbewegung

Nach den in 2.1. und 2.2. angegebenen Formeln kann ein Vergleich zwischen der aus der meteorologischen Erregerfunktion abgeleiteten und der aus Polkoordinaten berechneten Polkurve für determinierte Anteile auf Grund ihrer geometrischen Parameter erfolgen. Jede periodische Funktion erzeugt einen elliptischen Anteil der Polbewegung, und es bietet sich an, die Halbachsen der Ellipsen und deren Lage im Polkoordinatensystem zum Vergleich heranzuziehen. Bei diesem Verfahren wird die in 5.1. erwähnte Phasenverschiebung zwischen der aus der meteorologischen Erregerfunktion abgeleiteten Jahreswelle der Polbewegung und der aus Polkoordinaten berechneten Jahreswelle nicht wirksam.

In Tab. 16 sind die aus den Mitteln über 6 Jahre abgeleiteten Ellipsenparameter der Jahreswelle dargestellt. Aus einer Fehlerbetrachtung folgt, daß die Standardabweichungen der Halbachsen den Standardabweichungen der Amplituden der Jahreswelle entsprechen. Demnach wird

$$\sigma_{a,b} = \pm 0,008''.$$

Für die Standardabweichung des Richtungswinkels der großen Halbachse γ_a erhält man

$$\sigma_{\gamma_a} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{1}{|k_-|^2} + \frac{1}{|k_+|^2}} \sigma_{a,b} = \pm 17''.$$

In vorstehender Formel sind k_+ und k_- die komplexen Amplituden der negativen und positiven Frequenz der Jahreswelle (siehe (38)).

Aus vorstehenden Standardabweichungen folgt, daß im wesentlichen keine signifikanten Differenzen zwischen den Ellipsenparametern der auf den zwei verschiedenen Wegen ermittelten Polkurven bestehen.

Tab. 16. Halbachsen (a, b) und Achsrichtung (γ_a) der Polbewegungsellipse der Jahreswelle (Mittel über 6 Jahre)

Epoche	a		b		γ_a	
	M	A	M	A	M	A
1931	0,0996"	0,1117"	0,0797"	0,0906"	160,9°	123,7°
32	0,0966	0,1025	0,0834	0,0855	174,2	126,6
33	0,0952	0,1071	0,0760	0,0878	161,5	142,8
34	0,0911	0,1152	0,0723	0,1018	161,9	129,2
35	0,0899	0,1185	0,0708	0,0967	163,6	145,9
36	0,0883	0,1027	0,0702	0,0842	162,8	145,0
37	0,0845	0,0931	0,0672	0,0821	164,9	156,6
38	0,0837	0,0817	0,0671	0,0778	165,3	133,4
39	0,0843	0,0799	0,0671	0,0643	166,0	182,2
40	0,0841	0,0956	0,0686	0,0539	163,2	190,8
41	0,0876	0,0887	0,0720	0,0755	165,5	130,4
42	0,0881	0,1018	0,0728	0,0806	166,0	176,3
43	0,0941	0,1028	0,0770	0,0804	163,4	216,0
44	0,0955	0,0877	0,0778	0,0625	164,1	164,1
45	0,0955	0,0866	0,0781	0,0579	164,0	176,6
46	0,0935	0,0844	0,0763	0,0561	164,5	179,6
47	0,0922	0,0839	0,0836	0,0606	175,6	174,3
48	0,0936	0,0877	0,0763	0,0613	167,0	179,2
49	0,0855	0,1060	0,0693	0,0845	164,1	181,5
50	0,0765	0,0994	0,0567	0,0846	176,4	201,1
51	0,0879	0,0947	0,0709	0,0597	163,4	161,6
52	0,0806	0,1198	0,0643	0,0564	162,9	176,8
53	0,0844	0,1537	0,0680	0,0892	163,1	167,0
54	0,0819	0,1754	0,0658	0,0966	162,5	175,1
55	0,0808	0,1475	0,0631	0,0806	167,5	166,9

Die den Signifikanzbereich überschreitenden Werte für die Jahre 1952 - 1955 sind auf die bereits erwähnte unsichere Trennung zwischen CHANDLER- und Jahreswelle in diesem Zeitbereich zurückzuführen. Dies bestätigt sich auch durch die Ergebnisse für die den typischen Variationsarten der Amplitude der CHANDLER-Welle angepaßten Zeitbereiche, siehe Tab. 17.

Tab. 17. Halbachsen (a, b) und Achsrichtung (γ_a) der Polbewegungsellipse der Jahreswelle (Mittel über 10 Jahre)

Epoche	a		b		γ_a	
	M	A	M	A	M	A
1930 - 39.9	0,1120"	0,1074"	0,0910"	0,0882"	164,9°	138,6°
1940 - 49.9	0,0781	0,0809	0,0632	0,0619	164,1	182,5
1950 - 59.9	0,1130	0,1054	0,0942	0,0549	167,0	174,3
1930 - 59.9	0,0965	0,0979	0,0781	0,0730	164,2	168,5

Hier zeigen sich nur für den Bereich 1950 - 59.9 signifikante Differenzen für die kleine Halbachse b, was auf die unsichere Berücksichtigung des Einflusses der Amplitudenvariation der CHANDLER-Welle zurückzuführen ist. Die Amplitudenvariation erfolgt bekanntlich in diesem Bereich nach einer Funktion höherer Ordnung. Die Ergebnisse von Tabellen 16 und 17 bestätigen nochmals den Zusammenhang zwischen Erregerfunktion und Polbewegung für die Jahreswelle. Die gute Übereinstimmung der Parameter der Jahreswelle für verschiedene Zeitbereiche bestätigt den ermittelten Wert der CHANDLER-Periode ($T_0 = 1,190$ a). Als nicht geklärt muß das Auftreten einer Phasendifferenz zwischen den aus der Erregerfunktion und aus Polkoordinaten abgeleiteten Werten angesehen werden.

Die Halbjahreswelle der Erregerfunktion ist als determiniert anzusehen. Im folgenden soll diese mit dem entsprechenden Bewegungsanteil der Polbewegung verglichen werden. Tab. 18 zeigt die für die Polbewegungsellipsen erhaltenen Parameter.

Tab. 18. Halbachsen (a, b) und Achsrichtung (γ_a) der Polbewegungsellipse der Halbjahreswelle

Epoche	a		b		γ_a	
	M	A	M	A	M	A
1930 - 39.9	0,0021"	0,0104"	0,0016"	0,0056"	135,0°	169,8°
1940 - 49.9	0,0040	0,0149	0,0022	0,0019	152,8	145,1
1950 - 59.9	0,0041	0,0201	0,0020	0,0040	145,7	188,6
1930 - 59.9	0,0033	0,0084	0,0019	0,0030	147,8	187,9

Die Standardabweichungen der Halbachsen betragen hier

$$\sigma_{a,b} = \pm 0,003".$$

Die Standardabweichung der Achsrichtung schwankt für diese Werte sehr stark. Im günstigsten Fall beträgt sie

$$\sigma_{\gamma_a} = \pm 10^\circ$$

und im ungünstigsten

$$\sigma_{\gamma_a} = \pm 25^\circ.$$

Ein Vergleich der für die einzelnen Zeiträume aus der meteorologischen Erregerfunktion abgeleiteten Werte zeigt, daß eine persistente Halbjahreswelle der Polbewegung zu erwarten ist. Die aus Polkoordinaten abgeleiteten Werte zeigen diese Persistenz nicht. Sie weichen sowohl hinsichtlich der Größe der Halbachsen als auch ihrer Lage stark von

den aus der meteorologischen Erregerfunktion abgeleiteten Werten ab. Es kann angenommen werden, daß die aus astronomischen Daten abgeleiteten Werte hinsichtlich dieser Frequenz stark von nichtpolaren Einflüssen gestört sind (siehe auch EMEC 1979). Ein signifikanter Zusammenhang zwischen den aus der meteorologischen Erregerfunktion berechneten und den aus Polkoordinaten abgeleiteten Daten ist hier nicht erwiesen.

6.2. Stochastische Anteile von Erregerfunktion und Polbewegung

Nachdem in 6.1. der an sich schon in dieser Arbeit vorausgesetzte Zusammenhang zwischen den Jahresperioden von Erregerfunktion und Polbewegung dargestellt wurde, sollen die stochastischen Anteile beider Bewegungsformen miteinander verglichen werden. Hierzu benutzt man den durch (68) gegebenen Zusammenhang zwischen den Energien der positiven Frequenzen von Erregerfunktion und Polbewegung,

$$(122) \quad S_u'(t) = \bar{U}^2(f) S_\psi(f).$$

In den Abb. 25, 26 und 27 sind die auf Grund vorstehender Formel berechneten Werte (ausgezogene Linien) mit den aus Polkoordinaten abgeleiteten Energien (gestrichelte Linien) dargestellt. Der Zusammenhang wird durch die in Abb. 28 enthaltenen reduzierten Differenzen

$$(123) \quad v(f) = \left\{ \bar{U}^2(f) S_\psi(f) - S_u(f) \right\} \frac{1}{\bar{U}^2(f)}$$

noch verdeutlicht. Eine enge Beziehung zwischen Polbewegung und Erregerfunktion besteht, wenn $v(f)$ möglichst klein wird. Abb. 28 zeigt, daß dies besonders für den zwischen $f = 0,6$ und $f = 1,1$ liegenden Bereich zutrifft, was auch schon in 5.3. festgestellt wurde. Die im wesentlichen negativen Werte $v(f)$ deuten an, daß die stochastischen Anteile der Erregerfunktion nicht ausreichen, um den stochastischen Anteil der Polbewegung zu erklären.

In der Nähe von $f_0 = 0,840$ übersteigen die nach (112) berechneten Energien stark die aus Polbewegung abgeleiteten. Dies ist auf die Resonanzwirkung zurückzuführen und kann nicht direkt mit den in Abb. 25 bis 27 dargestellten Energien verglichen werden, die aus den stochastischen Anteilen der Polbewegung abgeleitet wurden, da in ihnen die Energie der CHANDLER-Frequenz nicht mehr enthalten ist. In folgender Zusammenstellung werden die übertragenen Energien mit den aus Abb. 19 entnommenen Energien der CHANDLER-Frequenz verglichen.

	Obertragene Energie	Energie der CHANDLER-Frequenz
1930 - 39.9	$18,7 \cdot 10^{-4,2}$	$53,7 \cdot 10^{-4,2}$
1940 - 49.9	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$287,0 \cdot 10^{-4}$
1950 - 59.9	$12,7 \cdot 10^{-4}$	$566,1 \cdot 10^{-4}$

Nach vorstehenden Werten wird nur ein geringer Bruchteil der Energie der CHANDLER-Frequenz durch die stochastischen Anteile der meteorologischen Erregerfunktion gestützt. Bei der Diskussion dieses Ergebnisses muß jedoch beachtet werden, wie die stochastischen Anteile der Erregerfunktion definiert sind. Da die Wertereihe der Erregerfunk-

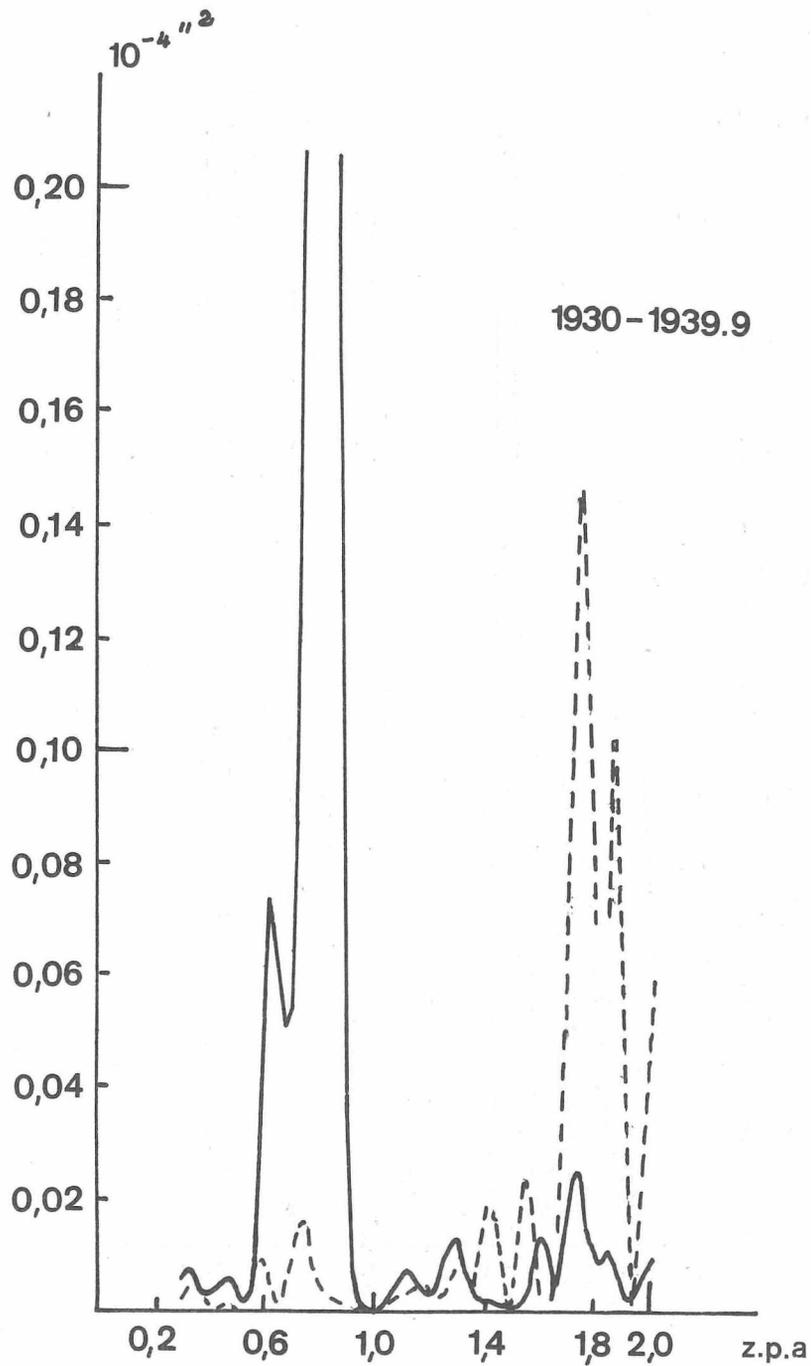


Abb. 25. Vergleich des aus meteorologischer Erregerfunktion abgeleiteten mit dem aus Polkoordinaten (gestrichelt) abgeleiteten Energiespektrum der Polbewegung (1930 - 39.9)

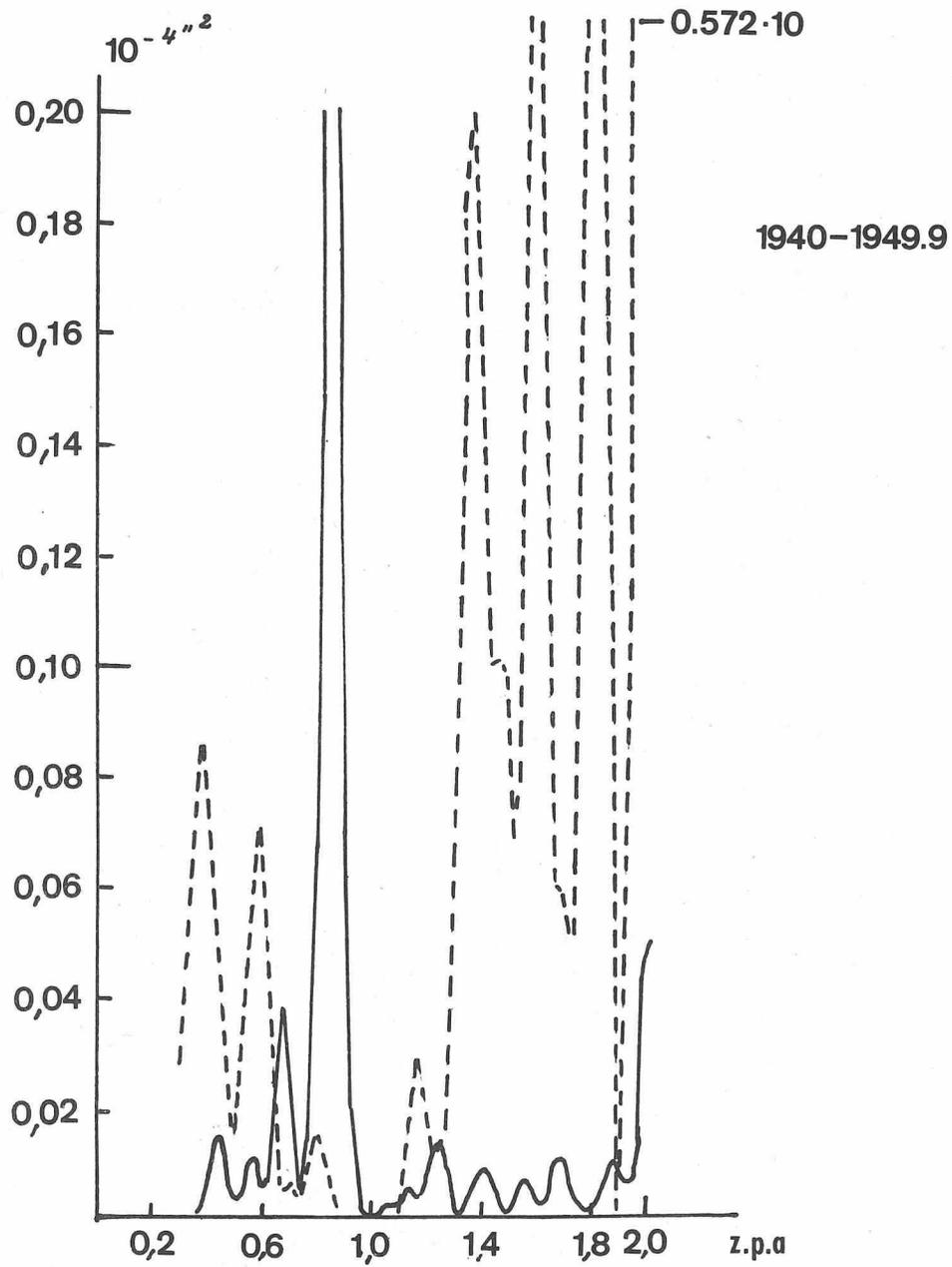


Abb. 26. Vergleich des aus meteorologischer Erregerfunktion abgeleiteten mit dem aus Polkoordinaten (gestrichelt) abgeleiteten Energiespektrums der Polbewegung (1940 - 49.9)

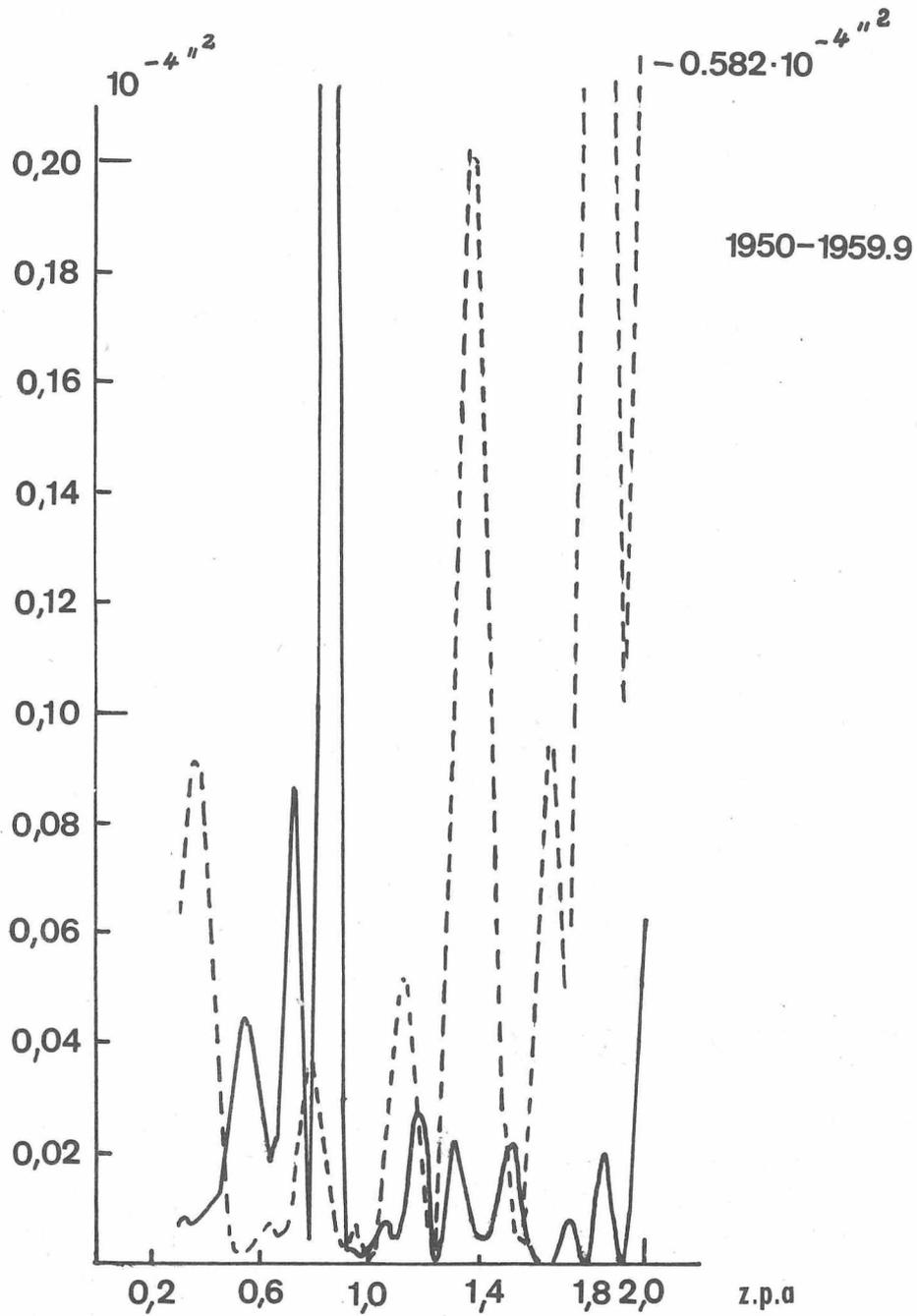


Abb. 27. Vergleich des aus meteorologischer Erregerfunktion abgeleiteten mit dem aus Polkoordinaten (gestrichelt) abgeleiteten Energiespektrum der Polbewegung (1950 - 59.9)

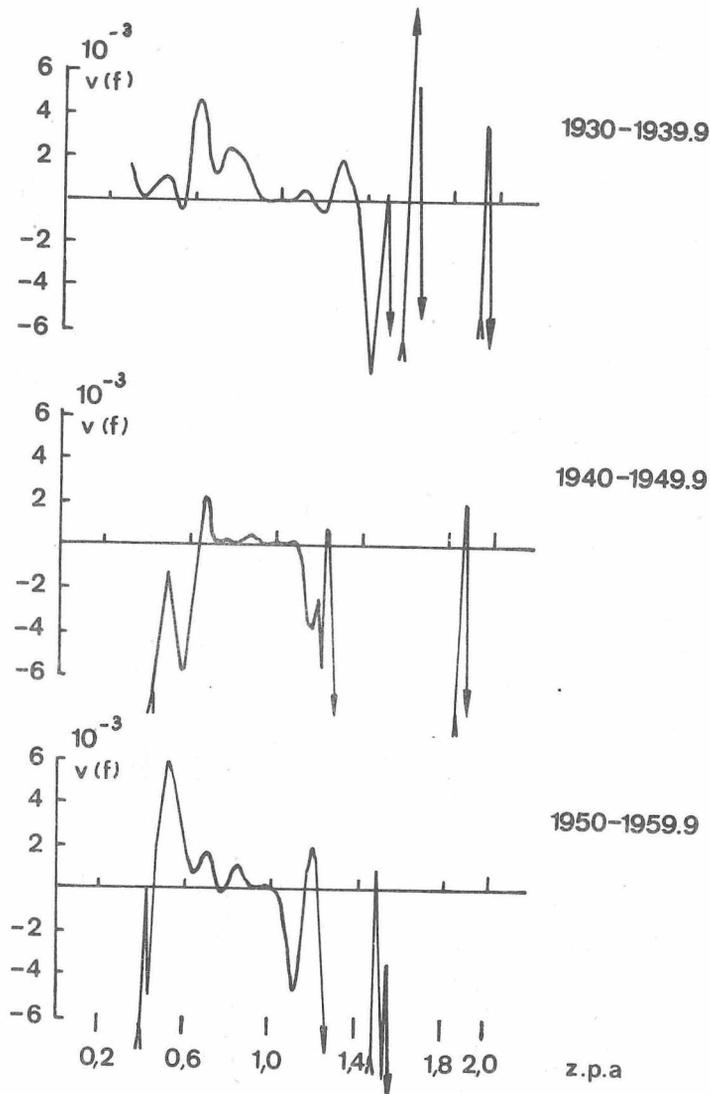


Abb. 28. Reduzierte Differenzen zwischen den aus Erregerfunktion und Polkoordinaten abgeleiteten Energiespektren

tion um die von Jahr zu Jahr hinsichtlich Amplitude und Phase variierende Jahreswelle reduziert wurde, sind in den stochastischen Anteilen die zufälligen Variationen der Parameter der Jahreswelle nicht enthalten. Diese haben nach den Ergebnissen des Abschnitts 3.4. einen nicht unbeträchtlichen Einfluß auf das Energiespektrum der Erregerfunktion. Verschiedene Autoren (siehe MUNK, Mac DONALD 1960, S. 164) sehen gerade in dieser stochastischen Variation eine Quelle zur Stützung der Energie der CHANDLER-Frequenz. Werden diese Energieanteile mit berücksichtigt, so ergibt sich:

	Übertragene Energie	Energie der CHANDLER-Frequenz
1930 - 39.9	$23,8 \cdot 10^{-4} \cdot 2$	$53,7 \cdot 10^{-4} \cdot 2$
1940 - 49.9	$120,3 \cdot 10^{-4}$	$287,0 \cdot 10^{-4}$
1950 - 59.9	$26,1 \cdot 10^{-4}$	$566,1 \cdot 10^{-4}$

Vorstehende Werte zeigen, daß der Anteil der meteorologischen Erregung der CHANDLER-Welle wesentlich größer geworden ist, jedoch noch nicht ausreicht, die Energie der CHANDLER-Frequenz voll zu stützen. Bemerkenswert ist die hohe Energiezufuhr im Zeitraum 1940 - 49.9, in dem die Amplitude der CHANDLER-Welle stark ansteigt (s. Abb. 14).

6.2.1. Ergebnisse einer Kreuzspektralanalyse zwischen Erregerfunktion und Polbewegung

Zur Stützung der Aussagen des vorstehenden Abschnitts wurde zwischen den stochastischen Anteilen der Erregerfunktion und der Polbewegung das Kreuzspektrum berechnet. Da die wesentlichsten systematischen Anteile in den Wertereihen nicht mehr enthalten sind, werden Erregerfunktion und Polbewegung als stationäre ergodische Prozesse betrachtet, d. h., das WIENER-CHINTCHIN-Theorem kann angewandt werden. Polbewegung und Erregerfunktion werden als komplexe Funktionen aufgefaßt, so daß man die Kreuzkorrelationsfunktion als komplexe Funktion

$$(124) \quad R_{u\psi}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}(t) \psi(t + \tau) dt$$

erhält ($\bar{u}(t)$ = konjugiert komplexe Größe). Es ist

$$R_{u\psi}(\tau) = R_R(\tau) + i R_J(\tau).$$

Als FOURIER-Transformierte von (124)

$$(125) \quad s_{u,\psi}(f) = \int_0^{\tau_{\max}} R_{u\psi}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$$

erhält man das Kreuzspektrum, das wiederum aus einem reellen und einem imaginären Anteil besteht.

$$s_{u,\psi}(f) = s_R(f) + i s_J(f).$$

Als Maße für die stochastische Abhängigkeit werden die Kohärenz

$$(126) \quad H(f) = \sqrt{\frac{s_R(f)^2 + s_J(f)^2}{s_u(f) \cdot s_\psi(f)}}$$

und die Phasenverschiebung

$$(127) \quad \tan \varphi(f) = \frac{s_J(f)}{s_R(f)}$$

verwendet. Nach (126) ist die Abhängigkeit zwischen ψ und u in einem bestimmten Frequenzbereich um so größer, je näher $H(f)$ dem Wert eins liegt. Um die Phasenverschiebung als Indikator für eine Abhängigkeit benutzen zu können, muß die theoretische Phasenverschiebung zwischen ψ und u im System der Polbewegung berechnet werden. Hierzu muß die komplexe Übertragungsfunktion $\bar{U}(f)$ ermittelt werden. Diese ergibt sich, wenn man in die Differentialgleichung der Polbewegung

$$\dot{u} + \lambda u = i \beta (u - \psi),$$

die Beziehung

$$u = \bar{u}(f) \psi(f) = \bar{u}(f) K e^{i2\pi f t}$$

einsetzt. Mit $f_0 = \beta/2\pi$ ergibt sich dann:

$$(128) \quad \bar{u}(f) = \frac{1}{\left(1 - \frac{f}{f_0}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 f_0^2}} \left\{ \left(1 - \frac{f}{f_0}\right) - i \frac{\lambda}{2\pi f_0} \right\} = \bar{u}(f)_R + i \bar{u}(f)_I.$$

(128) kann in der Form

$$\bar{u}(f) = |\bar{u}(f)| e^{i\varphi(f)}$$

geschrieben werden, womit man die Phasenverschiebung

$$(129) \quad \tan \varphi(f) = - \frac{\bar{u}(f)_I}{\bar{u}(f)_R} = \frac{\lambda}{2\pi(f_0 - f)}$$

erhält. Mit den nach (129) auf Grund der Parameter λ und f_0 berechneten Werten muß die nach (127) ermittelte Phasenverschiebung verglichen werden. Die Kreuzspektralanalyse wurde für den Zeitraum 1930 - 59.9 durchgeführt. Als maximale Korrelationslänge wurde $\tau_{\max} = 3a$ gewählt. In Abb. 29 sind Kohärenz und Phasenverschiebung dargestellt, die beide eine qualitative Aussage über eine Abhängigkeit zwischen Polbewegung und Erregerfunktion ermöglichen. Aus der Phasenverschiebung folgt eine mögliche Abhängigkeit in den Bereichen

$$f = 0,5 \text{ bis } 1,2 \text{ z. p. a}$$

und

$$f = 1,5 \text{ bis } 1,8 \text{ z. p. a}$$

Die Kohärenz weist im erstgenannten Bereich nur schwache Maxima auf. Dies mag darauf zurückzuführen sein, daß dieser Bereich besonders stark von Unsicherheiten in der Beseitigung der CHANDLER- und Jahreswelle beeinflusst ist, wodurch es unter Umständen zu Frequenzverschiebungen der Energiemaxima kommt. Ein stärkeres Maximum liegt bei $f = 1,2$ z. p. a vor. Im zweiten Bereich liegt ein Maximum der Kohärenz bei $f = 1,56$ z. p. a. Die von der Kohärenz angezeigte starke Abhängigkeit für die Frequenz $f = 2,0$ z. p. a wird von der Phasenverschiebung nicht bestätigt. Dies stimmt mit den in 6.1. dargestellten Ergebnissen überein.

Eine quantitative Aussage über die Beziehungen zwischen Erregerfunktion und Polbewegungen kann auf Grund der Spektren der Energiedichten dieser Funktionen gemacht werden, die im Verlauf der Kreuzspektralanalyse erhalten wurden. In den Abb. 30 und 31 sind diese dargestellt und in Abb. 32 die zugehörige Übertragungsfunktion. Ein Vergleich von Abb. 30 und 31 ergibt, daß die Energiespitzen der Polbewegung nicht auf Grund der Energiespitzen der Erregerfunktion erklärt werden können, wenn $|\bar{u}(f)|^2 < 8$ ist. Hieraus folgt, daß Energiespitzen mit Frequenzen $f > 1,2$ z. p. a nicht mehr durch die Wirkung der meteorologischen Erregerfunktion erklärt werden können.

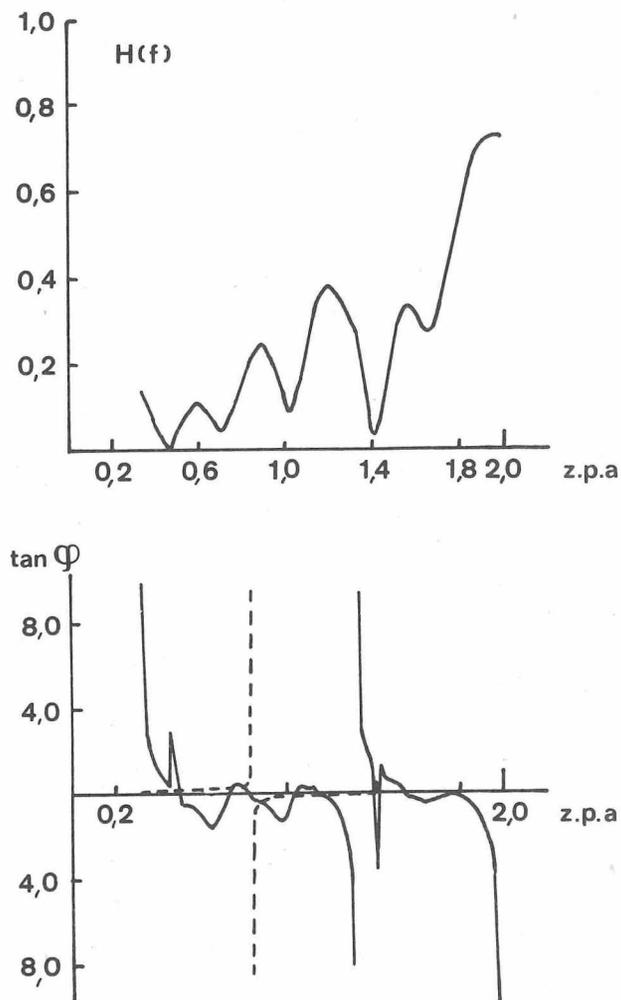


Abb. 29. Kohärenz und Phasenverschiebung zwischen Erregerfunktion und Polbewegung

Im Bereich der zweijährigen Periode treten sowohl bei der Erregerfunktion wie auch bei der Polbewegung Doppelspitzen auf, die bei folgenden Frequenzen liegen:

1. Erregerfunktion

$$f = 0,5 \text{ z. p. a.}, \quad s_{\psi} = 0,065 \cdot 10^{-4,2},$$

$$f = 0,85 \text{ z. p. a.}, \quad s_{\psi} = 0,053 \cdot 10^{-4,2},$$

2. Polbewegung

$$f = 0,39 \text{ z. p. a.}, \quad s_u = 0,63 \cdot 10^{-4,2},$$

$$f = 0,73 \text{ z. p. a.}, \quad s_u = 0,50 \cdot 10^{-4,2}.$$

Faßt man die Doppelspitzen als Anteile einer Frequenz mit variabler Amplitude auf, so muß diese der Mittelwert der Frequenzen der Doppelspitzen sein. Für die Erregerfunktion erhält man

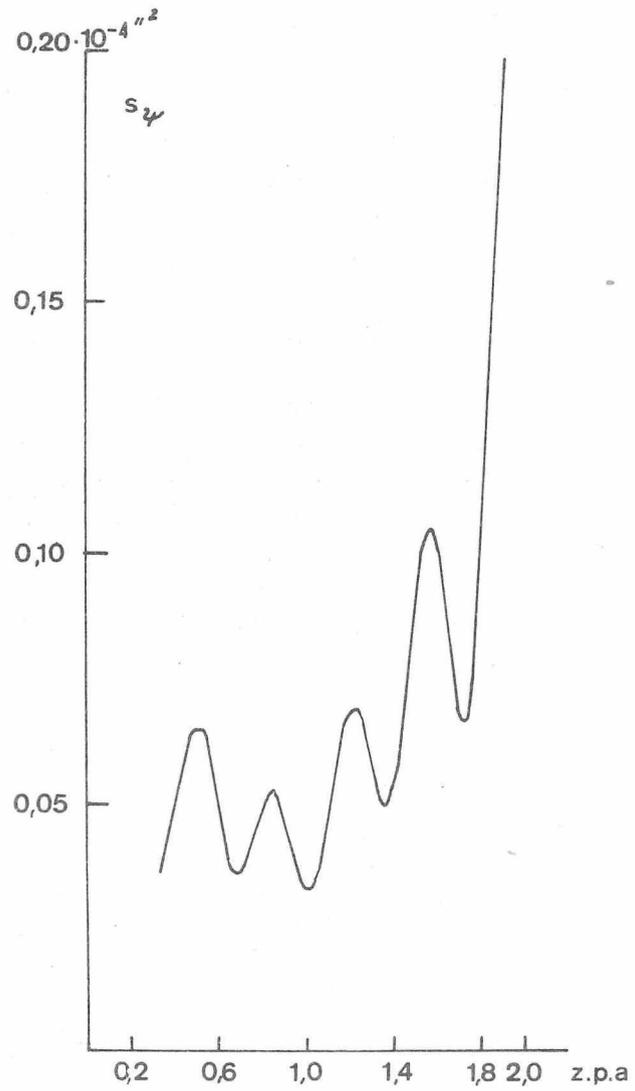


Abb. 30. Energiedichtespektrum der stochastischen Anteile der Erregerfunktion (1930 - 59.9)

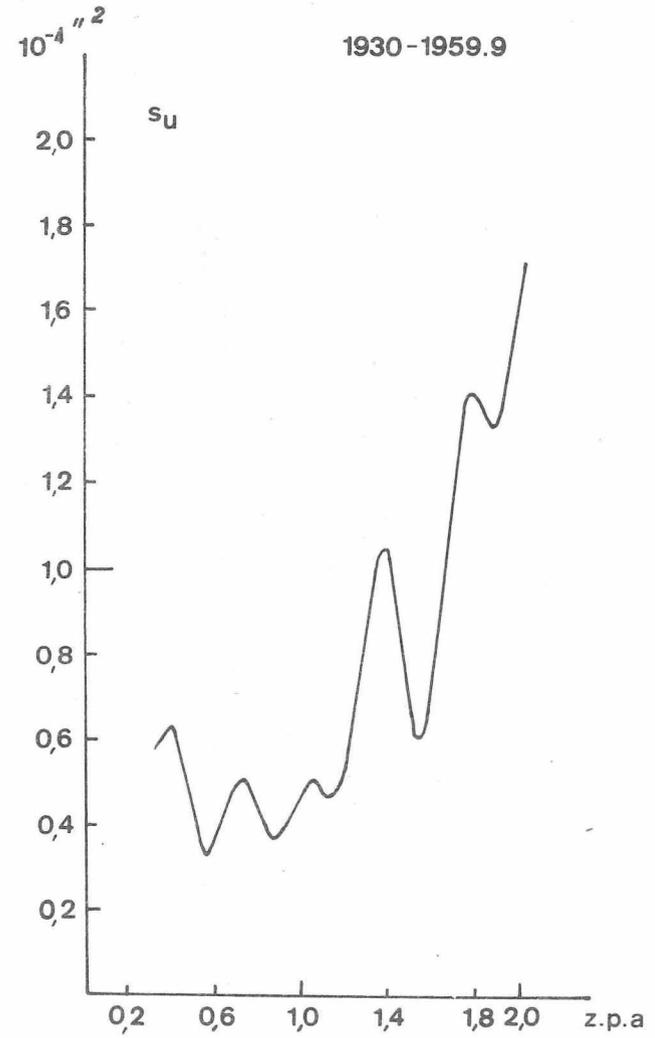


Abb. 31. Energiedichtespektren der stochastischen Anteile der Polbewegung (1930 - 59,9)

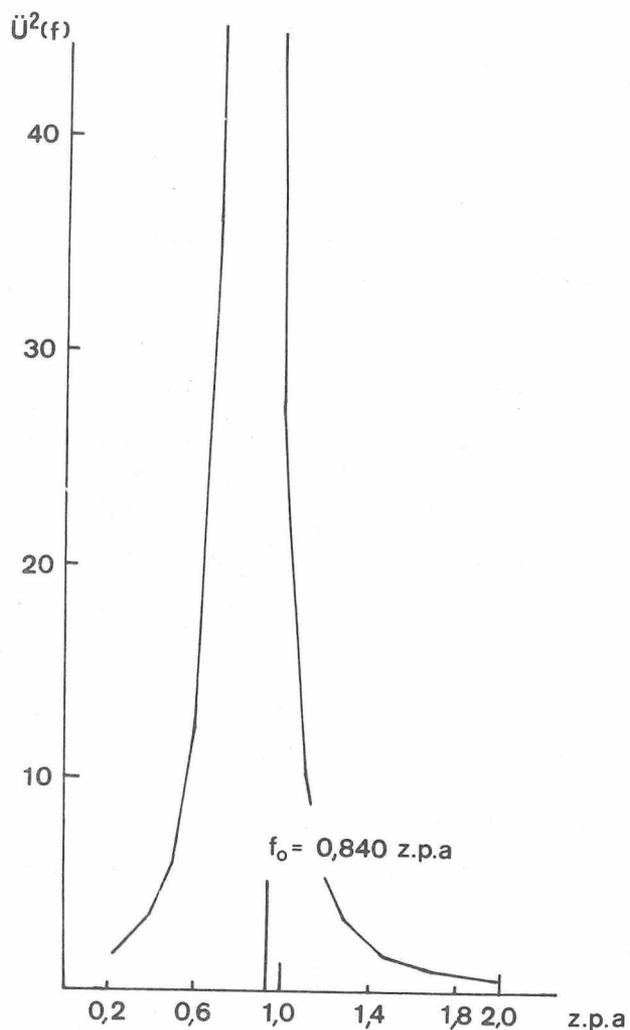


Abb. 32. Übertragungsfunktion der Polbewegung

$$f = 0,67 z. p. a \quad \text{mit} \quad s_{\psi} = 0,118 \cdot 10^{-4} \text{a}^2$$

und für die Polbewegung

$$f = 0,51 z. p. a \quad \text{mit} \quad s_u = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{a}^2.$$

Hätte das vorliegende Spektrum eine Frequenz mit variabler Amplitude streng reproduziert, so hätten die beiden Energiespitzen die gleiche Größe haben müssen, was eine Einzelspitze mit den Summen der Energiedichten der Doppelspitze entspricht. Diese Energiedichte wurde für die Einzelspitze eingeführt. In Tab. 19 ist die Energieübertragung für einen Frequenzbereich in der Nähe der Zweijahresperiode unter der Voraussetzung von $s_{\psi} = 0,118 \cdot 10^{-4} \text{a}^2$ dargestellt.

Aus nachstehender Tabelle ist zu ersehen, daß eine in der Nähe von zwei Jahren liegende Periode, die nach BÖHME (1969) existieren müßte, in der meteorologischen Erregerfunktion vorhanden ist und auf die Polbewegung übertragen wird. Nach vorstehenden Überlegungen müßte diese Periode zwischen 0,5 und 0,67 z. p. a liegen.

Tab. 19. Energieübertragung im Bereich der Zweijahresperiode

f	θ^2	$\theta^2 s_{\psi}$	s_u
0,50 z. p. a	6,2	$0,73 \cdot 10^{-4} \cdot 2$	$1,13 \cdot 10^{-4} \cdot 2$
0,55	9,0	1,06	
0,60	12,2	1,44	
0,65	24,0	2,83	

Für alle weiteren Energiespitzen der Polbewegung und Erregerfunktion ist im Mechanismus der Polbewegung keine Übertragung festzustellen.

Nach Abb. 31 sind im Spektrum der Polbewegung noch Wellen mit den Frequenzen

$$f = 1,38 \text{ z. p. a.}, \quad f = 1,76 \text{ z. p. a.}, \quad f = 2,00 \text{ z. p. a.}$$

enthalten, die nicht durch die meteorologische Erregerfunktion erklärt werden können.

Die Erregerfunktion hat Energiespitzen mit den Frequenzen (Abb. 30)

$$f = 1,22 \text{ z. p. a.}, \quad f = 1,58 \text{ z. p. a.}, \quad f = 2,00 \text{ z. p. a.},$$

deren Energie infolge der ungünstigen Energieübertragung in diesen Frequenzbereichen nicht ausreicht, um nachweisbare Perioden der Polbewegung zu erzeugen.

7. Abschließende Betrachtungen

Der Konzeption vorliegender Arbeit lagen zwei Ziele zugrunde:

1. die Bestimmung der Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung durch Eingangs-Ausgangs-Analyse
2. der Nachweis der Erregung von Perioden der Polbewegung durch die meteorologische Erregerfunktion.

Durch die Differentialgleichung der Polbewegung wurden Beziehungen zwischen periodischen Anteilen der Erregerfunktion und entsprechenden Anteilen der Polbewegung hergestellt, in denen die Parameter der Differentialgleichung - die Frequenz der freien Bewegung (CHANDLER-Frequenz) und der Dämpfungsfaktor - enthalten sind. In methodischer Hinsicht bieten sich zwei Wege zur Bestimmung dieser Parameter an, die von den Eigenschaften der periodischen Bewegungsanteile abhängen.

Für im wesentlichen determinierte Schwingungen empfiehlt sich ihre Bestimmung auf Grund der geometrischen Eigenschaften der Polkurve. Schwingungsanteile, die vor allem stochastische Eigenschaften haben, erlauben eine Bestimmung dieser Parameter nur mit Hilfe der Energieübertragungsfunktion.

Von den determinierten Schwingungen ist nur die Jahreswelle zur Bestimmung der Periode der freien Bewegung geeignet. Der Dämpfungsfaktor kann auf Grund der geometrischen Eigenschaften der Polkurve nicht ermittelt werden, da die Genauigkeit der Polkoordinaten nicht ausreicht, die Richtungswinkel der Halbachsen der Polbewegungsellipse mit der Sicherheit zu bestimmen, die zur Ermittlung dieses Parameters erforderlich wäre.

Der Dämpfungsfaktor wurde daher mit Hilfe der Übertragungsfunktion bestimmt. Die auf Grund der geometrischen Eigenschaften der Polkurve ermittelte CHANDLER-Frequenz ($f_0 = 0,840$ z. p. a) wurde als bekannter Wert in die Übertragungsfunktion eingeführt.

Zur Bestimmung des Dämpfungsfaktors wurden die Energiespektren der stochastischen Anteile von Erregerfunktion und Polbewegung im Frequenzbereich 0,7 bis 1,0 z. p. a verwendet. In diesem Bereich hat die Übertragungsfunktion besonders günstige Werte. Die Restfehler des angewandten Verfahrens zur Bestimmung des Dämpfungsfaktors bestätigten, daß im genannten Frequenzbereich zwischen den stochastischen Anteilen der Erregerfunktion und der Polbewegung ein enger Zusammenhang besteht.

Als plausibelste Werte ergaben sich für die CHANDLER-Periode

$$T_0 = 1,190 \text{ a} \pm 0,01$$

und dem Dämpfungsfaktor

$$\lambda = 0,0474 \text{ 1/a} \pm 0,005.$$

Eine zeitliche Variation der CHANDLER-Periode, wie sie scheinbar aus der harmonischen Analyse der Polbewegung folgt, konnte durch die Eingangs-Ausgangs-Analyse nicht bestätigt werden.

Mit Hilfe vorstehender Parameter wurde ein Polbewegungsmodell konstruiert, in dem die Erregung der Polbewegung durch die meteorologische Erregerfunktion untersucht wurde.

Neben einigen Perioden, deren stochastischer Charakter überwiegt, enthält die Erregerfunktion zwei gut determinierte Perioden, die Jahresperiode und die Halbjahresperiode. Beide Perioden sind auf Grund der physischen Ursachen der Luftmassenbewegungen plausibel. Während die Jahreswelle gut mit der entsprechenden Welle der Polbewegung korrespondiert, konnte dies für die Halbjahreswelle nicht nachgewiesen werden. Letzteres ist auf die schlechten Übertragungseigenschaften des Mechanismus der Polbewegung in diesem Frequenzbereich zurückzuführen. Dadurch werden nur Polbewegungsanteile erzeugt, die an der Grenze der Bestimmungsgenauigkeit liegen. Die aus Polkoordinaten abgeleitete Halbjahreswelle hat wesentlich größere Amplituden als die aus der Erregerfunktion berechnete. Ihre Phasenschwankungen müssen als stochastisch bezeichnet werden. Diese Diskrepanzen zwischen meteorologischer Erregung und Polbewegung sind im Bereich der Halbjahreswelle auf nichtpolare Einflüsse zurückzuführen, die in Unsicherheiten astronomischer Beobachtungsverfahren - z. B. infolge saisonal schwankender Refraktionsanomalien - zu suchen sind.

Von den Bewegungsanteilen, die mehr stochastische Eigenschaften haben, konnte nur für die etwa zweijährige Periode der Polbewegung der meteorologische Ursprung nachgewiesen werden. Eine Kreuzspektralanalyse bestätigte, daß besonders im Bereich 0,5 bis 1,2 z. p. a für die stochastischen Anteile gute Übertragungseigenschaften zwischen Erregerfunktion und Polbewegung bestehen. Hierdurch wird die auf Grund der Restfehler des Bestimmungsverfahrens des Dämpfungsfaktors gemachte Aussage gestützt.

Als Ergebnis einer Spektralanalyse wurden bei der Erregerfunktion noch Energiespitzen für die Frequenzen $f = 1,22$ z. p. a und $f = 1,58$ z. p. a nachgewiesen. Die Ener-

gie dieser Schwingungen reicht im Hinblick auf die schlechten Übertragungseigenschaften für diese Frequenzen nicht aus, um nachweisbare Bewegungsanteile der Polbewegung zu erzeugen. Für die Polbewegung wurden Energiespitzen bei $f = 1,38$ z. p. a und $f = 1,76$ z. p. a erhalten, denen keine Energiespitzen bei der Erregerfunktion entsprechen.

Diese Perioden sind sicher nicht meteorologischen Ursprungs. Besonders interessant ist die letztgenannte Frequenz, die etwa einer doppelten CHANDLER-Frequenz entspricht. Wie an anderer Stelle nachgewiesen wird, dürfte sie auf laterale Inhomogenitäten der rheologischen Eigenschaften des Erdkörpers zurückzuführen sein.

Literatur

- BENTON, G.; ESTOQUE, M.: Water-vapor transfer over the North American continent
J. Meteor. 11 (1954), S. 462
- BÜHME, W.: Über den etwa 2-jährigen Zyklus der allgemeinen Zirkulation und seine Ursachen
Geod. geophys. Veröff. R. II, Berlin (1969) 9
- BONDI, H.; GOLD, T.: On the damping of the free nutation of the Earth
Month. Noths roy. astron. Soc. 115 (1955), S. 42 - 46
- BUCERIUS, N.; SCHNEIDER, M.: Himmelsmechanik
Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut Mannheim (1966)
- EMEC, A. I.: Izcenije spektra izmenemij siroty v oblasti castot ot 1,4 do 2,2 cikl god i poiski bliz sutocnogo dvizenija poljusa
Astron. i Astrofiz., Kiev 38 (1979), S. 84 - 95
- HEINRICH, W.; HENNIG, K.: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme
Akademie Verlag Berlin (1977)
- HYLCKAMA, T.: The water balance of the earth
Drexel Institute of Technology, Laboratory of Climatology, Publicat. Climat. 9.57. (1956)
- JEFFREYS, H.: The Earth
5th ed Cambridge Univ. Press (1952), S. 525
- JEFFREYS, H.: The variation of latitude
Month. Noths roy. astron. Soc. 141 (1968), S. 255 - 268
- JOCHMANN, H.: Der Einfluß von Luftmassenbewegungen in der Atmosphäre auf die Polbewegung
Veröff. Zentr.-Inst. Physik Erde, Potsdam (1976) 35
- JOCHMANN, H.: Die Ermittlung der CHANDLER-Periode durch Vergleich der astronomisch bestimmten mit der aus Luftmassenbewegungen ermittelten Jahresperiode der Polbewegung
Gerl. Beitr. Geophysik, Leipzig 86 (1977) 2, S. 115 -120
- KIKUCHI, N.: Polar wobble excitation expected from the world precipitation
J. geod. Soc. of Japan 23 (1977) 2, S. 110 - 128
- KLEIN, F.; SOMMERFELD, A.: Über die Theorie des Kreisels
Leipzig: B. G. Teubner (1889)
- KORSUN, A.; YATSKIV, Ya.: O godovom dvizenii poljusow vrascenija i inercii zemli. II.
Astron. i Astrofiz. 33 (1977), S. 3 - 7
- LAMBECK, K.: Progress in geophysical aspects of the rotation of the Earth
Proc. of the 9th GEOP Conference 1978 Dpt. Geod. Sci. Rept. Ohio State Univ., Columbus Ohio (1978) 280, S. 1 - 11

- LARMOR, I.: The relation of the Earth's free precessional nutation of its resistance against tidal deformation
Proc. royal Soc. London A 82 (1909), S. 89 - 96
- LEICK, A.: The observability of the celestial pole and its nutations
Rept. Dept. Sci. Rept., Ohio State Univ., Columbus, Ohio (1978) 262
- LOVE, A. E. H.: The yielding of the Earth to disturbing forces
Proc. royal Soc. London A 82 (1909), S. 73 - 88
- MAGNUS, K.: Kreisel
Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag (1971)
- MUNK, W.; HASSAN, E.: Atmospheric excitation of the Earth's wobble
Geophys. J. royal astron. Soc., London 4 (1961), S. 339 - 358
- MUNK, W.; Mac DONALD, G. I. F.: The rotation of the Earth
Cambridge Univ. Press (1960)
- RUDNIK, PH.: The spectrum of the variation in latitude
Trans. amer. geophys. Union 37 (1956), S. 137 - 147
- SCHWEYDAR, W.: Die Bewegung der Erdachse der elastischen Erde im Erdkörper und im Raum
Astron. Nachr., Kiel 203 (1917), S. 102 - 115
- SMITH, M. L.: Wobble and nutation of the Earth
Geophys. J. royal astron. Soc. 50 (1977), S. 103 - 140
- THORNTHWAITE, S.: An approach towards a rational classification of climate
Geograph. Rev. 38 (1948), S. 55
- VICENTE, R. O.; YUMI, S.: Coordinates of the pole (1899 - 1968) referred to the conventional international origin
Publ. internat. Latitude Observ. Mizusawa 7 (1969) 1, S. 41 - 50
- VICENTE, R. O.; YUMI, S.: Revised values (1941 - 1962) of the coordinates of the Pole referred to the CIO
Publ. internat. Latitude Observ. Mizusawa 7 (1970) 2, S. 109 - 112
- WANACH, B.: Die Chandlersche und die Newcombsche Periode der Polbewegung
Veröff. Zentralbureau internat. Erdmessung, N. F., Berlin (1919) 34
- WILSON, G. R., HAUBRICH, R. A.: Meteorological excitation of the Earth's wobble
Geophys. J. royal astron. Soc. 46 (1976), S. 707 - 743
- WORLD WEATHER RECORDS
1. CLAYTON, H.; CLAYTON, I.: 1931 - 40
Smithsonian Miscellaneous Collections, Washington D. C. 105 (1947)
 2. STRAUSS, L.; REICHELDERFER, F.: 1941 - 50
U. S. Dept. Commerce, Washington D. C. (1959)
 3. CONNOR, I. T.; WHITE, R. M.: 1951 - 1959
U. S. Dept. Commerce, Washington D. C. (1968)
- YATSKIV, Ja.: CHANDLER-wobble and free diurnal nutation derived from latitude-observations
Proc. 2nd International Symposium Geodesy and Physics of the Earth. Veröff. Zentralinst. Physik Erde, Potsdam (1974), S. 143 - 149
- YUMI, S.: Polar motion in recent years.
In: Earthquake displacement fields and the rotation of the Earth
Dordrecht - Holland: D. Reidel Publ. Comp. (1970)

