

Serge Alinhac

*Université Paris-Sud, Orsay*

Patrick Gérard

*Ecole Normale Supérieure, Paris*

# Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser

S A V O I R S      A C T U E L S

---

InterEditions/Éditions du CNRS



© 1991, **InterEditions**, 7, rue de l'Estrapade, 75005 Paris.

et

**Editions du CNRS**, 1, place Aristide Briand, 92195 Meudon.

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de InterEditions.

ISBN 2-7296-0364-6

ISBN 2-222-04534-7



# Table des matières

Introduction générale	9
-----------------------	---

## CHAPITRE 0. NOTATIONS ET RAPPELS DE THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

1 Espaces de fonctions différentiables et opérateurs différentiels	13
2 Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	14
3 Convolution	16
4 Noyaux	18
5 Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$	19

## CHAPITRE I. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

1 Introduction	23
1.1 L'usage de la transformation de Fourier	23
1.2 Les opérateurs à coefficients variables	25
1.3 Les deux côtés réconciliés	27
2 Symboles	28
2.1 Définition et exemples	28
2.2 Approximation des symboles	30
2.3 Sommes asymptotiques et symboles classiques pseudo-différentiels dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	30
3 Opérateurs pseudo-différentiels dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	33
3.1 Action dans $\mathcal{S}$	33
3.2 Noyaux et adjoints	34
3.2.1 Noyaux	34
3.2.2 Adjoints	35
3.2.3 Adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel	36
4 Composition des opérateurs	38
5 Action des opérateurs pseudo-différentiels et espaces de Sobolev	39
5.1 Action sur $L^2$	39
5.2 Action sur les espaces de Sobolev	41
5.3 Inégalité de Gårding (version « faible »)	41
5.4 Inversion des opérateurs elliptiques	42

<b>6 Opérateurs dans un ouvert de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	44
6.1 Propriété pseudo-locale	44
6.2 Symboles locaux et opérateurs dans un ouvert	45
6.3 Opérateurs proprement supportés	46
<b>7 Opérateurs sur une variété</b>	47
7.1 Opérateurs pseudo-différentiels et changements de variables	47
7.2 Symbole principal et fibré cotangent	48
7.2.1 <i>Le fibré cotangent <math>T^*M</math> (quelques rappels)</i>	48
7.2.2 <i>Le symbole principal</i>	50
<b>8 Appendice</b>	51
8.1 Intégrales oscillantes	51
8.2 Démonstration des théorèmes de calcul symbolique	54
8.3 Action d'un opérateur pseudo-différentiel sur une fonction oscillante	57
<b>Commentaires sur le chapitre I</b>	61
<b>Exercices sur le chapitre I</b>	61

**CHAPITRE II. ANALYSE NON LINÉAIRE DYADIQUE.  
ANALYSE MICROLOCALE. ESTIMATIONS D'ÉNERGIE**

<b>A. Analyse non linéaire dyadique</b>	91
<b>1 Décomposition de Littlewood-Paley : propriétés générales</b>	91
1.1 La décomposition de Littlewood-Paley	91
1.2 Caractérisation des espaces de Sobolev	94
1.3 Caractérisation des espaces de Hölder	94
1.4 Injections de Sobolev	96
1.5 Inégalités de convexité	96
1.6 Opérateurs de régularisation	97
<b>2 Application à l'étude des produits et de la composition</b>	98
2.1 Estimation d'un produit de deux fonctions	98
2.2 Estimation d'une fonction composée	101
<b>B. Analyse microlocale : front d'onde et opérateurs pseudo-différentiels</b>	104
<b>1 Front d'onde d'une distribution</b>	104
1.1 Définition du front d'onde	104
1.2 Exemples. Cas des distributions de Fourier	106
<b>2 Opérateurs linéaires et front d'onde</b>	107
2.1 Un théorème général	107
2.2 Opérateurs pseudo-différentiels et front d'onde	111
<b>C. Estimations d'énergie</b>	113
<b>1 Opérateurs du premier ordre</b>	113
1.1 L'estimation d'énergie	114

1.2 Existence de solutions	115
1.3 Propagation des singularités	117
<b>2 Opérateurs d'ordre <math>m</math></b>	119
<b>Commentaires sur le chapitre II</b>	122
<b>Exercices sur le chapitre II</b>	123
<b>CHAPITRE III. THÉORÈMES DE FONCTIONS IMPLICITES</b>	
<b><i>A. Théorème des fonctions implicites et problèmes elliptiques</i></b>	139
<b>1 Rappel du théorème dans le cadre des espaces de Banach</b>	139
1.1 Le théorème d'inversion locale	139
1.2 Le théorème des fonctions implicites	141
<b>2 Quelques exemples d'équations différentielles non linéaires</b>	141
2.1 Résolubilité locale d'équations différentielles	141
2.2 Solutions périodiques d'équations non linéaires	142
2.3 Perturbation d'un problème de Dirichlet non linéaire	143
2.4 Résolubilité locale d'équations elliptiques non linéaires	144
<b><i>B. Deux exemples d'utilisation de la méthode du point fixe</i></b>	147
<b>1 Un exemple de la mécanique des fluides</b>	147
1.1 Systèmes hyperboliques symétriques quasi linéaires	147
1.2 Existence locale en temps d'une solution	148
1.3 Contrôle en « grande norme »	150
1.4 Convergence en « petite norme »	151
1.5 Régularité de la solution et conclusion	152
<b>2 Le problème du plongement isométrique</b>	152
2.1 Présentation générale	152
2.2 Réduction à un problème de point fixe	153
<b><i>C. Le théorème de Nash-Moser</i></b>	155
<b>1 Présentation générale</b>	155
<b>2 Deux exemples classiques</b>	157
2.1 Perturbation d'un champ constant sur le tore	157
2.2 L'exemple du plongement isométrique traité par la technique de Nash-Moser	160
<b>3 Estimations douces</b>	160
3.1 Applications douces	160
3.2 Quelques applications douces naturelles	161
3.3 Solutions d'équations différentielles	163
3.3.1 <i>Un calcul explicite</i>	163
3.3.2 <i>Une estimation a priori</i>	163
3.4 Retour sur les exemples classiques	164
3.5 Conclusion	165

<b>4 Le théorème de Nash-Moser</b>	165
4.1 Schéma de résolution	166
4.2 Structure de la récurrence	169
4.3 Preuve de l'hypothèse de récurrence	170
4.4 Régularité additionnelle de la solution construite	173
4.5 Conclusion et remarques	174
<b>Commentaires sur le chapitre III</b>	174
<b>Exercices sur le chapitre III</b>	175
<b>Bibliographie</b>	183
<b>Principales notations introduites</b>	185
<b>Index</b>	187

# Introduction générale

Ce cours est un exposé élémentaire destiné à des étudiants ayant effectué quatre années d'études mathématiques de niveau universitaire. On y suppose connus des éléments d'analyse fonctionnelle, d'analyse de Fourier, de théorie des distributions (en particulier l'analyse de Fourier dans  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ ). Un rappel des notations, concepts et résultats principaux utilisés dans la suite du cours (avec des références) fait l'objet du chapitre 0. En revanche, aucune connaissance en équations aux dérivées partielles n'est requise, bien que le fait d'avoir été initié au sujet ne puisse pas nuire.

Ce cours a été enseigné (sous le titre « Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser ») à l'Ecole Normale Supérieure à partir d'octobre 1986, dans le cadre du « Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées et d'Informatique », à des élèves de deuxième année.

Bien que les thèmes abordés appartiennent plutôt à la littérature de la recherche, nous nous sommes efforcés d'éviter toute discussion savante, tout « clin d'œil », toute allusion sibylline susceptibles d'ouvrir des abîmes sous les pas du lecteur. Dans chaque chapitre, est choisie et développée une certaine présentation du sujet ; le commentaire de fin de chapitre indique les sources, les variantes, certains prolongements actuels, et les connexions entre les thèmes traités.

Enfin, nous avons rassemblé de nombreux exercices, répartis en deux classes. Certains, élémentaires, sont destinés à faciliter et à contrôler l'assimilation du cours. D'autres, plus complexes, et marqués d'une étoile (\*), présentent des développements récents qui ne sont parfois publiés que dans des articles : que leurs auteurs nous pardonnent cette simplification ! Ces exercices, contrairement à ceux de certain(s) traité(s) fameux, peuvent être effectivement résolus par de vrais étudiants, comme l'expérience de l'enseignement à l'ENS l'a montré.

Nous avons souhaité que ce texte puisse être également utilisé par des chercheurs comme une introduction simple et *auto-contenue* à des sujets qui ne leur sont pas familiers.

La double destination de ces notes nous a conduit à leur garder leur brièveté, au prix parfois d'une certaine densité du texte (que nous croyons néanmoins accessible aux étudiants motivés). Nous avons pensé en particulier à de nombreux collègues de « Mathématiques Appliquées » désireux d'utiliser le théorème de Nash-Moser dans leur recherche ou de se mettre au courant de l'analyse microlocale, sans entrer dans les arcanes de la littérature spécialisée : ils pourront lire les chapitres voulus indépendamment les uns des autres.

Le choix du matériel présenté tient aux goûts personnels et aux domaines de recherche des auteurs, qui croient par ailleurs qu'on ne peut espérer résoudre certains problèmes (non linéaires) difficiles en faisant l'économie des opérateurs pseudo-différentiels.

Les auteurs reconnaissent leur dette envers de nombreux mathématiciens (cités dans les commentaires) qui les ont inspirés pour la présentation des sujets abordés, et tout particulièrement envers L. HÖRMANDER, auquel les chapitres I et III.C doivent l'essentiel de leurs contenus mathématiques. La bibliographie présentée en fin d'ouvrage indique les sources utilisées.

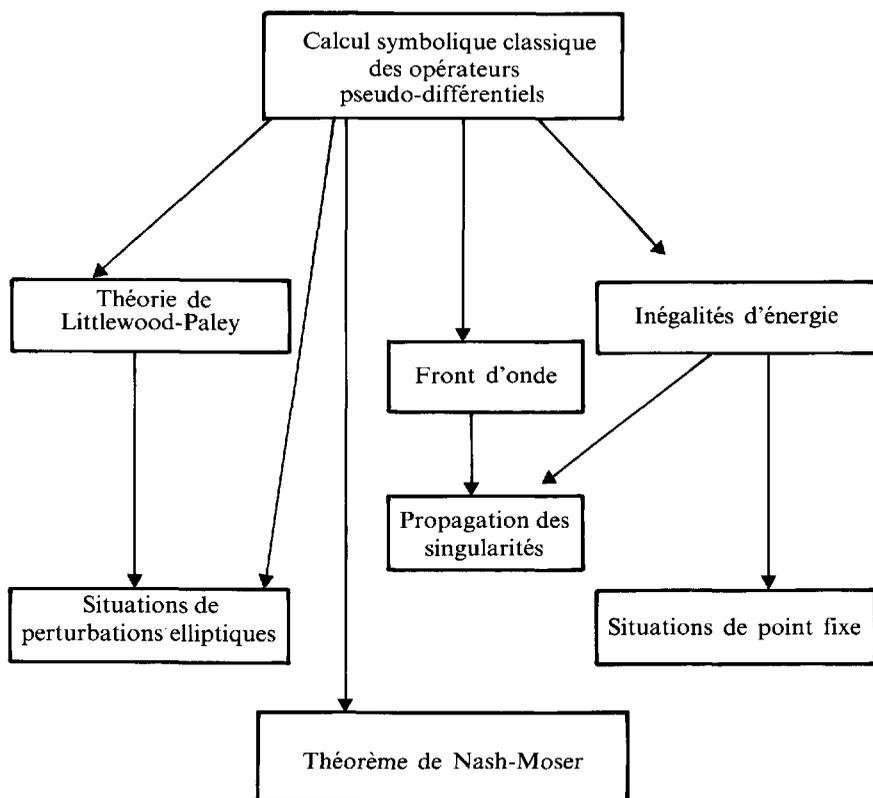
Nous avons cherché, tout en présentant des concepts importants qui sont les points de départ de nombreux développements récents, à aboutir à de vrais théorèmes : régularité elliptique microlocale, propagation des singularités, existence de solutions de systèmes hyperboliques quasi linéaires, existence de plongements isométriques, théorème de Nash-Moser. Le plan de l'ouvrage est le suivant :

— On expose au chapitre I la théorie « minimale » des opérateurs pseudo-différentiels, dans un cadre global (sur  $\mathbb{R}^n$ ) qui se révèle être agréable dans la pratique. Les points principaux en sont le concept de symbole, le calcul symbolique des opérateurs, l'action dans les espaces de Sobolev et l'invariance par changement de coordonnées. Le texte ne présente qu'assez peu d'applications concrètes, et les preuves les plus techniques sont regroupées dans l'appendice, afin de faciliter au lecteur une vue d'ensemble du sujet. Les exercices du chapitre I, particulièrement nombreux, introduisent aux multiples variantes de la théorie proposée, et en présentent quelques applications, notamment à l'analyse sur les variétés compactes.

— Le chapitre II regroupe trois thèmes. Dans la partie A est exposée la théorie de Littlewood-Paley de « décomposition dyadique » des distributions : celle-ci systématise le découpage naturel de l'espace des fréquences  $\xi$  selon leurs tailles  $|\xi|$ , lié au calcul symbolique classique du chapitre I. Cette théorie très simple permet d'obtenir rapidement d'intéressantes propriétés des fonctions composées dans les espaces de Sobolev et de Hölder. La partie B présente le concept de front d'onde et ses liens avec les opérateurs pseudo-différentiels : il s'agit cette fois du découpage conique de l'espace des fréquences  $\xi$  selon leurs directions  $\xi \in S^{n-1}$ , lié

aux homogénéités des symboles classiques. Enfin, la partie C contient un traitement des inégalités d'énergie hyperboliques pour lequel les opérateurs pseudo-différentiels se révèlent être un outil efficace. La fonction du chapitre II est donc de présenter des applications fort utiles de la « théorie sèche » du chapitre I, tout en préparant le matériel et les concepts dont on aura besoin au chapitre III.

— Le dernier chapitre discute certains problèmes de caractère non linéaire apparaissant en géométrie ou en analyse, et qui peuvent se réduire à des problèmes de perturbation. Le plan du chapitre reflète les différentes situations qui se peuvent rencontrer : situations « elliptiques » où le théorème des fonctions implicites banachique usuel suffit ; situations « de point fixe », comme celles qu'on trouve souvent dans les problèmes hyperboliques non linéaires, ou encore dans le problème du plongement isométrique ; situations enfin où la « perte de dérivées » est trop grande, nécessitant l'usage d'une technique de Nash-Moser. Le théorème de Nash-Moser repose entièrement sur l'obtention d'inégalités *a priori* « douces » (que les anglophones nomment « tame ») ; le lecteur, déjà familier avec les



inégalités *a priori* (présentées au chapitre I et au chapitre III.C), saisira le concept d'estimations « douces » par son lien évident avec la théorie de Littlewood-Paley et le calcul paradifférentiel de J.-M. BONY (chapitre II.A).

Ainsi se trouve établie l'unité profonde de ces notes, que l'on peut schématiser ainsi :

Dans cet esprit, nous avons été très heureux de prendre récemment connaissance du travail de L. HÖRMANDER [H9], qui éclaire les liens entre opérateurs pseudo-différentiels et paradifférentiels, méthodes de point fixe et théorème de Nash-Moser.

Finalement, nous tenons à remercier G. BENAROUS et J. B. BOST (Ecole Normale Supérieure, Rue d'Ulm, Paris) pour les précieuses suggestions dont ils ont bien voulu nous faire part.

## CHAPITRE 0

# Notations et rappels de théorie des distributions

Dans ce chapitre, nous introduisons les diverses notations utilisées dans le cours, tout en rappelant quelques éléments de théorie des distributions et d'analyse de Fourier, qui seront d'un usage constant. Nous supposerons donc, dans les chapitres suivants, ces notions familières au lecteur. Néanmoins, un étudiant un peu moins avancé pourra trouver les démonstrations des résultats cités plus bas dans le livre de J. CHAZARAIN et A. PIRIOU [CP] (chapitre I, paragraphes 1, 2 et 4) ou dans celui de W. RUDIN [R]. Au lecteur ignorant tout des distributions, nous conseillons la lecture préalable du cours de L. SCHWARTZ [S], tandis que l'étudiant soucieux de tester ses connaissances dans ce domaine trouvera dans l'ouvrage de C. ZUILY [Z] un grand nombre d'exercices corrigés, accompagnés de rappels de cours.

## 1 ESPACES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $k$  est un entier positif ou nul, nous désignerons par  $C^k(\Omega)$  l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . De même,  $C^\infty(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ . Ces notations s'étendent d'une part au cas où  $\Omega = M$  est une variété différentiable, d'autre part au cas où l'espace d'arrivée n'est plus  $\mathbb{C}$  mais un espace vectoriel topologique  $E$  sur  $\mathbb{R}$  : on notera alors  $C^k(\Omega, E)$ ,  $C^\infty(\Omega, E)$  les espaces correspondants.

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $C_0^k(\Omega)$  désigne le sous-espace de  $C^k(\Omega)$  dont les éléments sont nuls en dehors d'un compact de  $\Omega$ , tandis que  $C^k(\bar{\Omega})$  est formé des restrictions à  $\Omega$  d'éléments de  $C^k(\mathbb{R}^n)$ .

Pour noter les dérivées partielles d'un élément de  $C^k(\Omega)$ , nous utiliserons les *multi-indices*. Un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un

élément de  $\mathbb{N}^n$ , son *module*  $|\alpha|$  est par définition  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , et on pose  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ . Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  sera aussi notée  $\partial_{x_j}$  ou  $\partial_j$  lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Pour des raisons liées à la transformation de Fourier (voir paragraphe 5 ci-dessous), il est également utile d'introduire la notation  $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Une dérivation d'ordre plus élevé sera alors notée  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$  ou  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ . Nous utiliserons aussi cette convention pour désigner les monômes construits sur les composantes d'un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

Un *opérateur différentiel* sur  $\Omega$  est une combinaison linéaire finie de dérivations d'ordres arbitraires à coefficients dans  $C^\infty(\Omega)$ . Il est dit *d'ordre*  $m$  si les dérivations d'ordre supérieur à  $m$  n'y apparaissent pas. En d'autres termes, un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  s'écrira :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

où les  $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$  sont les coefficients de  $P$ . Sous cette forme, il est aisé de constater que  $P$  définit une application linéaire de  $C^{k+m}(\Omega)$  dans  $C^k(\Omega)$  pour tout  $k$ . Le *symbole* de  $P$  est la fonction polynomiale en  $\xi$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  par

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

tandis que son *symbole principal d'ordre*  $m$  (ou *symbole principal* si aucune confusion n'est à craindre) est la fonction homogène en  $\xi$  :

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

## 2 DISTRIBUTIONS SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$

a) On appelle *distribution* sur l'ouvert  $\Omega$  toute forme linéaire  $u$  sur  $C_0^\infty(\Omega)$  satisfaisant à la propriété de continuité suivante : pour tout compact  $K$ , il existe un entier  $m$  et une constante  $C$  tels que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{nulle en dehors de } K,$$

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

L'espace des distributions sur  $\Omega$  est noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Il contient en particulier

l'espace  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  des fonctions *localement intégrables* sur  $\Omega$ , selon l'identification suivante :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.1)$$

Un autre exemple de distribution est donné par la *masse de Dirac* en un point. Si  $x_0 \in \Omega$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , on note  $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ .

b) Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On définit  $\partial_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  par la formule :

$$\langle \partial_j u, \varphi \rangle = - \langle u, \partial_j \varphi \rangle,$$

qui, compte tenu de l'identification (2.1), prolonge bien aux distributions l'opérateur  $\partial_j$  précédemment défini sur  $C^1(\Omega)$ . De même, si  $a \in C^\infty(\Omega)$ ,  $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$  est définie par :

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle.$$

Ainsi, tout opérateur différentiel  $P = \sum a_\alpha D^\alpha$  se prolonge en une application linéaire de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dans lui-même, par la formule :

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \langle u, {}^tP\varphi \rangle,$$

avec  ${}^tP\varphi = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha \varphi)$ .

c) Si  $\Omega'$  est un ouvert contenu dans  $\Omega$ , et si  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , la *restriction*  $u|_{\Omega'}$  de  $u$  à  $\Omega'$  n'est autre que la restriction de la forme linéaire  $u$  à l'espace  $C_0^\infty(\Omega') \subset C_0^\infty(\Omega)$ . On dira alors que  $u$  est nulle (resp. de classe  $C^k$ ) sur  $\Omega'$  si  $u|_{\Omega'} = 0$  (resp.  $u|_{\Omega'}$  peut être définie par  $f \in C^k(\Omega')$  selon la formule (2.1)). Pour que cette définition soit maniable, il importe que l'on puisse reconstruire  $u$  à partir de ses restrictions sur les ouverts d'un recouvrement de  $\Omega$ . C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME DES PARTITIONS DE L'UNITÉ. Soit  $(\Omega_j)$  une famille d'ouverts de  $\Omega$  telle que  $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$ . Il existe une famille  $(\varphi_j)$  de fonctions telles que :

- i)  $\forall j, \varphi_j \in C^\infty(\Omega), \text{supp}(\varphi_j) \subset \Omega_j, 0 \leq \varphi_j \leq 1$ .
- ii) Pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ ,  $\{j, K \cap \text{supp} \varphi_j \neq \emptyset\}$  est fini.
- iii) Dans  $\Omega$ ,  $\sum_j \varphi_j = 1$ . (Cette somme est bien définie d'après ii.)

Outre les références déjà citées, le lecteur pourra se reporter à l'exercice 6.1 du chapitre I pour une démonstration du lemme ci-dessus (proposée sous l'hypothèse  $\bar{\Omega}_j$  compact dans  $\Omega$  ; le cas général en est une conséquence facile).

A l'aide de ce lemme, on montre par exemple que, si  $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$  et si  $u|_{\Omega_j} = 0$  (resp.  $u|_{\Omega_j} \in C^k$ ) pour tout  $j$ , alors  $u = 0$  (resp.  $u \in C^k(\Omega)$ ).

Ceci nous amène aux définitions suivantes : on appelle *support* de  $u$  (resp. *support singulier* de  $u$ ) le complémentaire dans  $\Omega$  des points au voisinage desquels  $u$  est nulle (resp.  $u$  est de classe  $C^\infty$ ). Le support de  $u$  est noté  $\text{supp } u$  ; le support singulier de  $u$  est noté  $\text{supp sing } u$ . Ce sont deux ensembles fermés, vérifiant  $\text{supp sing } u \subset \text{supp } u$ , et le résultat précédent se paraphrase par les équivalences :

$$\begin{aligned} u = 0 &\Leftrightarrow \text{supp } u = \emptyset \\ u \in C^\infty &\Leftrightarrow \text{supp sing } u = \emptyset . \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que si  $u \in C^0(\Omega)$ , le support de  $u$  défini ci-dessus coïncide avec l'adhérence de  $\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}$ .

L'espace des distributions à *support compact* dans  $\Omega$  est noté  $\mathcal{E}'(\Omega)$ . Il s'identifie à l'espace des formes linéaires sur  $C^\infty(\Omega)$ , continues pour la topologie définie par les semi-normes

$$\sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

$K$  parcourant les compacts de  $\Omega$  et  $m$  les entiers.

### 3 CONVOLUTION

a) Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions  $C^\infty$  à supports compacts. On pose :

$$u * v(x) = \int u(y) v(x - y) dy = \int u(x - y) v(y) dy . \quad (3.1)$$

La fonction  $u * v$  ainsi définie est  $C^\infty$  à support compact vérifiant :

$$\text{supp } (u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v . \quad (3.2)$$

On l'appelle la *convolée* des deux fonctions  $u$  et  $v$ .

On peut bien sûr définir la convolée de fonctions moins régulières. L'extension la plus naturelle concerne les fonctions sommables : si  $u$  et  $v$  appartiennent à  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $u * v$  définie par (3.1) appartient à  $L^1(\mathbb{R}^n)$  et on a :

$$\int |u * v(x)| dx \leq \int |u(x)| dx \cdot \int |v(x)| dx .$$

Néanmoins, ce n'est pas cette extension que nous utiliserons le plus

fréquemment, mais plutôt celle décrite dans les paragraphes *b)* et *d)* ci-dessous, qui concernent les cas où  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , puis où  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

*b)* Soient  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ; la formule

$$u * v(x) = \langle u, v_x \rangle, \quad \text{avec } v_x(y) = v(x - y),$$

définit sur  $\mathbb{R}^n$  une fonction  $u * v$  de classe  $C^\infty$ . Cette fonction vérifie en outre :

$$\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v \quad (3.3)$$

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v. \quad (3.4)$$

*c)* La convolution est à l'origine du très utile procédé de *régularisation*, que nous décrivons maintenant.

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , positive ou nulle d'intégrale égale à 1, et soit  $\varepsilon > 0$ ; on pose  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Alors, si  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , la famille de fonctions  $C^\infty$   $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$  converge vers  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, au sens où :

$$\forall \psi \in C_0^\infty, \quad \int u_\varepsilon(x) \psi(x) dx \rightarrow \langle u, \psi \rangle. \quad (3.5)$$

L'intérêt de ce procédé d'approximation par des fonctions régulières est que le mode de convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u$  est essentiellement décrit par la régularité de  $u$ . Ainsi, si  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  au sens des semi-normes  $\sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha v(x)|$ , où  $K$  parcourt les compacts de  $\mathbb{R}^n$ ; si

$u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ), espace des fonctions de puissance  $p$ -ième sommable,  $u_\varepsilon$  tend vers  $u$  dans  $L^p$ .

De plus, la relation (3.4) montre que le support de  $u_\varepsilon$  est arbitrairement proche de celui de  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. A l'aide d'une « troncature », on étend ainsi le procédé de régularisation aux distributions définies sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , montrant par exemple que  $C_0^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$  si  $p \in a, +\infty[$  et dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour la « topologie faible », i.e. au sens de (3.5).

*d)* Pour définir la convolution de deux distributions, on constate d'abord que, si  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int u * v(x) \varphi(x) dx = \langle u, \tilde{v} * \varphi \rangle,$$

où l'on a posé  $\tilde{v}(x) = v(-x)$ .

Après avoir étendu l'opérateur  $v \mapsto \tilde{v}$  aux distributions par :

$$\langle \tilde{v}, \varphi \rangle = \langle v, \tilde{\varphi} \rangle ,$$

on pose, pour  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{v} * \varphi \rangle .$$

On définit ainsi une distribution  $u * v$  sur  $\mathbb{R}^n$ , qui vérifie encore (3.3) et (3.4), auxquelles on peut ajouter :

$$\text{supp sing } (u * v) \subset \text{supp sing } u + \text{supp sing } v . \quad (3.6)$$

Par exemple, si  $\delta = \delta_0$  désigne la masse de Dirac à l'origine, on a, pour toute distribution  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $u * \delta = u$ . La convolution des distributions est fondamentale dans l'étude des opérateurs différentiels à coefficients constants. On en trouvera une illustration dans l'introduction du chapitre I, paragraphe 1.1, où la preuve de la relation (3.6) est également esquissée.

#### 4 NOYAUX

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . La relation :

$$\langle A_K v, u \rangle = \langle K, u \otimes v \rangle , \quad (4.1)$$

où  $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ ,  $v \in C_0^\infty(\Omega_2)$ ,  $u \otimes v(x_1, x_2) = u(x_1)v(x_2)$ , définit une application linéaire  $A_K: C_0^\infty(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , continue au sens suivant : pour tout  $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ , pour tout compact  $K$  de  $\Omega_2$ , il existe une constante  $C$  et un entier  $m$  tels que,  $\forall v \in C_0^\infty(\Omega_2)$  supportée dans  $K$ ,

$$|\langle A_K v, u \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v(x)| . \quad (4.2)$$

Lorsque  $K \in L_{\text{loc}}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , la relation (4.1) s'écrit plus familièrement :

$$A_K v(x_1) = \int K(x_1, x_2) v(x_2) dx_2 .$$

De façon générale, la distribution  $K$  est entièrement déterminée par la relation (4.1), et est appelée le *noyau* de l'opérateur  $A_K$ .

Un théorème de L. SCHWARTZ assure que tout opérateur  $A: C_0^\infty(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , continu au sens de (4.2), admet un noyau. Néanmoins, nous n'utiliserons jamais ce théorème dans la suite, car les opérateurs que nous manipulerons ont des noyaux aisément identifiables.

Par exemple, le noyau de l'opérateur différentiel  $P = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$  est la distribution  $K(x_1, x_2) = \sum a_\alpha(x_1) D^\alpha \delta(x_1 - x_2)$ , où  $\delta$  est la masse de Dirac ; le noyau de l'opérateur de convolution par la distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est  $K(x_1, x_2) = u(x_1 - x_2)$ .

La notion de noyau donne lieu à une étude plus algébrique des opérateurs. Par exemple, étant donné un opérateur  $A$  de noyau  $K$ , il est aisé de définir l'opérateur *transposé* de  $A$  (noté  ${}^tA$ ), caractérisé par :

$$\forall u \in C_0^\infty, \forall v \in C_0^\infty, \quad \langle Av, u \rangle = \langle {}^tAu, v \rangle .$$

Il suffit de prendre pour  ${}^tA$  l'opérateur de noyau

$${}^tK(x_1, x_2) = K(x_2, x_1) .$$

Le noyau permet également de contrôler les supports (et les supports singuliers). Par exemple :

$$\text{supp}(A_K v) \subset \{x_1, \exists x_2 \in \text{supp } v, (x_1, x_2) \in \text{supp } K\} .$$

On a une relation analogue pour le support singulier.

## 5 ANALYSE DE FOURIER SUR $\mathbb{R}^n$

a) On introduit d'abord l'espace  $\mathcal{S}$  des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}^n$ . C'est l'espace des fonctions  $u$ ,  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , vérifiant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < +\infty .$$

On munit l'espace  $\mathcal{S}$  des semi-normes ainsi définies, lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  parcourent  $\mathbb{N}^n$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , on pose :

$$|x| = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} .$$

*Exemple.* La fonction définie par  $u(x) = e^{-|x|^2/2}$  appartient à  $\mathcal{S}$ .

b) Soit  $u \in \mathcal{S}$ . On pose, pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x) dx, \quad (5.1)$$

où l'on a noté  $x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ .

On définit ainsi une application linéaire continue

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S}, \\ u &\mapsto \hat{u},\end{aligned}$$

appelée *transformation de Fourier*. La fonction  $\mathcal{F}u = \hat{u}$  est la *transformée de Fourier* de  $u$ .

L'opérateur  $\mathcal{F}$  possède les propriétés fondamentales suivantes (où l'on voit l'intérêt d'avoir introduit  $D_j$ ):

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi) \quad (5.2)$$

$$\widehat{\tau_y u}(\xi) = e^{iy\xi} \hat{u}(\xi) \quad (5.2')$$

où  $\tau_y u(x) = u(x + y)$

$$\widehat{x_j u}(\xi) = -D_j \hat{u}(\xi) \quad (5.3)$$

$$(e^{-ix\eta} u)^\wedge(\xi) = \tau_\eta \hat{u}(\xi). \quad (5.3')$$

c) On appelle *distribution tempérée* sur  $\mathbb{R}^n$  toute forme linéaire sur  $\mathcal{S}$ , continue pour les semi-normes définies en a). L'espace des distributions tempérées est noté  $\mathcal{S}'$ . On a en particulier  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ , et  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$  en faisant opérer  $\mathcal{S}$  sur lui-même par la formule :

$$\forall u \in \mathcal{S}, \forall v \in \mathcal{S}, \quad \langle u, v \rangle = \int u(x) v(x) dx.$$

De plus, puisque  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ , il est aisé de prouver (par régularisation) que  $\mathcal{S}$  est dense dans  $\mathcal{S}'$  (muni de la topologie de la convergence simple sur  $\mathcal{S}$ ).

Remarquons maintenant que le théorème de Fubini entraîne :

$$\forall u \in \mathcal{S}, \forall v \in \mathcal{S}, \quad \int \hat{u}(\xi) v(\xi) d\xi = \int u(x) \hat{v}(x) dx. \quad (5.4)$$

On en déduit que la formule

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \quad \text{pour } u \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}, \quad (5.5)$$

définit une application linéaire  $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ , unique prolongement continu de  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ . En particulier,  $\mathcal{F}$  satisfait encore aux relations (5.2), (5.2') et (5.3), (5.3').

On notera que la restriction de l'application  $\mathcal{F}$  à  $L^1(\mathbb{R}^n)$  est encore donnée par la formule (5.1) où, si  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{u}$  est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini. Un autre exemple est donné par la formule :

$$\hat{\delta} = 1,$$

qui découle directement des définitions.

En utilisant (5.2), on constate que  $\hat{1} = c\delta$  pour un certain  $c \in \mathbb{C}$ . On en déduit que, pour tout  $u \in \mathcal{S}$  :

$$\hat{u}(0) = \langle \delta, \hat{u} \rangle = \langle 1, \hat{u} \rangle = \langle \hat{1}, u \rangle = cu(0),$$

et l'examen d'un cas particulier (par exemple  $u(x) = e^{-|x|^2/2}$ ) conduit à  $c = (2\pi)^n$ . En utilisant l'opérateur de translation  $\tau_y$  et les formules (5.2'), (5.3'), on conclut que

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^n u(-x).$$

En d'autres termes, si  $u \in \mathcal{S}$ , la formule (5.1) équivaut à

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (5.6)$$

C'est la *formule d'inversion de Fourier*.

$\mathcal{F}$  est donc un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{S}$ , et également de  $\mathcal{S}'$  sur  $\mathcal{S}'$  en utilisant (5.5). Son inverse est  $(2\pi)^{-n} \tilde{\mathcal{F}}$ , où  $\tilde{\mathcal{F}}$  est la composée de  $\mathcal{F}$  et de la symétrie  $v \mapsto \tilde{v}$  définie sur  $\mathcal{S}'$  par :

$$\langle \tilde{v}, \varphi \rangle = \langle v, \tilde{\varphi} \rangle \quad \text{où} \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

d) La transformée de Fourier joue en outre un rôle particulièrement important vis-à-vis de l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , on note

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

le produit scalaire.

D'après (5.4) et la formule d'inversion de Fourier, on a, si  $f, g \in \mathcal{S}$ ,

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (2\pi)^n (f, g). \quad (5.7)$$

On en déduit que  $\mathcal{F}$  se prolonge en un *automorphisme* de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , tel que  $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}$  soit *unitaire*. C'est le *théorème de Plancherel*.

e) Les formules (5.2') et (5.3') permettent d'étudier le lien entre convolution et transformation de Fourier. Pour décrire ce lien, il est commode d'introduire la notion de fonction  $C^\infty$  à croissance lente. Une fonction  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dite à croissance lente si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists M_\alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, |\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{M_\alpha}.$$

Par exemple, les fonctions polynomiales sont  $C^\infty$  à croissance lente, et plus généralement, si  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{u}$  est  $C^\infty$  à croissance lente.

Si  $a$  est  $C^\infty$  à croissance lente, le produit par  $a$  définit un opérateur linéaire continu sur  $\mathcal{S}$ , donc, par dualité, se prolonge en un opérateur linéaire continu sur  $\mathcal{S}'$ . En particulier  $a \in \mathcal{S}'$ . (L'identifier à  $a \cdot 1$ .)

Enfin, si  $v \in \mathcal{S}'$  et  $\psi \in \mathcal{S}$ , la convolée  $v * \psi$  définie par

$$v * \psi(x) = \langle v, \psi_x \rangle ,$$

où  $\psi_x(y) = \psi(x - y)$  est  $C^\infty$  à croissance lente. On a alors les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \text{si } u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S}', & \quad \mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u \mathcal{F}v \\ \text{si } u \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}', & \quad \mathcal{F}(\varphi u) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}u * \mathcal{F}\varphi . \end{aligned}$$

Il existe d'autres situations où les formules ci-dessus sont vraies (faisant notamment intervenir l'espace  $L^1$ ) mais nous ne les utiliserons pas dans ce cours.

## CHAPITRE I

# Opérateurs pseudo-différentiels

Nous présentons dans ce chapitre, de façon auto-contenue, les éléments principaux d'une théorie des opérateurs pseudo-différentiels : symboles, calcul symbolique des opérateurs, action dans les espaces de Sobolev, invariance par changements de coordonnées.

## 1 INTRODUCTION

### 1.1 L'usage de la transformation de Fourier

Pour une fonction  $a(\xi) \in C^\infty$ , à croissance lente (cf. chapitre 0, paragraphe 5 e)), on note  $a(D)$  l'opérateur défini sur  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par :

$$(a(D)u)^\wedge(\xi) = a(\xi) \hat{u}(\xi).$$

La fonction  $a(\xi)$  s'appelle le *symbole* de l'opérateur  $a(D)$ . Pour  $u \in \mathcal{S}$ , la formule

$$(a(D)u)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (1.1.1)$$

par comparaison avec la formule d'inversion de Fourier :

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

montre que  $a(D)$  ne modifie le fragment  $\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}$  de « fréquence »  $\xi$  de  $u$  qu'en multipliant son « amplitude »  $\hat{u}(\xi)$  par  $a(\xi)$ .

Par ailleurs, on a la formule

$$a(D)b(D) = (ab)(D),$$

qui signifie que le symbole du composé de deux opérateurs n'est autre que le produit des symboles : on appellera « calcul symbolique » ce type de propriété, sur lequel on reviendra au paragraphe 1.3. On nommera plus tard (avec quelques restrictions supplémentaires sur la croissance de  $a(\xi)$ )  $a(D)$  un « opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants », voulant souligner par là le fait que son symbole ne dépend pas de  $x$ .

La théorie qui sera développée dans ce chapitre permettra d'associer des opérateurs  $a(x, D)$  à des symboles généraux  $a(x, \xi)$ , en sorte que le caractère de « modulation d'amplitude » de l'action de  $a(x, D)$  souligné plus haut soit préservé, et surtout qu'on dispose d'un calcul symbolique du type :

$$a(x, D) b(x, D) = (a \# b)(x, D),$$

$a \# b$  étant un certain symbole que l'on sait calculer (et qui n'est autre que  $ab$  si  $b$  est à coefficients constants). Néanmoins, la théorie rudimentaire des opérateurs à coefficients constants permet déjà d'obtenir des résultats intéressants. Soit par exemple l'opérateur :

$$P = \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2 \quad (\text{le laplacien}).$$

C'est un opérateur du type précédent de symbole :

$$a(\xi) = -|\xi|^2.$$

On peut trouver une distribution  $E$  vérifiant  $PE = \delta + \omega$  ( $\delta$  masse de Dirac en 0,  $\omega \in \mathcal{S}$ ) ; il suffit de prendre :

$$\hat{E}(\xi) = -\frac{1 - \chi(\xi)}{|\xi|^2}$$

( $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\chi = 1$  près de  $\xi = 0$ ), car

$$\widehat{PE}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{E}(\xi) = 1 - \chi(\xi).$$

Une telle distribution  $E$  est  $C^\infty$  hors de 0 ; en effet  $-\widehat{ix_j E} = \partial_{\xi_j} \hat{E}$  est homogène de degré  $-3$  pour  $|\xi|$  grand,  $\widehat{(-ix_j)^k E} = \partial_{\xi_j}^k \hat{E}$  de degré  $-2-k$ , et de même pour les dérivées de  $E$  (cf. aussi Ex. 1.1). D'autre part, si  $f \in \mathcal{E}'$ , on a

$$P(E * f) = f + \omega * f.$$

La distribution  $u = E * f$  est donc une solution approchée de l'équation

$$Pv = f,$$

avec une erreur  $\omega * f$  qui est de classe  $C^\infty$ . Notons enfin que  $\text{supp sing } u = \text{supp sing } f$ ; en effet, comme  $Pu = f + C^\infty$ ,  $f$  est  $C^\infty$  là où  $u$  l'est; d'autre part, si  $f$  est  $C^\infty$  près de  $x_0$ , on écrit

$$u = E * f = E * (\chi f) + E * (1 - \chi) f$$

( $\chi \in C_0^\infty$  valant 1 près de  $x_0$  et telle que  $\chi f \in C^\infty$ ):  $E * \chi f \in C^\infty$ , et

$$(E * (1 - \chi) f)(x) = \int E(x - y)(1 - \chi(y)) f(y) dy$$

ne fait intervenir que  $x - y$  hors de 0 (là où  $E$  est  $C^\infty$ ) si  $x$  est proche de  $x_0$ , donc  $u(x) \in C^\infty$  pour  $x$  près de  $x_0$ .

L'utilisation de  $E$  permet également de prouver que toute solution  $v$  de  $Pv = f$  est telle que :

$$\text{supp sing } v = \text{supp sing } f.$$

En effet, si  $f \in C^\infty$  près de  $x_0$ , soit  $\chi \in C_0^\infty$  valant 1 près de  $x_0$ ; alors  $P(\chi v)$  coïncide avec  $f$  près de  $x_0$  donc est de classe  $C^\infty$  près de  $x_0$ . Comme  $\chi v$  et  $P(\chi v)$  sont dans  $\mathcal{E}'$ , on a :

$$E * P(\chi v) = \chi v + \omega * \chi v \equiv \chi v \text{ mod } C^\infty$$

et le résultat précédent permet de conclure que  $\chi v \in C^\infty$  près de  $x_0$ .

Nous avons ainsi utilisé l'opérateur  $\hat{E}(D)$ , qui est aussi la convolution par  $E$ , d'abord comme un inverse à droite de  $P$  modulo  $C^\infty$  (pour obtenir une « solution approchée » de l'équation  $Pu = f$ ), puis comme un inverse à gauche de  $P$  modulo  $C^\infty$  (pour étudier la régularité des solutions de  $Pv = f$ ). Un tel opérateur est appelé une *paramétrix* de  $P$ .

Toutefois, cette façon de travailler entièrement « d'un point de vue Fourier » présente divers inconvénients : on ne peut contrôler précisément  $\text{supp } u$  et  $\text{supp sing } u$ , et il est mal commode de traiter ainsi le cas des opérateurs « à coefficients variables ».

## 1.2 Les opérateurs à coefficients variables

L'approche du paragraphe 1.1 conduirait pour un opérateur différentiel  $P = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha$  ( $a_\alpha \in \mathcal{S}$ ), à la formule

$$\widehat{Pu}(\xi) = (2\pi)^{-n} \sum \hat{a}_\alpha * (\xi^\alpha \hat{u}(\xi))$$

d'un usage peu agréable.

Il est plus habile d'utiliser la formule

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (1.2.1)$$

$$p(x, \xi) = \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

car alors rien n'oblige à prendre pour  $p(x, \xi)$  une fonction polynomiale en  $\xi$ , c'est-à-dire le symbole d'un opérateur différentiel : toute fonction « raisonnable »  $a = a(x, \xi)$  fera l'affaire, et l'opérateur correspondant sera dit « pseudo-différentiel de symbole  $a(x, \xi)$  », et noté  $a(x, D)$ , par la lettre capitale  $A$  correspondante si aucune confusion n'est à craindre.

Par « raisonnable » on entend que :

i)  $a(x, \xi)$  devra avoir un comportement de type polynomial en  $\xi$ , lorsque  $|\xi| \rightarrow +\infty$ , s'améliorant par dérivation en  $\xi$  ; c'est-à-dire que l'on aura pour un certain  $m$ ,

$$\forall \alpha, \quad |\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

ii) La variation en  $x$  de  $a(x, \xi)$  devra être assez faible, afin de pouvoir clairement préserver la distinction entre l'amplitude  $a(x, \xi)$  et la « phase »  $e^{ix\xi}$  dans l'intégrale (1.2.1). De façon précise on exigera :

$$\forall \alpha, \quad |\partial_x^\alpha a(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^m.$$

Une fonction  $C^\infty$  satisfait des propriétés du type i) et ii) sera appelée un symbole d'ordre  $m$  (cf. paragraphe 2.1 pour une définition précise). Il va de soi que les exigences i) et ii) sont susceptibles de larges modifications qui seront discutées dans les exercices du chapitre I (Ex. 2.8, 2.9, 4.12).

L'efficacité de cette approche est apparue historiquement à propos du problème d'écrire une paramétrix (cf. paragraphe 1.1) pour un opérateur différentiel  $P(x, D)$  elliptique à coefficients variables (elliptique signifie ici  $p_m(x, \xi) \neq 0$  pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \neq 0$ ). En effet, si l'on essaye une solution de la forme  $u = a(x, D)f$ , à l'équation  $Pu = f$ , on trouve :

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(x, \xi + D) a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

avec

$$p(x, \xi + D) a = p(x, \xi) a(x, \xi) + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) D^\alpha a.$$

Dans la somme ci-dessus, le comportement (lorsque  $|\xi| \rightarrow +\infty$ ) des termes successifs va en s'améliorant : si l'on choisit  $\alpha(x, \xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{p(x, \xi)}$  (car  $p(x, \xi) \neq 0$  pour  $|\xi|$  assez grand), on peut vérifier que  $a$  est un

symbole d'ordre  $-m$ , et il vient  $p(x, \xi + D) a = 1 + O(1/|\xi|) = 1 + r$ , où  $r$  est un symbole d'ordre  $-1$ . Donc  $Pu = f + Rf$ , où  $Rf$  est une fonction plus régulière que  $f$  (par exemple, si  $f \in L^2$ ,  $Rf$  et son gradient sont dans  $L^2$ ). Comme nous le verrons (paragraphe 5.4), on peut en fait affiner ce procédé pour aboutir à  $Rf \in C^\infty$ , comme au paragraphe 1.1.

L'important ici est de construire un cadre (celui des symboles et des opérateurs correspondants) où il soit possible d'inverser (approximativement) un opérateur  $P(x, D)$  (différentiel ou pseudo-différentiel, peu importe) par un opérateur  $a(x, D)$  du même type : on aura donc une algèbre d'opérateurs, de plus, l'inverse aura pour symbole essentiellement le « candidat naturel »  $a(x, \xi) = \frac{1}{p(x, \xi)}$ .

On remarquera bien que l'approximation considérée ici n'a pas lieu au sens des valeurs numériques des fonctions, mais au sens de leur régularité : une « petite erreur » est une fonction  $C^\infty$ , si grande soit-elle ! On pourrait craindre que ce trait ne limite les applications possibles de la théorie à l'étude des singularités des fonctions, dans l'esprit de la propriété prouvée au paragraphe 1.1 :

$$\text{si } \Delta v = f, \quad \text{alors } \text{supp sing } v = \text{supp sing } f.$$

En fait, il n'en est rien : on verra au chapitre II comment utiliser les opérateurs pseudo-différentiels pour établir des inégalités entre solutions et données de certains problèmes différentiels ; le caractère approximatif de la théorie se reflète dans la difficulté à préciser les valeurs numériques des constantes dans les inégalités ; néanmoins l'existence seule de telles inégalités suffit en général à prouver l'existence de solutions *exactes* des problèmes considérés (cf. chapitre II, paragraphe C.1.2.).

### 1.3 Les deux côtés réconciliés

Le fait remarquable de la théorie esquissée ici est la grande robustesse de la notion de symbole. Par exemple, le produit  $a(x, D) b(x, D)$  de deux opérateurs associés par (1.2.1) à des symboles  $a(x, \xi)$  et  $b(x, \xi)$  est bien, formellement, un opérateur de la même forme associé à une certaine fonction  $c(x, \xi)$  : le fait que  $c(x, \xi)$  soit elle-même un symbole est hautement non trivial, et constitue le cœur même de la théorie du présent chapitre (théorème 4.1). On a de plus un « calcul symbolique » au sens du paragraphe 1.1, en ceci que le symbole  $c$  s'écrit asymptotiquement (notion définie au paragraphe 2)

$$c \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a D_x^{\alpha} b,$$

le terme principal de cette somme étant  $ab$ , comme pour le cas des coefficients constants.

L'intérêt d'un tel calcul symbolique est de réduire des énoncés portant sur des opérateurs à des énoncés portant sur des fonctions : on en verra de nombreux exemples dans ce chapitre (au paragraphe 5 notamment).

Par ailleurs, une conséquence de la théorie est la « propriété pseudo-locale » suivante : pour tout opérateur pseudo-différentiel  $A$ ,

$$\text{supp sing } Au \subset \text{supp sing } u \quad (\text{comparer avec le paragraphe 1.1}).$$

Cela signifie que l'action d'un opérateur  $A$ , bien qu'elle « étale » le support de  $u$ , ne ruine cependant pas la localisation en  $x$  des *singularités* de  $u$  (un fait qui n'est nullement évident sur la formule (1.2.1)).

En affinant ceci on parvient (cf. chapitre II, section B) au concept de *front d'onde* de  $u$  (noté  $WF(u)$ ), qui est un ensemble de points  $(x, \xi)$  où  $x \in \text{supp sing } u$  tandis que  $\xi$  est une *fréquence dominante* de  $u$  près de  $x$ , et à la formule :

$$WF(Au) \subset WF(u).$$

On voit donc que le calcul pseudo-différentiel et le concept de front d'onde qui lui est lié permettent de disposer de la double information « d'un point de vue  $x$  » et « d'un point de vue Fourier » sur les fonctions que l'on considère. L'usage systématique des localisations « en  $x$  » et « en  $\xi$  » correspondantes s'appelle l'analyse microlocale, qui sera esquissée au chapitre II.A et B.

## 2 SYMBOLES

### 2.1 Définition et exemples

**DÉFINITION.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On note  $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  tels que :

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}. \quad (2.1.1)$$

On notera de plus  $S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$ .

Un élément  $a \in S^m$  est appelé *symbole* d'ordre  $m$ .

*Exemple 1.* Si  $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ , avec  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , bornée ainsi que toutes ses dérivées,  $a \in S^m$  : on dit que  $a$  est un symbole différentiel.

*Exemple 2.* Soit  $a(\xi)$  une fonction (positivement) homogène de degré  $m$  (c'est-à-dire  $\forall \lambda > 0, a(\lambda \xi) = \lambda^m a(\xi)$ ) et  $C^\infty$  pour  $\xi \neq 0$ . Si

$\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de 0, la fonction  $\tilde{a}(\xi) = (1 - \chi(\xi)) a(\xi)$  est un symbole d'ordre  $m$ .

*Exemple 3.* Soit  $p(x, \xi)$  un symbole différentiel d'ordre  $m$  défini pour  $x \in \Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons  $p$  elliptique dans  $\Omega$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0, \quad p_m(x, \xi) \neq 0.$$

Pour  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  et  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de 0, la fonction  $a(x, \xi) = \varphi(x) \frac{1 - \chi(\xi/C)}{p(x, \xi)}$  est un symbole d'ordre  $-m$  si  $C$  est assez grand (voir la discussion au paragraphe 1.3).

*Exemple 4.* Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  : la fonction  $\varphi(\xi)$  est un symbole d'ordre  $-\infty$ .

*Exemple 5.* La fonction  $a(x, \xi) = e^{ix\xi}$  n'est pas un symbole.

Notons les propriétés élémentaires suivantes :

$$\text{Si } a \in S^m, \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m - |\beta|} \quad (2.1.2)$$

$$\text{Si } a \in S^m, b \in S^{m'}, ab \in S^{m+m'} \quad (2.1.3)$$

$$\text{Si } a \in S^m, a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}). \quad (2.1.4)$$

Enfin, le lemme suivant est utile.

LEMME 2.1.1. Si  $a_1, \dots, a_k \in S^0$  et  $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k)$ , alors  $F(a_1, \dots, a_k) \in S^0$ .

*Preuve :* comme  $\text{Re } a_k$  et  $\text{Im } a_k$  sont dans  $S^0$ , on peut supposer  $a_i$  à valeurs réelles et  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ . Maintenant :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(a) = \sum \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{x_j} a_k, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} F(a) = \sum \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{\xi_j} a_k. \quad (2.1.6)$$

Nous allons démontrer par récurrence sur  $p$ , que les estimations du type (2.1.1) pour toute fonction de type  $F(a)$  sont vraies pour  $|\alpha| + |\beta| \leq p$ . Le cas  $p = 0$  est clair. Par ailleurs, pour  $|\alpha| + |\beta| \leq p + 1$ , la formule de Leibniz appliquée à (2.1.5) ou (2.1.6), et l'hypothèse de récurrence appliquée aux dérivées de  $\frac{\partial F}{\partial a_k}(a)$ , permettent de conclure.  $\square$

On prendra garde au fait qu'un symbole  $a(x, \xi)$  ( $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$ ) n'est pas un symbole en les variables  $y = (x, x'), \eta = (\xi, \xi')$  ( $x' \in \mathbb{R}^m, \xi' \in \mathbb{R}^m, m \geq 1$ ), sauf s'il est différentiel (Ex. 2.1). De nombreuses autres classes de symboles sont aussi utiles dans la pratique : quelques-unes sont introduites dans les exercices 2.8 et 2.9.

## 2.2 Approximation des symboles

Définissons sur  $S^m$  les semi-normes

$$|a|_{\alpha, \beta}^m = \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left\{ (1 + |\xi|)^{-(m - |\beta|)} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \right\}.$$

On obtient ainsi un espace complet (ce que l'on appelle précisément un espace de Fréchet), la convergence  $a_n \rightarrow a$  signifiant  $\forall \alpha, \forall \beta, |a_n - a|_{\alpha, \beta}^m \rightarrow 0$ . Il est clair que pour cette topologie, les applications définies en (2.1.2) et (2.1.3) sont continues.

Il est commode de disposer du lemme d'approximation suivant.

**LEMME 2.2.1.** *Soit  $a \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , et posons  $a_\varepsilon(x, \xi) = a(x, \varepsilon\xi)$ . Alors  $a_\varepsilon$  est borné dans  $S^0$ , et  $a_\varepsilon \rightarrow a_0$  dans  $S^m$  pour tout  $m > 0$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Preuve.* On va montrer que, pour  $0 \leq m \leq 1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  quelconques,  $|a_\varepsilon - a_0|_{\alpha, \beta}^m \leq C_{\alpha, \beta, m} \varepsilon^m$ . En effet, pour  $\beta = 0$ ,

$$\partial_x^\alpha (a_\varepsilon - a_0) = \varepsilon \xi \cdot \int_0^1 \partial_\xi \partial_x^\alpha a(x, t\varepsilon\xi) dt,$$

d'où

$$|\partial_x^\alpha (a_\varepsilon - a_0)| \leq C \int_0^{\varepsilon|\xi|} \frac{ds}{1+s} = C \text{Log}(1 + \varepsilon|\xi|),$$

et l'estimation résulte de  $\text{Log}(1+x) \leq C_m x^m$  ( $x \geq 0, m > 0$ ).

Pour  $\beta \neq 0$ ,  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_0 = 0$ , et

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon| \leq C_{\alpha, \beta} \varepsilon^{|\beta|} (1 + \varepsilon|\xi|)^{-|\beta|},$$

ce qui donne le résultat, car  $(1 + |\xi|) \geq 1 + \varepsilon|\xi|$ .

On notera que la convergence  $a_\varepsilon \rightarrow a_0$  n'a pas lieu dans  $S^0$ . □

En particulier, si  $\chi \in \mathcal{S}$ ,  $\chi = 1$  près de 0, et  $a \in S^m$ , les symboles  $a_\varepsilon(x, \xi) = \chi(\varepsilon\xi) a(x, \xi)$  sont d'ordre  $-\infty$ , et  $a_\varepsilon \rightarrow a$  dans  $S^{m'}$  pour tout  $m' > m$ .

## 2.3 Sommes asymptotiques et symboles classiques pseudo-différentiels dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

Soient  $a_j \in S^{m_j}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) pour une suite décroissante  $m_j \rightarrow -\infty$  (dans la pratique, ce sera souvent  $m_j = m - j$  ou  $m_j = m - j/2$ ). On veut donner

un sens à  $\sum_j a_j$ , étant entendu qu'on ne peut pas espérer ici une série convergente ; on écrira :

$$a \sim \sum a_j$$

(somme asymptotique au sens du comportement lorsque  $|\xi| \rightarrow +\infty$ ), pour dire que :

$$\forall k \geq 0, \quad a - \sum_{j=0}^k a_j \in S^{m_{k+1}}.$$

Pour illustrer la notion de somme asymptotique, montrons d'abord le lemme classique suivant.

**LEMME DE BOREL.** *Soit  $(b_j)$  une suite de nombres complexes. Il existe  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\forall j, f^{(j)}(0) = b_j$ , c'est-à-dire  $f(x) \sim \sum b_j \frac{x^j}{j!}$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .*

*Preuve :* soit  $\chi$  une fonction  $C^\infty$  valant 1 pour  $|x| \leq 1$  et 0 pour  $|x| \geq 2$ .

Soit  $(\lambda_j)$  une suite de nombres positifs tendant vers  $+\infty$ . Nous allons montrer que l'on peut choisir  $(\lambda_j)$  de sorte que la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!} \chi(\lambda_j x)$$

possède les propriétés de l'énoncé. Notons tout d'abord que la série ci-dessus converge simplement. Soit  $k$  un entier. Si  $j \geq k$ , la dérivée  $k$ -ième du terme de rang  $j$  vaut :

$$f_j^{(k)}(x) = \sum_{0 \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} b_j \frac{x^{j-\ell}}{(j-\ell)!} \chi^{(k-\ell)}(\lambda_j x) \lambda_j^{k-\ell}.$$

Puisque  $\lambda_j x$  est borné sur les supports de  $\chi$  et de ses dérivées, il existe une constante  $C_k$  telle que :

$$|f_j^{(k)}(x)| \leq C_k |b_j| \lambda_j^{k-j} \frac{1}{(j-k)!}.$$

Si l'on choisit  $\lambda_j \geq 1 + |b_j|$ , alors la série  $\sum_j |f_j^{(k)}(x)|$  converge uniformément pour  $x \in \mathbb{R}$ , ce qui assure que  $f$  est de classe  $C^\infty$ , et que ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, pour tout  $k$ ,

$$f^{(k)}(0) = b_k.$$

Le même lemme est vrai pour  $f = f(z)$  holomorphe dans un secteur de  $\mathbb{C}$  (Ex. 2.6).

Dans le cas d'une somme asymptotique de symboles, nous avons la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.3.** *Il existe  $a \in S^{m_0}$  tel que  $a \sim \sum a_j$ . On peut de plus imposer que  $\text{supp } a \subset \cup \text{supp } a_j$ .*

*Preuve :* c'est une adaptation du lemme précédent, l'asymptotique pour  $x \rightarrow 0$  étant remplacée par l'asymptotique pour  $1/|\xi| \rightarrow 0$ . On prend donc

$$a = \sum \tilde{a}_j = \sum (1 - \chi(\varepsilon_j \xi)) a_j,$$

avec  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de 0, et  $\varepsilon_j \searrow 0$  assez vite. Plus précisément, on exigera :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j| \leq 2^{-j} (1 + |\xi|)^{1+m_j-|\beta|} \quad \text{si } |\alpha| + |\beta| \leq j,$$

ce qui est possible compte tenu du lemme d'approximation 2.2.1 car  $1 - \chi(\varepsilon_j \xi)$  tend vers 0 dans  $S^1$ . La somme est localement finie, donc  $a \in C^\infty$ .

Pour  $\alpha, \beta, k$  donnés, on a, pour  $N \geq |\alpha| + |\beta|$  et  $m_N + 1 \leq m_{k+1}$ ,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( a - \sum_{j \leq N-1} \tilde{a}_j \right) \right| \leq (1 + |\xi|)^{m_{k+1} - |\beta|},$$

donc

$$a - \sum_{j \leq k} a_j = a - \sum_{j \leq N-1} \tilde{a}_j + \sum_{k+1 \leq j \leq N-1} \tilde{a}_j + \sum_{j \leq k} (a_j - \tilde{a}_j)$$

vérifie

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( a - \sum_{j \leq k} a_j \right) \right| \leq C_{\alpha, \beta, k} (1 + |\xi|)^{m_{k+1} - |\beta|},$$

car  $a_j - \tilde{a}_j \in S^{-\infty}$  et  $\tilde{a}_j \in S^{m_j}$ . □

Dans le même ordre d'idées, nous introduisons la définition suivante.

**DÉFINITION.** Un symbole  $a \in S^m$  est dit *classique* si  $a \sim \sum_j a_j$ , les fonctions  $a_j$  étant homogènes de degré  $m - j$  pour  $|\xi| \geq 1$ , c'est-à-dire  $a_j(x, \lambda \xi) = \lambda^{m-j} a_j(x, \xi)$  pour  $|\xi| \geq 1, \lambda \geq 1$ .

Les trois premiers exemples de symboles donnés au paragraphe 2.1 sont classiques.

Il arrive qu'on qualifie par abus de « symboles » des fonctions  $a$  qui sont  $C^\infty$  pour  $|\xi| \neq 0$  seulement : il est entendu alors qu'on doit les

tronquer convenablement près de  $\xi = 0$ , la différence entre deux symboles obtenus de cette manière étant alors dans  $\mathcal{S}^{-\infty}$ . C'est en particulier le cas pour des fonctions homogènes.

### 3 OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIEL DANS $\mathcal{S}$ ET $\mathcal{S}'$

On précise maintenant la définition mentionnée dans l'introduction.

#### 3.1 Action dans $\mathcal{S}$

PROPOSITION 3.1. Si  $a \in S^m$  et  $u \in \mathcal{S}$ , la formule

$$\text{Op} (a) u(x) = (2 \pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

définit une fonction de  $\mathcal{S}$ , et l'application

$$(a, u) \mapsto \text{Op} (a) u$$

est continue. L'application linéaire  $\text{Op}$  ainsi définie de  $S^m$  dans les opérateurs linéaires de  $\mathcal{S}$  est injective, et satisfait aux relations :

$$\begin{cases} [\text{Op} (a), D_j] = i \text{Op} (\partial_{x_j} a), \\ [\text{Op} (a), x_j] = -i \text{Op} (\partial_{\xi_j} a), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $x_j$  désigne la multiplication par la fonction  $x \mapsto x_j$ .

*Preuve :* on a d'abord, comme  $\hat{u} \in \mathcal{S}$  et  $a \in S^m$

$$\begin{aligned} |\text{Op} (a) u(x)| &\leq (2 \pi)^{-n} (\sup |a(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{-m}) \times \\ &\quad \times \int (1 + |\xi|)^m |\hat{u}(\xi)| d\xi, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\text{Op} (a) u$  est (continue et) bornée.

Les relations (3.1.1) sont immédiates par intégration par parties. Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{Op} (a) D_j u(x) &= (2 \pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{D_j u}(\xi) d\xi \\ &= (2 \pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \xi_j \hat{u}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} D_j(\text{Op} (a) u)(x) &= \\ &= -i \left[ (2 \pi)^{-n} \int e^{ix\xi} i \xi_j a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi + \text{Op} (\partial_{x_j} a) u(x) \right], \end{aligned}$$

d'où la première formule de (3.1.1). Ces formules impliquent entre autres que  $x^\alpha D^\beta (\text{Op}(a)u)$  est une combinaison linéaire de termes :

$$\text{Op}(\partial_\xi^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} a)(x^{\alpha''} D^{\beta''} u), \text{ avec } \alpha' + \alpha'' = \alpha, \beta' + \beta'' = \beta;$$

donc  $x^\alpha D^\beta (\text{Op}(a)u)$  est bornée par le produit d'une semi-norme de  $u$  dans  $\mathcal{S}$  par une semi-norme de  $a$  dans  $S^m$ , ce qui est la continuité annoncée.

Finalement, pour montrer que  $\text{Op}$  est injective, supposons que, pour tout  $u \in \mathcal{S}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on ait :

$$\int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi = 0.$$

Fixant alors  $x$ , on constate que la fonction  $b$  définie par

$$b(\xi) = \frac{a(x, \xi)}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2}}}$$

appartient à  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et est orthogonale à toutes les fonctions de la forme

$$v(\xi) = e^{-ix\xi} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2}} \overline{\hat{u}(\xi)};$$

lorsque  $u$  décrit  $\mathcal{S}$ ,  $v$  décrit  $\mathcal{S}$  donc  $b = 0$  par densité de  $\mathcal{S}$  dans  $L^2$ .  $\square$

**DÉFINITION.** Pour  $a \in S^m$ , l'opérateur  $\text{Op}(a)$  est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $a$ . On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel est d'ordre  $m$  si son symbole appartient à  $S^m$ .

**NOTATION.** Par analogie avec les opérateurs différentiels (voir la formule (1.2.1)), on note souvent  $\text{Op}(a) = a(x, D)$ . Si aucune confusion n'est à craindre, on désignera parfois aussi un opérateur pseudo-différentiel par la lettre capitale correspondant à son symbole ; ainsi  $A = \text{Op}(a)$ .

## 3.2 Noyaux et adjoints

### 3.2.1 Noyaux

Soit d'abord  $a \in S^{-\infty}$ . Pour  $u \in \mathcal{S}$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{Op}(a)u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) d\xi \int e^{-iy\xi} u(y) dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int u(y) dy \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Le noyau  $K$  de l'opérateur  $\text{Op}(a)$  est donc donné par

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) d\xi. \quad (3.2.1)$$

Lorsque  $a$  appartient à  $S^m$ , cette formule se prolonge suivant

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} (\mathcal{F}_\xi a)(x, y-x) \quad (3.2.2)$$

où  $\mathcal{F}_\xi a$  désigne la transformée de Fourier de  $a$  par rapport à la variable  $\xi$ , dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ . La formule d'inversion de Fourier donne alors :

$$a(x, \xi) = \mathcal{F}_{y \rightarrow \xi}[K(x, x-y)]. \quad (3.2.2')$$

Les deux formules (3.2.2) et (3.2.2') établissent une bijection dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  entre symboles et noyaux d'opérateurs. Bien entendu, si  $a$  était seulement dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , l'opérateur correspondant appliquerait  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}'$ , et non  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  comme le montre la proposition 3.1. On en déduit que  $K$  jouit de propriétés supplémentaires qui le caractérisent parmi les distributions tempérées comme noyau d'un opérateur pseudo-différentiel (cf. Ex. 3.1 et 3.2). Nous ne les utiliserons pas dans ce cours.

### 3.2.2 Adjoint

Soit  $A$  un opérateur quelconque de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ . On cherche un opérateur  $A^*$  de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{S}, \forall v \in \mathcal{S}, \quad (Au, v) = (u, A^*v).$$

Notons que, par un argument simple de densité déjà rencontré, si  $A^*$  existe, il est unique ;  $A^*$  est alors appelé l'*adjoint* de  $A$ .

L'existence de  $A^*$  permet de définir  $A : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  par la formule

$$\forall u \in \mathcal{S}', \forall v \in \mathcal{S}, \quad (Au, v) = (u, A^*v),$$

étant entendu que, si  $u \in \mathcal{S}'$  et  $v \in \mathcal{S}$ ,  $(u, v)$  désigne  $\langle u, \bar{v} \rangle$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant le crochet de dualité : si l'on préfère, on aura donc

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, \overline{A^*v} \rangle. \quad (3.2.3)$$

Ce type de manipulation a notamment été utilisé pour définir la transformation de Fourier sur  $\mathcal{S}'$ , puisque l'on a

$$\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}.$$

Étudions maintenant ces problèmes pour deux exemples simples d'opérateurs pseudo-différentiels :

a) Si  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$  est un opérateur différentiel à coefficients  $C^\infty$  à croissance lente, on a, pour toutes fonctions  $u, v$  dans  $\mathcal{S}$

$$(Pu, v) = (u, P^* v),$$

où  $P^* v = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha(\bar{a}_\alpha v)$ .

En effet,  $(au, v) = (u, \bar{a}v)$  et

$$\begin{aligned} (D_j u, v) &= \int D_j u \bar{v} \, dx = -i \int \partial_j u \bar{v} \, dx \\ &= i \int u \partial_j \bar{v} \, dx = \int u \overline{D_j v} \, dx = (u, D_j v). \end{aligned}$$

$P^*$  est donc un opérateur différentiel à coefficients  $C^\infty$  à croissance lente. Remarquons que son symbole principal est simplement le *conjugué* du symbole principal de  $P$ .

b) Soit  $a(D)$  un opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants (i.e. à symbole  $a$  indépendant de  $x$ ). On a, pour  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{S}$ ,

$$(a(D)u, v) = (2\pi)^{-n} (a\hat{u}, \hat{v}) = (2\pi)^{-n} (\hat{u}, \bar{a}\hat{v}) = (u, \bar{a}(D)v).$$

Ainsi  $a(D)^* = \bar{a}(D)$ .

Dans les deux cas a) et b), l'adjoint de l'opérateur pseudo-différentiel considéré est un opérateur pseudo-différentiel de même ordre. Le fait est vrai en général, mais sera assez long à prouver.

Pour terminer, observons que, si  $A^*$  existe, son noyau  $K^*$  s'exprime aisément à l'aide du noyau  $K$  de  $A$ . En effet, d'après la définition du noyau d'un opérateur et la formule (3.2.3), on a :

$$\begin{aligned} \langle K(x, y), u(y)v(x) \rangle &= \langle Au, v \rangle = \langle u, \overline{A^*v} \rangle \\ &= \langle \bar{u}, A^*v \rangle \\ &= \langle \overline{K^*(y, x)}, \bar{v}(x)\bar{u}(y) \rangle. \end{aligned}$$

Finalement

$$K^*(y, x) = \overline{K(x, y)}. \quad (3.2.4)$$

### 3.2.3 Adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel

Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel de symbole  $a \in S^m$ . On se propose de déterminer, s'il existe, l'adjoint de  $A$ . Pour cela, conformément

aux deux sections précédentes, il suffit de vérifier que, si  $K$  est le noyau de  $a$  (donné par la formule (3.2.2)), l'opérateur de noyau  $K^*$  donné par (3.2.4) envoie  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ . Nous allons en fait montrer qu'il s'agit d'un opérateur pseudo-différentiel. Pour cela, il nous faut montrer que la distribution  $a^*$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  correspondant à  $K^*$  par (3.2.2') est un symbole. Pour établir la formule donnant  $a^*$  en fonction de  $a$ , il est plus commode de supposer  $a$  (et donc  $a^*$ ) dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ , puis de prolonger par continuité à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , en vertu de la continuité des opérations (3.2.2), (3.2.2') et (3.2.4). Il vient :

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)} = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} \overline{a(y, \xi)} d\xi$$

et

$$\begin{aligned} a^*(x, \xi) &= \int K^*(x, x-y) e^{-iy\xi} dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{iy(\eta-\xi)} \bar{a}(x-y, \eta) dy d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\eta} \bar{a}(x-y, \xi-\eta) dy d\eta. \end{aligned}$$

La correspondance  $a \rightarrow a^*$  est donc une convolution avec l'exponentielle oscillante  $(2\pi)^{-n} e^{-iy\eta}$ . Il est en fait aisé de vérifier directement que cette opération envoie  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , car (voir Ex. 4.9.a) la transformée de Fourier en  $(x, \xi)$  de  $(2\pi)^{-n} \exp(-ix\xi)$  n'est autre que  $\exp(i\hat{x}\hat{\xi})$ , qui est une fonction  $C^\infty$  à croissance lente, donc un multiplicateur de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ . Le point crucial est donné par le théorème suivant qui est un des deux résultats fondamentaux du calcul symbolique.

**THÉORÈME 3.2.3.** *Si  $a \in S^m$ ,  $a^* \in S^m$  et*

$$a^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} \bar{a}(x, \xi).$$

*En particulier, si  $A = \text{Op}(a)$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$ ,  $A^* = \text{Op}(a^*)$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$ , et par conséquent  $A$  s'étend en un opérateur de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .*

La preuve du théorème repose sur des estimations assez délicates ; bien qu'on soit là au cœur du sujet, les détails peuvent être négligés par l'utilisateur pressé, et c'est pourquoi nous les présentons en appendice. (Voir aussi l'autre preuve proposée dans l'exercice 4.11).

#### 4 COMPOSITION DES OPÉRATEURS

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux opérateurs pseudo-différentiels. On a, pour  $u \in \mathcal{S}$ ,

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a_1(x, \xi) \widehat{A_2 u}(\xi) d\xi$$

et

$$\widehat{A_2 u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy(\xi - \eta)} a_2(y, \eta) \hat{u}(\eta) dy d\eta,$$

donc

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\eta + i\xi(x-y)} a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \hat{u}(\eta) d\xi d\eta dy;$$

l'opérateur  $A_1 A_2$  égale formellement  $B$  où

$$b(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i(x-y)(\xi - \eta)} a_1(x, \eta) a_2(y, \xi) dy d\eta. \quad (4.1)$$

L'intégrale qui définit  $b$  est, exactement comme au paragraphe 3.2.3, une convolution en les variables  $(y, \eta)$  (à  $(x, \xi)$  fixés). La même preuve qu'au paragraphe 3.2.3 donne le second théorème fondamental du calcul symbolique.

**THÉORÈME 4.1.** *Si  $a_1 \in S^{m_1}$ ,  $a_2 \in S^{m_2}$ , on a  $\text{Op}(a_1) \text{Op}(a_2) = \text{Op}(b)$ , où  $b = a_1 \# a_2 \in S^{m_1 + m_2}$  est donné par (4.1), et  $b \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a_1 D_x^{\alpha} a_2$ .*

Bien entendu dans le cas où  $a_1$  et  $a_2$  sont différentiels, on peut vérifier le théorème, à l'aide de la formule de Leibniz, la formule asymptotique étant alors exacte (Ex. 4.1).

**COROLLAIRE 4.1.** *Si  $a_1 \in S^{m_1}$  et  $a_2 \in S^{m_2}$ , le crochet  $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$  des opérateurs  $A_1$  et  $A_2$  est un opérateur d'ordre  $m_1 + m_2 - 1$ , dont le symbole  $b$  vaut*

$$b = \frac{1}{i} \{a_1, a_2\} \text{ mod } S^{m_1 + m_2 - 2}.$$

On a noté ici  $\{f, g\} = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right)$  le « crochet de Poisson » de deux fonctions  $f(x, \xi)$ ,  $g(x, \xi)$ .

*Preuve du corollaire 4.1 :* les symboles  $b_1$  et  $b_2$  de  $A_1 A_2$  et de  $A_2 A_1$  vérifient :

$$b_1 \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a_1 D_x^{\alpha} a_2,$$

$$b_2 \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a_2 D_x^{\alpha} a_1.$$

Donc, pour  $b = b_1 - b_2$ ,

$$b = \sum_j \left( \frac{\partial a_1}{\partial \xi_j} D_j a_2 - \frac{\partial a_2}{\partial \xi_j} D_j a_1 \right) \text{ mod } S^{m_1+m_2-2}$$

$$= \frac{1}{i} \{a_1, a_2\} \text{ mod } S^{m_1+m_2-2}.$$

Nous verrons au paragraphe 6 comment le symbole principal d'un opérateur  $A$  sur une variété  $M$  est défini comme une fonction sur le *fibré cotangent*  $T^*M$  de cette variété, le crochet de Poisson de deux telles fonctions étant intrinsèquement défini (c'est-à-dire sans référence à un choix de coordonnées locales  $(x, \xi)$ ).

Le théorème 4.1 constitue ce qu'on a appelé dans l'introduction le « calcul symbolique » (une autre preuve est offerte dans les exercices 4.10 et 4.11).

## 5 ACTION DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ET ESPACES DE SOBOLEV

### 5.1 Action sur $L^2$

THÉORÈME 5.1. *Si  $a \in S^0$ ,  $a(x, D)$  est un endomorphisme de  $L^2$ .*

Remarquons que ce résultat fondamental est évident si le symbole  $a(x, \xi)$  dépend de  $x$  seul ou de  $\xi$  seul, ou encore si  $a(x, \xi) = b(x) c(\xi)$  : la norme de l'opérateur est aussi, dans ces cas particuliers, aisément calculée en fonction de  $\sup |a|$ .

Le cas général en revanche est beaucoup plus compliqué (ainsi que le calcul de la norme), et nécessite le contrôle d'un certain nombre de dérivées du symbole  $a$ .

Nous donnons ici une preuve utilisant le calcul symbolique ; d'autres variantes sont examinées en exercice (Ex. 5.2 et 5.3).

Nous noterons dorénavant  $|u|_0$  la norme de  $u$  dans  $L^2$ .

*Preuve :* l'idée est la suivante : comme  $|Au|_0^2 = (Au, Au) = (A^* Au, u)$ , l'inégalité  $|Au|_0^2 \leq M |u|_0^2$  s'écrit aussi  $(Bu, u) \geq 0$ , où  $B = M - A^* A$  est auto-adjoint d'ordre 0. Pour prouver

que  $B$  vérifie  $(Bu, u) \geq 0$  pour  $M$  assez grand, le plus simple est encore de mettre  $B$  sous la forme  $B = C^* C$ : c'est ce que l'on fait.

a) Choisissons  $M \geq 2 \sup |a(x, \xi)|^2$ , et prenons :

$$c(x, \xi) = (M - |a(x, \xi)|^2)^{1/2}.$$

D'après le lemme 2.1.1,  $c \in S^0$ ; le théorème 4.1. implique  $C^* C = M - A^* A + R$ ,  $r \in S^{-1}$  (comme d'habitude, notre programme n'est réalisé qu'approximativement). Donc  $|Au|_0^2 \leq M|u|_0^2 + (Ru, u)$ .

b) Il faut maintenant majorer l'« erreur »  $(Ru, u)$ . Supposons  $r \in S^{-k}$  avec  $k \geq 1$ : comme  $|Ru|_0^2 = (R^* Ru, u)$ ,  $R$  sera continu dans  $L^2$  si  $R^* R$  l'est, avec  $\|R\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|R^* R\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1/2}$ . Or (artifice!)  $r^* \# r \in S^{-2k}$ ; en itérant l'argument, on voit qu'il suffit de prouver que, pour un  $k$  assez grand, tout opérateur de symbole  $r \in S^{-k}$  est continu dans  $L^2$ .

c) Prenons  $k = n + 1$  (dans  $\mathbb{R}^n$ ): le noyau  $K(x, y)$  de  $a(x, D)$  est alors une fonction continue et bornée, car d'après (3.2.2),

$$|K(x, y)| \leq (2\pi)^{-n} \int |a(x, \xi)| d\xi.$$

De plus,  $(x_j - y_j) K(x, y)$  est le noyau de  $i \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(x, D)$ , qui est « encore meilleur » que  $a$ ; en itérant  $(n + 1)$ -fois, on trouve finalement  $(1 + |x - y|^{n+1})|K(x, y)| \leq \text{Cte}$ . La décroissance de  $K$  à l'infini implique en particulier :

$$\int |K(x, y)| dy \leq C, \quad \int |K(x, y)| dx \leq C. \quad (5.1.1)$$

d) C'est un résultat classique qu'un opérateur dont le noyau continu satisfait (5.1.1) est borné sur  $L^2$  (de norme au plus  $C$ ): en effet,

$$\begin{aligned} |Ku(x)|^2 &\leq \int |K(x, y)| |u(y)|^2 dy \int |K(x, y)| dy \\ &\leq C \int |K(x, y)| |u(y)|^2 dy \end{aligned}$$

d'où

$$\int |Ku(x)|^2 dx \leq C \int |u(y)|^2 dy \int |K(x, y)| dx \leq C^2 \int |u(y)|^2 dy.$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

## 5.2 Action sur les espaces de Sobolev

Rappelons d'abord la définition de ces espaces.

DÉFINITION. Pour  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}', \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

Si l'on préfère, l'opérateur  $(1 + |D|^2)^{s/2}$  est une isométrie de  $H^s$  sur  $L^2$ . La norme sera notée  $|\cdot|_s$  avec :

$$|u|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Lorsque  $s \in \mathbb{N}$ , il est facile de voir (Ex. 5.6) que :

$$H^s = \{u \in L^2, \forall \alpha, |\alpha| \leq s, \partial^\alpha u \in L^2\},$$

et bien sûr  $H^0 = L^2$ .

La raison pour laquelle ces espaces jouent un si grand rôle est qu'ils constituent une famille construite sur  $L^2$  permettant de mesurer la régularité des fonctions (de même que les classes de Hölder  $C^\alpha$ , qui sont, elles, construites sur  $L^\infty$ ).

Le théorème 5.1 et le théorème 4.1 donnent immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2. Si  $a \in S^m$ , l'opérateur  $a(x, D)$  applique, pour tout  $s$ ,  $H^s$  dans  $H^{s-m}$ .

## 5.3 Inégalité de Gårding (version « faible »)

Si  $a = a(D)$  est à coefficients constants, et  $a(\xi) \geq 0$ , l'opérateur  $a(D)$  est « positif » en ce sens que  $\forall u \in \mathcal{S}$ ,  $(a(D)u, u) \geq 0$ .

Dans le cas général, il existe toute une famille d'« inégalités de Gårding » qui relie la positivité du symbole à celle de l'opérateur, avec une « erreur » plus ou moins importante.

L'inégalité de Gårding « forte » est la suivante : si  $a \in S^{2m+1}$  ( $m \in \mathbb{R}$ ),  $\operatorname{Re} a \geq 0$ , alors  $\operatorname{Re} (a(x, D)u, u) \geq -C|u|_{H^m}^2$ . Autrement dit, on a la minoration qu'on aurait sans hypothèse de signe sur le symbole  $a$  si celui-ci était d'ordre  $2m$  : pour cette raison, cette inégalité est appelée aussi « inégalité de Gårding avec gain d'une dérivée ». Nous nous contenterons ici de prouver l'inégalité de Gårding « faible ».

PROPOSITION 5.3. Si  $a \in S^{2m}$  et, pour  $|\xi| \geq R$  et  $c > 0$ ,  $\operatorname{Re} a(x, \xi) \geq c(1 + |\xi|^2)^m$ , alors, pour tout  $N$ , il existe une constante  $C_N$  telle que :

$$\operatorname{Re} (Au, u) + C_N |u|_{-N}^2 \geq \frac{c}{2} |u|_m^2.$$

*Preuve :* on a d'abord  $\operatorname{Re} (Au, u) = \left( \frac{A + A^*}{2} u, u \right)$ ; comme  $a^* = \bar{a} + S^{2m-1}$ , on a  $b = \frac{a + a^*}{2} = \operatorname{Re} a + d$  avec  $d \in S^{2m-1}$ . Donc

$$\begin{aligned} e &= b - \frac{3}{4} c (1 + |\xi|^2)^m \geq \frac{c}{4} (1 + |\xi|^2)^m \left( 1 - \frac{4|d|}{c(1 + |\xi|^2)^m} \right) \\ &\geq \frac{c}{8} (1 + |\xi|^2)^m \end{aligned}$$

pour  $|\xi|$  assez grand; le symbole  $(1 + |\xi|^2)^{-m} e$  est d'ordre zéro et loin de zéro pour  $|\xi|$  grand: le lemme 2.1.1 permet donc d'affirmer que  $f = e^{1/2}(1 - \chi(\xi))$  est dans  $S^m$  pour  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de 0, convenablement choisie. On a alors  $f^* \# f = e + g$ ,  $g \in S^{2m-1}$ , d'où  $(Bu, u) \geq \frac{3}{4} c |u|_m^2 + (Gu, u)$ . Comme  $(Gu, u) = ((1 + |D|^2)^{-m/2} Gu, (1 + |D|^2)^{m/2} u)$ , on obtient finalement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(Bu, u) \geq \frac{3}{4} c |u|_m^2 - \text{Cte} |u|_m |u|_{m-1}.$$

Observons que, pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $N$ ,

$$|u|_{m-1} \leq \varepsilon |u|_m + C_{\varepsilon, N} |u|_{-N},$$

car cela résulte de l'inégalité facile :

$$(1 + |\xi|^2)^{m-1} \leq \varepsilon^2 (1 + |\xi|^2)^m + C_{\varepsilon, N}^2 (1 + |\xi|^2)^{-N}.$$

En utilisant l'inégalité  $2ab \leq \eta a^2 + \frac{1}{\eta} b^2$  avec  $a = |u|_m$ ,  $b = |u|_{-N}$ , on trouve finalement  $\operatorname{Re} (Au, u) = (Bu, u) \geq \frac{c}{2} |u|_m^2 - C_N |u|_{-N}^2$ , ce qui est l'inégalité cherchée.  $\square$

## 5.4 Inversion des opérateurs elliptiques

On réalise ici le programme de construction de paramétrix annoncé dans l'introduction.

**PROPOSITION 5.4.** *Soit  $a \in S^m$ . Les conditions*

- i)  $\exists b \in S^{-m}$ ;  $a(x, D) b(x, D) - \operatorname{id} \in \operatorname{Op} (S^{-\infty})$  et
- ii)  $\exists b \in S^{-m}$ ;  $b(x, D) a(x, D) - \operatorname{id} \in \operatorname{Op} (S^{-\infty})$  sont équivalentes, et impliquent
- iii)  $|a(x, \xi)| \geq c |\xi|^m$  pour un  $c > 0$  et  $|\xi| \geq C$ .

Inversement, si iii) est satisfaite, il existe  $b \in S^{-m}$  vérifiant i) et ii) et tout  $b'$  vérifiant i) ou ii) est égal à  $b \bmod S^{-\infty}$ . Un opérateur  $a$  d'ordre  $m$  qui vérifie iii) est dit elliptique.

Preuve : si  $b', b'' \in S^{-m}$  vérifient  $AB' - \text{id} \in \text{Op} (S^{-\infty})$ ,  $B''A - \text{id} \in \text{Op} (S^{-\infty})$ , on a :

$$B'' - B' = B'' (\text{id} - AB') + (B''A - \text{id}) B' \in \text{Op} (S^{-\infty}),$$

donc on a aussi :

$$B'A - \text{id} \in \text{Op} (S^{-\infty}) \quad \text{et} \quad AB'' - \text{id} \in \text{Op} (S^{-\infty}).$$

D'autre part, i) ou ii) implique  $a(x, \xi) b(x, \xi) - 1 \in S^{-1}$ , en particulier

$$1/2 \leq |a(x, \xi)| |b(x, \xi)| \leq C |a(x, \xi)| |\xi|^{-m}$$

pour  $|\xi|$  grand, c'est-à-dire iii).

Inversement, si  $a$  est elliptique, prenons :

$$b = (1 + |\xi|^2)^{-m/2} F(a(1 + |\xi|^2)^{-m/2}),$$

où  $F \in C^\infty(\mathbb{C})$ ,  $F(z) = 1/z$  pour  $|z| \geq c'$ . Alors le lemme 2.1.1 implique  $b \in S^{-m}$ , et  $ab = 1 + \chi(\xi)$ , avec  $\chi(\xi) = 0$  pour  $|\xi| \geq C'$ .

Le théorème 4.1 montre alors que :

$$a(x, D) b(x, D) = \text{id} - r(x, D), \quad r \in S^{-1}.$$

En posant, pour  $k \geq 0$ ,  $b_k(x, D) = b(x, D) r(x, D)^k \in \text{Op} (S^{-m-k})$ , et en choisissant  $b' \in S^{-m}$ ,  $b' \sim \sum_{k \geq 0} b_k$  (proposition 2.3), on trouve :

$$\begin{aligned} AB' &= A \left( B' - \sum_{j < k} B_j \right) + AB \sum_{j < k} R^j = (\text{id} - R) \sum_{j < k} R^j + \text{Op} (S^{-k}) \\ &= \text{id} - R^k + \text{Op} (S^{-k}) = \text{id} + \text{Op} (S^{-k}), \end{aligned}$$

ce qui est i).

Un raisonnement analogue permet de construire  $B''$  tel que  $B''A \sim \text{id} \in \text{Op} (S^{-\infty})$ , et la remarque du début de la preuve complète la démonstration du théorème.  $\square$

Il faut prendre garde que l'existence d'un « inverse à gauche » approché au sens de  $BA - \text{id} \in \text{Op} (S^{-\infty})$  ne signifie pas que  $A$  est injectif, mais que  $\ker A$  est formé de fonctions  $C^\infty$ , et plus généralement que  $Au \in C^\infty$  implique  $u \in C^\infty$ . Par exemple, dans  $\mathbb{R}$ ,  $A = \frac{d}{dx}$  est elliptique, et son noyau est formé des constantes. De même, l'existence d'un « inverse à droite » approché ne permet de résoudre l'équation  $Au = f$  qu'approximativement. Cependant, si i) est satisfaite, il suffit, pour obtenir  $u = Bv$

solution de  $Au = f$ , de résoudre  $v + Kv = f$ , où  $Kv(x) = \int k(x, y) v(y) dy$  a un noyau  $k \in C^\infty$ . Supposons par exemple qu'on veuille résoudre localement près de 0, l'équation  $Au = f$ , avec  $A = \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$  le laplacien, et  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $\beta_r$  désigne la boule de centre 0 et de rayon  $r$ , on peut résoudre dans  $L^\infty(\beta_r)$  l'équation  $v + RK\tilde{v} = f$ , où  $\tilde{v}$  est le prolongement de  $v$  par 0 hors de  $\beta_r$ , et  $R$  la restriction à  $\beta_r$ . En effet, si l'on écrit  $v = Gv$ ,  $Gv = f - RK\tilde{v}$ , on voit que  $G$  est contractante dans  $L^\infty(\beta_r)$  dès que  $r$  est assez petit, car

$$\|RK\tilde{v}\|_{L^\infty(\beta_r)} \leq \sup_{\substack{|x| \leq r \\ |y| \leq r}} |k(x, y)| \|v\|_{L^\infty(\beta_r)} r^n.$$

En prenant  $u = B\tilde{v}$ , on a donc  $Au = AB\tilde{v} = \tilde{v} + K\tilde{v}$  et  $A(Ru) = v + RK\tilde{v} = Rf$ ;  $Ru$  est la solution locale cherchée. Comme on l'a noté au paragraphe 1.1,  $Ru$  est en fait  $C^\infty$ .

Une autre conséquence utile de la proposition 5.4 est l'existence de l'inégalité *a priori* suivante : si  $a \in S^m$  est elliptique (au sens de iii), c'est-à-dire uniformément sur  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{R}$ , il existe  $C_s, C_{N,s}$  tels que, pour toute  $u \in \mathcal{S}$  :

$$\|u\|_{s+m} \leq C_s \|Au\|_s + C_{N,s} \|u\|_{-N}.$$

(que l'on obtient également en appliquant l'inégalité de Gårding (proposition 5.3) à  $A^*A$ ). Cette inégalité signifie qu'un opérateur elliptique contrôle, à un petit reste près, un nombre de dérivées égal à son ordre. (Sur ce thème, voir les exercices 5.12, 5.13 et 5.14 et aussi 6.5, 6.6 et 6.7.)

## 6 OPÉRATEURS DANS UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$

Jusqu'ici, nous avons considéré des symboles définis pour  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , les opérateurs correspondants agissant dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Dans la pratique, on dispose souvent de symboles définis pour  $x \in \Omega$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et on désire leur associer des opérateurs agissant dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  : ceci peut être réalisé par un ingénieux système de troncatures, que nous allons maintenant expliquer.

### 6.1 Propriété pseudo-locale

PROPOSITION 6.1. Soit  $a \in S^m$  et soit  $K$  le noyau de  $a(x, D)$ . Alors  $K$  est  $C^\infty$  pour  $x \neq y$ . En particulier, pour toute  $u \in \mathcal{S}'$ ,

$$\text{supp sing } a(x, D) u \subset \text{supp sing } u. \quad (6.1.1)$$

*Preuve :* Soient  $x \neq y$ ,  $\chi, \psi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de  $x$ ,  $\psi = 1$  près de  $y$ ,  $\text{supp } \chi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$ . La fonction  $\tilde{K} = \chi(x) K(x, y) \psi(y)$  est le noyau de l'opérateur  $\chi A \psi$ , dont le symbole est d'ordre  $-\infty$  car  $\chi A \psi \sim 0$  d'après le théorème 4.1 ; donc  $\tilde{K} \in C^\infty$ , c'est-à-dire  $K \in C^\infty$  pour  $x \neq y$ . Si  $x_0 \notin \text{supp } \text{sing } u$ ,  $\psi u \in C_0^\infty$  pour  $\psi \in C_0^\infty$ ,  $\psi = 1$  près de  $x_0$ , alors

$$\chi A u = \chi A \psi u + \chi A (1 - \psi) u,$$

et l'opérateur  $B = \chi A (1 - \psi)$  est de symbole  $b \in S^{-\infty}$  si  $\psi = 1$  près de  $\text{supp } \chi$  : il suffit de prouver que  $b(x, D) \mathcal{S}' \subset C^\infty$  pour obtenir (6.1.1).

Or, pour tout  $\alpha$ ,  $x \mapsto D_x^\alpha (e^{ix\xi} b(x, \xi))$  est continue à valeurs dans  $\mathcal{S}$ , et  $D^\alpha (Bu) = (2\pi)^{-n} \langle \tilde{u}, D_x^\alpha (e^{ix\xi} b(x, \xi)) \rangle$  (dualité entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ ) : donc  $D^\alpha (Bu)$  est continue, et  $Bu \in C^\infty$ .  $\square$

La propriété « pseudo-locale » est (6.1.1).

## 6.2 Symboles locaux et opérateurs dans un ouvert

**DÉFINITION.** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, on définit  $S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  comme l'ensemble des  $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  tels que  $\varphi a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Si  $a \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , la formule habituelle :

$$a(x, D) u = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

définit un opérateur de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , que l'on peut restreindre en un opérateur  $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  et  $C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ .

La proposition suivante clarifie la relation entre de tels opérateurs et les opérateurs obtenus « par troncature » à partir d'opérateurs globaux.

**PROPOSITION 6.2.** Soit  $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$  un opérateur linéaire continu tel que pour toutes  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi A \psi \in \text{Op}(S^m)$ . Alors il existe  $a' \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  avec  $A = a'(x, D) + R$ , où  $R$  est un opérateur à noyau dans  $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ . Le symbole  $a'$  est ici déterminé modulo  $S_{\text{loc}}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .

**DÉFINITION.** Dans la situation de la proposition 6.2, on dit que  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel sur  $\Omega$ , et la classe de  $S_{\text{loc}}^m/S_{\text{loc}}^{-\infty}$  est appelée le symbole de  $A$ .

*Preuve :*

a) On admet ici qu'il existe une suite  $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ , avec

$$i) \quad \forall x \in \Omega, \sum_j \psi_j(x) = 1,$$

ii) Pour tout contact  $K \subset \Omega$ , seul un nombre fini d'ensembles parmi les  $\text{supp } \psi_j$  rencontre  $K$ .

Une telle collection de fonctions s'appelle une « partition de l'unité (pour i) localement finie (pour ii) » (cf. Ex. 6.1).

b) Soit  $\psi_j$  comme en a) et notons  $\psi_j A \psi_k = A_{jk} \in \text{Op}(S^m)$ . Pour  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , on écrit

$$Au = \sum_k A \psi_k u = \sum_{j,k} \psi_j A \psi_k u = \Sigma' A_{jk} u + \Sigma'' A_{jk} u,$$

où  $\Sigma'$  désigne la somme sur les  $j, k$  avec  $\text{supp } \psi_j \cap \text{supp } \psi_k \neq \emptyset$ .

La fonction  $a' = \Sigma' a_{jk} \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , car si  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi a' = \Sigma' \varphi a_{jk}$  ne contient qu'un nombre fini de termes dans  $S^m$ .

L'opérateur  $Ru$  défini par  $\Sigma''$  a pour noyau  $\Sigma'' \psi_j(x) K(x, y) \psi_k(y)$ , si  $K$  est le noyau de  $A$ . Puisque  $K$  est  $C^\infty$  pour  $x \neq y$  (proposition 6.1), la somme est dans  $C^\infty(\Omega \times \Omega)$  comme somme localement finie de termes  $C^\infty$ .

c) La formule (3.2.2') montre que si  $K \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  est le noyau de  $b(x, D)$ , alors  $b \in S^{-\infty}$ . En appliquant cela à l'opérateur  $\varphi a'(x, D) \psi$  dans le cas où  $a$  est à noyau  $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ , on trouve  $a' \in S_{\text{loc}}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

### 6.3 Opérateurs proprement supportés

**DÉFINITION.** Un opérateur linéaire continu  $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$  est dit *proprement supporté* si, pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un compact  $K' \subset \Omega$ , avec

$$\text{supp } u \subset K \Rightarrow \text{supp } Au \subset K', \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ sur } K' \Rightarrow Au = 0 \text{ sur } K.$$

L'intérêt de ce concept est que  $A$  applique  $C_0^\infty$  dans  $C_0^\infty$ , et donc  $A^*$  se prolonge en un opérateur de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dans lui-même: on n'a donc plus besoin de s'embarasser de conditions sur le support des fonctions.

De plus, la proposition suivante montre que, « modulo  $C^\infty$  », on peut toujours rendre un opérateur « proprement supporté ».

**PROPOSITION 6.3.** Soit  $A = a(x, D)$ , où  $a \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ . Il existe un opérateur  $R$  à noyau dans  $C^\infty(\Omega \times \Omega)$  tel que  $A + R$  soit proprement supporté.

*Preuve :* c'est la même que celle de la proposition 6.2, car la somme  $\Sigma' \psi_j A \psi_k$  définit un opérateur proprement supporté.  $\square$

Il faut néanmoins prendre garde que les notions de « symbole local » et d'« opérateurs proprement supportés » ne permettent aucun contrôle de

Au lorsqu'on approche du bord de  $\Omega$  : si l'on s'intéresse au comportement de  $u$  jusqu'au bord de  $\Omega$ , avec éventuellement des conditions aux limites, on doit faire sur l'opérateur une hypothèse spéciale (dite « de transmission ») qui permet de préserver la régularité jusqu'au bord des fonctions (cf. Ex. 6.8).

## 7 OPÉRATEURS SUR UNE VARIÉTÉ

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ , et  $A$  un opérateur linéaire continu,  $A : C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ .

On dira que  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel si son image dans tout domaine de carte est de la forme  $a(x, D)$  pour un certain symbole local  $a$ . Pour qu'une telle définition soit utilisable, il faut examiner d'abord la question des changements de cartes.

### 7.1 Opérateurs pseudo-différentiels et changements de variables

**PROPOSITION 7.1.** *Soit  $\chi : \Omega \rightarrow \Omega'$  un  $(C^\infty)$  difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que, pour un symbole  $a \in S^m$ , l'opérateur  $a(x, D)$  ait un noyau à support compact dans  $\Omega \times \Omega$ . Alors*

i) *La fonction  $a'(y, \eta)$  définie par  $a'(\chi(x), \eta) = e^{-ix(x)\eta} a(x, D) e^{ix(x)\eta}$  ( $a' = 0$  pour  $y \notin \Omega'$ ) est un symbole de  $S^m$ .*

ii) *Le noyau de  $a'(x, D)$  est à support compact dans  $\Omega' \times \Omega'$ .*

iii) *Pour  $u \in \mathcal{S}'$ ,  $a(x, D)(u \circ \chi) = (a'(x, D)u) \circ \chi$ .*

*De plus,*

$$a'(\chi(x), \eta) \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x', \chi'(x)\eta) D_y^\alpha (e^{i\rho_x(y)\eta})|_{y=x},$$

où  $\rho_x(y) = \chi(y) - \chi(x) - \chi'(x)(y - x)$ .

On remarque que  $a(x, D)(u \circ \chi)$  est bien défini car le noyau de  $a$  est à support compact dans  $\Omega \times \Omega$  (alors que  $u \circ \chi$  n'est pas définie...).

*Preuve :*

a) Remarquons d'abord que si  $a \in S^m$ ,  $a(x, D) e^{ix\xi} = e^{ix\xi} a(x, \xi)$ . En effet, si  $\hat{u} \in C_0^\infty$ ,

$$a(x, D) u(\varepsilon x) e^{ix\xi} = e^{ix\xi} (2\pi)^{-n} \int e^{i\varepsilon x \mathcal{S}} a(x, \xi + \varepsilon \mathcal{S}) \hat{u}(\mathcal{S}) d\mathcal{S},$$

qui tend vers :

$$e^{ix\xi} a(x, \xi) \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ si } (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\mathcal{S}) d\mathcal{S} \equiv u(0) = 1;$$

par ailleurs,  $u(\varepsilon x) e^{ix\xi} \rightarrow e^{ix\xi}$  dans  $\mathcal{S}'$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

b) Supposons i) démontré. La formule de définition choisie pour  $a'$  signifie alors, d'après a), que iii) est valable lorsque  $u(x) = e^{ix\eta}$ . Comme les combinaisons linéaires d'exponentielles sont denses dans  $S'$  à cause de la formule d'inversion de Fourier, on obtient iii) en général.

c) Démontrons i). Si  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  est telle que  $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$  pour  $(x, y)$  dans un voisinage du support du noyau de  $a$ , on a :

$$a'(\chi(x), \eta) = \varphi(x) e^{-ix(x)\eta} a(x, D)(\varphi(x) e^{ix(x)\eta}).$$

En posant  $\lambda = 1 + |\eta|$ , le théorème 3 de l'appendice donne un développement asymptotique, en fonction de  $\lambda$ , de  $a'(\chi(x), \eta)$  et de toutes ses dérivées par rapport à  $x$  et à  $\eta$ . Il est de plus aisé de se convaincre que ce développement est uniforme par rapport au paramètre  $\alpha = \frac{\eta}{\lambda}$ . On constate sur ces développements que  $a'$  est un symbole en  $(y, \eta)$ , satisfaisant au sens des symboles le développement donné en iii).  $\square$

On a alors en mesure de formuler une définition précise.

**DÉFINITION.** L'opérateur  $A : C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  sera appelé pseudo-différentiel d'ordre  $m$  si, pour toute carte locale  $\kappa : V \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ , l'opérateur transporté  $\tilde{A} : u \rightarrow [A(u \circ \kappa)] \circ \kappa^{-1}$  de  $C_0^\infty(\tilde{V})$  dans  $C^\infty(\tilde{V})$  est pseudo-différentiel d'ordre  $m$  dans  $\tilde{V}$ , c'est-à-dire  $\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\tilde{V})$ ,  $\varphi \tilde{A} \psi \in \text{Op}(S^m)$  (cf. proposition 6.2). On écrira alors  $A \in \Psi^m(M)$ .

La proposition 7.1 permet l'utilisation pratique de cette définition. La définition 6.3 d'opérateur proprement supporté s'étend sans changement.

## 7.2 Symbole principal et fibré cotangent

La proposition 7.1 et la définition des opérateurs pseudo-différentiels sur  $M$  qui lui est liée laissent de côté la question de la définition d'un symbole de ces opérateurs ; en effet, dans chaque carte locale, l'opérateur transporté a bien un symbole déterminé modulo  $S^{-\infty}$ , mais il dépend de la carte choisie. La question du symbole devient alors : existe-t-il une fonction intrinsèquement définie dont l'expression dans une carte locale soit justement le symbole voulu ?

On va voir que la réponse est oui, mais sous la restriction sévère que les symboles coïncident seulement à un symbole d'ordre  $m - 1$  près : seul le symbole principal pourra donc être intrinsèquement défini.

### 7.2.1 Le fibré cotangent $T^*M$ (quelques rappels)

Rappelons que  $T^*M$  (le fibré des 1-formes différentielles sur  $M$ ) est l'ensemble des points  $(m, \omega) \in T^*M$  consistant en un point  $m \in M$  et en

une forme linéaire  $\omega$  sur l'espace tangent à  $M$  en  $m$ , noté  $T_m M$ . La projection  $\pi : T^* M \rightarrow M$  est  $\pi(m, \omega) = m$ , et la fibre  $\pi^{-1}(m)$  est le dual de  $T_m M$ .

a) Si  $(x_1, \dots, x_n)$  sont des coordonnées locales sur  $V \subset M$ , les champs  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  forment en tout point de  $V$  une base de  $T_m M$ , les formes  $(dx_1, \dots, dx_n)$  une base du dual : en notant  $\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$  une 1-forme, on obtient des coordonnées locales  $(x, \xi)$  sur  $\pi^{-1}(V)$ ,  $x$  coordonnées de  $m$ ,  $\xi$  coordonnées de  $\omega$ . Dans une autre carte  $(x'_1, \dots, x'_n)$ ,  $x' = \Phi(x)$ ,  $x = \psi(x')$ , le point  $m$  aura bien sûr des coordonnées  $x'(m) = \Phi(x(m))$ , et la forme  $\omega = \sum \xi_i dx_i$  s'écrira  $\omega = \sum \xi'_i \left( \sum \frac{\partial \psi_i}{\partial x'_j} dx'_j \right)$ , c'est-à-dire :

$$\xi'_j = \sum_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x'_j} \xi_i, \quad \text{ou encore} \quad \xi' = {}^t \psi' \xi.$$

Autrement dit, le même point  $(m, \omega)$  aura pour images dans les cartes  $(x, \xi)$  et  $(x', \xi')$  les points  $(x, {}^t \Phi'(x) \eta)$  et  $(\Phi(x), \eta)$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  respectivement.

b) Sur  $T^* M$ , il existe une 1-forme  $\alpha$  dite « canonique » définie par

$$\alpha_{(m, \omega)}(Z) = \omega(\pi_* Z),$$

$Z$  étant un vecteur tangent à  $T^* M$  en  $(m, \omega)$ ,  $\pi_* Z$  sa projection sur  $M$ .

Dans des coordonnées locales  $(x, \xi)$  définies comme en a), tout vecteur  $Z$  s'écrit  $Z = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum b_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,

$$\pi_* Z = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

et

$$\alpha_{(x, \xi)}(Z) = (\sum \xi_i dx_i)(\pi_* Z) = \sum \xi_i a_i = (\sum \xi_i dx_i)(Z).$$

Donc

$$\alpha_{(x, \xi)} = \sum \xi_i dx_i,$$

les  $\xi_i$  étant les coefficients de  $\alpha$ , qui sont des fonctions sur  $T^* M$ .

Cette 1-forme joue un grand rôle dans toutes sortes de questions, notamment à travers sa différentielle  $\sigma = -d\alpha$  qui s'écrit en coordonnées locales  $\sigma = \sum dx_i \wedge d\xi_i$ , ce qui signifie  $\sigma_{(m, \omega)}(Z, Z') = A \cdot B' - B \cdot A'$ ,

$$Z = A \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad Z' = A' \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B' \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Il existe donc sur  $T^*M$  une 2-forme  $\sigma$  non dégénérée, dite « forme symplectique ».

c) Cette 2-forme fournit une bijection entre les 1-formes et les champs sur  $T^*M$ , par la formule :

$$\sigma(Z, X) = \omega(X) \quad (\omega \text{ 1-forme ; } X, Z \text{ champs}).$$

En particulier, si  $\omega = df$  pour une fonction  $f$  sur  $T^*M$ , le champ  $Z$  correspondant est appelé *hamiltonien de  $f$* , noté  $H_f$ . Dans les coordonnées  $(x, \xi)$ , en notant

$$X = A' \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B' \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \omega(X) = Xf = A' \cdot f'_x + B' \cdot f'_\xi,$$

$$\sigma(Z, X) = AB' - BA'$$

donne

$$A = f'_\xi, \quad B = -f'_x,$$

soit

$$Z = H_f = f'_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} - f'_x \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Enfin, on définit le *crochet de Poisson* de deux fonctions  $f, g$  sur  $T^*M$  par :

$$\{f, g\} = H_f g = f'_\xi \cdot g'_x - f'_x \cdot g'_\xi.$$

### 7.2.2 Le symbole principal

Revenons à la situation de la proposition 7.1 : si  $a$  s'écrit  $a = a_m + S^{m-1}$ , où  $a_m$  est homogène de degré  $m$ , il en est de même de  $a'$ , et

$$a'_m(\chi(x), \eta) = a_m(x, \chi'(x) \eta).$$

On dira dans ce cas que  $a$  possède un *symbole principal*, qui est  $a_m$ .

Si, dans toute carte locale, le représentant de  $A \in \Psi^m(M)$  possède un symbole principal, la formule ci-dessus et 7.2.1 a), montrent que ces divers symboles principaux sont les expressions en coordonnées locales d'une unique fonction sur  $T^*M$ , qu'on appelle *symbole principal de  $A$* .

L'impossibilité de définir, par exemple, un symbole d'ordre  $m-1$  de  $A$  limite l'usage du calcul symbolique pour des opérateurs sur une variété au théorème suivant.

#### THÉORÈME 7.2.2.

a) Si  $A_i \in \Psi^{m_i}(M)$  ( $i = 1, 2$ ) sont proprement supportés et possèdent des symboles principaux  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $A = A_1 A_2 \in \Psi^{m_1+m_2}(M)$  est proprement supporté et admet pour symbole principal  $a_1 a_2$ .

b) *Le commutateur*  $[A_1, A_2]$  *admet pour symbole principal*  $\{a_1, a_2\}$ .

*Remarque.* On a également un théorème concernant l'adjoint (cf. Ex. 7.5).

Les concepts et les assertions qui sont liés uniquement au symbole principal, comme l'ellipticité et l'inversibilité des opérateurs elliptiques par exemple (proposition 5.4), demeurent sans changement pour des opérateurs de  $\Psi^m(M)$ .

## 8 APPENDICE

### 8.1 Intégrales oscillantes

Nous allons donner un sens à une large classe d'intégrales du type  $\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta$ , où  $\varphi$  est une fonction variant rapidement à l'infini, et où  $a$  est régulière, à croissance polynomiale essentiellement. La forte oscillation du terme  $e^{i\varphi(\theta)}$ , lorsque  $\theta$  tend vers l'infini, permet de compenser la croissance de  $a$ , et de définir l'intégrale.

**8.1.1** Commençons par un lemme crucial (dit de la phase non stationnaire) :

**LEMME 1.** *Soient*  $K$  *un compact de*  $\mathbb{R}^N$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , *réelle, vérifiant*  $|\varphi'(\theta)| \geq c_0 > 0$  *sur*  $K$ . *Alors, pour toute fonction*  $a \in C_0^\infty(K)$ , *pour tout*  $k \in \mathbb{N}$ , *on a :*

$$\forall \lambda \geq 1, \quad \lambda^k \left| \int e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta \right| \leq C_{k+1}(\varphi) C(c_0, K) \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha a|,$$

où  $C_{k+1}(\varphi)$  reste bornée lorsque  $\varphi$  reste bornée dans  $C^{k+1}(K)$ .

*Preuve :* posant  $L = -i|\varphi'|^{-2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}$ , on a  $L(e^{i\lambda\varphi}) = \lambda e^{i\lambda\varphi}$ , d'où  $\lambda^k \int e^{i\lambda\varphi} a d\theta = \int e^{i\lambda\varphi} ({}^tL)^k(a) d\theta$  et on majore la dernière intégrale par  $\text{vol}(K) \sup |({}^tL)^k a|$ .

**8.1.2** Nous pouvons maintenant définir les classes d'amplitudes  $a = a(\theta)$  qui interviendront dans les intégrales oscillantes :

**DÉFINITION.** Pour  $\rho \in ]-\infty, 1]$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , on note  $A_\rho^m(\mathbb{R}^N)$  l'espace des fonctions  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,$$

$$|\partial^\alpha a(\theta)| \leq C_\alpha (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha|} \quad \text{et} \quad A_\rho^{+\infty} = \bigcup_m A_\rho^m.$$

*Exemples*

a)  $\rho = 1$ . On retrouve la dépendance en fréquence d'un symbole de la classe  $S^m$ , introduite au chapitre I, paragraphe 2.1. En particulier,  $A_1^m$  contient les fonctions homogènes de degré  $\leq m$  (tronquées éventuellement près de 0) les polynômes de degré  $\leq m$  si  $m$  est dans  $\mathbb{N}$ , etc...

b) Si  $p = p(\theta)$  est homogène de degré  $1 - \rho$ ,  $C^\infty$  hors de l'origine, alors  $e^{ip}$  (tronquée éventuellement près de 0) définit un élément de  $A_\rho^0$ . En particulier :  $\forall \omega \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ,  $e^{i\omega\theta}$  définit un élément de  $A_\rho^0$ , si  $q$  est une forme quadratique,  $e^{iq} \in A_{-1}^0$ , etc...

Comme pour  $S^m$ , on définit naturellement une structure d'espace complet sur  $A_\rho^m$  ( $\rho \leq 1$ ) à l'aide de semi-normes :

$$N_{\rho, k}^m(a) = \sup_{|\alpha| \leq k, \theta \in \mathbb{R}^N} (1 + |\theta|)^{-m + \rho|\alpha|} |\partial^\alpha a(\theta)|.$$

La démonstration du lemme 2.2.1 s'adapte alors pour prouver que  $\mathcal{S}$  (qui n'est autre que  $\bigcap_{m \in \mathbb{R}} A_\rho^m$ ) est dense dans  $A_\rho^m$  pour la topologie de  $A_\rho^{m+\varepsilon}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall \rho \leq 1$ .

**8.1.3** Nous pouvons maintenant introduire précisément les intégrales que nous voulons étudier.

Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ , à valeurs réelles, homogène de degré  $\mu > 0$ . On note

$$I_\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta,$$

qui est bien définie pour tout  $a \in A_\rho^m$  si  $m < -N$ . On désire prolonger la forme linéaire  $I_\varphi$  à d'autres  $a$ . Pour cela, on force l'oscillation du terme  $e^{i\varphi}$  en imposant :

$$d_\theta \varphi \neq 0 \text{ pour } \theta \neq 0.$$

**THÉORÈME 1.** *Sous les hypothèses ci-dessus, et si  $\mu > 1 - \rho$ ,  $I_\varphi$  se prolonge par continuité à tous les  $A_\rho^m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Ce prolongement est unique compte tenu de la densité de  $\mathcal{S}$  dans ces espaces.*

*Preuve :* nous introduisons une partition de l'unité dyadique de  $\mathbb{R}^N$  (également utilisée au chapitre II, paragraphe A.1.1). On écrit :

$$1 = \chi_0(\theta) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\theta) \quad \text{où } \chi_0 \in C_0^\infty, \chi \in C_0^\infty,$$

et

$$\text{supp } \chi_0 \subset \{|\theta| \leq 1\}, \text{supp } \chi \subset \{1/2 \leq |\theta| \leq 2\};$$

alors

$$I_\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi} \chi_0 a + \sum_{\rho=0}^{\infty} \int e^{i\varphi(\theta)} \chi(2^{-\rho} \theta) a(\theta) d\theta .$$

Il s'agit de prouver la convergence de cette série pour  $a \in A_\rho^m$ , et d'en estimer la somme à l'aide d'une semi-norme de  $a$  dans  $A_\rho^m$ . Après changement de variable  $\theta \mapsto 2^p \theta$ , le terme général de la série s'estime à l'aide du lemme 1 :

$$\left| 2^{Np} \int e^{i2^{p\mu} \varphi(\theta)} \chi(\theta) a(2^p \theta) d\theta \right| \leq C_{k+1} 2^{Np - p\mu k} \sup_{|\alpha| \leq k, 1/2 \leq |\theta| \leq 2} 2^{p|\alpha|} |\partial^\alpha a(2^p \theta)|$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On contrôle le second membre par :

$$C_{k+1} 2^{p(N - \mu k + m + (1 - \rho)k)} N_{\rho, k}^m(a) .$$

Il suffit alors de choisir  $k$  tel que :

$$N + m - k(\mu - 1 + \rho) < 0 ,$$

pour assurer la convergence géométrique et l'estimation recherchée.

*Remarques*

a) La condition  $\mu > 1 - \rho$  est juste celle qui suffit à assurer que le terme oscillant  $e^{i\varphi}$  n'est pas dans le même espace d'amplitudes  $A_\rho^{+\infty}$  que  $a$  (voir l'exemple b)).

b) Pour calculer  $I_\varphi(a)$ , on peut par exemple choisir  $\chi$  dans  $\mathcal{S}$ , avec  $\chi(0) = 1$ . Alors, pour tout  $a \in A_\rho^m$ ,  $\chi(\varepsilon\theta) a(\theta)$  tend vers  $a(\theta)$  dans  $A_\rho^{m+\delta}$  pour tout  $\delta > 0$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. (C'est le lemme 2.2.1 dans sa version  $A_\rho^m$ .) On en déduit

$$I_\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int e^{i\varphi(\theta)} a(\theta) \chi(\varepsilon\theta) d\theta .$$

Ce type de formule permet d'étendre aux intégrales oscillantes  $I_\varphi(a)$  les règles de calcul habituelles pour les intégrales absolument convergentes (théorème de Fubini, intégration par parties, changement de variables homogène, dérivation sous le signe  $\int$ ).

### 3.2 Démonstration des théorèmes de calcul symbolique

Prouvons le théorème 3.2.3 du chapitre I.

THÉORÈME 2. Si  $a = a(x, \xi) \in S^m$ , alors

$$a^*(x, \xi) = \int e^{-iy\eta} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) dy d\eta / (2\pi)^n,$$

appartient à  $S^m$  et vérifie la formule asymptotique :

$$a^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a}(x, \xi).$$

*Preuve* : on pose  $\varphi(y, \eta) = -y\eta$  ;  $\varphi$  est une forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , donc vérifie les hypothèses du théorème 1 avec  $\mu = 2$ .

Par ailleurs, à  $(x, \xi)$  fixé, la fonction  $\bar{a}(x - y, \xi - \eta)$  appartient à  $A_0^{m_+}(\mathbb{R}^{2n})$  (où  $m_+ = \max(m, 0)$ ), puisque :

$$(1 + |\eta|)^m \leq (1 + |y| + |\eta|)^{m_+}.$$

Le théorème 1 permet donc de définir l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy\eta} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) dy d\eta,$$

en tant qu'intégrale oscillante ; par continuité, cette quantité ne peut être que  $a^*(x, \xi)$  (définie au chapitre I, paragraphe 3 comme une transformée de Fourier). Le théorème 1 nous donne immédiatement une estimation :

$$|a^*(x, \xi)| \leq CN_{0,k}^{m_+}(\bar{a}(x - \cdot, \xi - \cdot)),$$

pour un certain  $k$ .

Nous allons voir que cette estimation donne le résultat si  $m \geq 0$ . Lorsque  $m < 0$ , nous allons utiliser une estimation apparemment plus grossière, mais qui utilise en fait plus d'information sur  $a$ . En « voyant »  $\bar{a}(x - \cdot, \xi - \cdot)$  dans un espace « plus gros »  $A_0^\mu$  où  $\mu \geq m_+$ , on a aussi :

$$|a^*(x, \xi)| \leq CN_{0,j}^\mu(\bar{a}(x - \cdot, \xi - \cdot)),$$

où  $j$  dépend de  $\mu$ .

On a pour  $\mu \geq 0$  :

$$(1 + |y| + |\eta|)^{-\mu} \sup_{|\alpha| + |\beta| \leq k} |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \bar{a}(x - y, \xi - \eta)| \leq C(1 + |\eta|)^{-\mu} (1 + |\xi - \eta|)^m,$$

et le choix de  $\mu$  est dicté par le lemme élémentaire suivant :

LEMME 2 (« INÉGALITÉ DE PEETRE »). *Pour tous  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{R}$*

$$(1 + |\xi - \eta|)^m \leq (1 + |\eta|)^{|m|} (1 + |\xi|)^m.$$

*Preuve* : c'est trivial si  $m \geq 0$  car  $1 + |\xi - \eta| \leq 1 + |\xi| + |\eta| \leq (1 + |\xi|)(1 + |\eta|)$ , et on obtient le cas  $m < 0$  en intervertissant les rôles de  $\xi$  et  $\xi - \eta, m$  et  $-m$ .  $\square$

On choisit donc  $\mu = |m|$ , et on obtient

$$|a^*(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^m.$$

En appliquant cette preuve à  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)$  au lieu de  $a$ , on conclut que  $a^* \in S^m$ .

Pour le développement asymptotique, on applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction  $g(t) = \bar{a}(x + ty, \xi + t\eta)$ . En remarquant que :

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha| + |\beta| = k} \frac{k!}{\alpha! \beta!} y^\alpha \eta^\beta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x + ty, \xi + t\eta),$$

on a :

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq 2k+1} \frac{(-1)^{|\alpha| + |\beta|}}{\alpha! \beta!} \times \\ \times \left( \int e^{-iy\eta} y^\alpha \eta^\beta dy d\eta \right) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x, \xi) + R_k(x, \xi),$$

où

$$R_k(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int_0^1 (1-t)^{2k+1} dt \times \\ \int e^{-iy\eta} \sum_{|\alpha| + |\beta| = 2k+2} (-1)^{|\alpha| + |\beta|} \times \\ \times \frac{2k+2}{\alpha! \beta!} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \bar{a}(x - ty, \xi - t\eta) y^\alpha \eta^\beta dy d\eta.$$

Calculons d'abord chaque terme de la partie principale de ce développement :

LEMME 3.

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\eta} y^\alpha \eta^\beta dy d\eta = (-i)^{|\alpha|} \alpha! \delta_{\alpha\beta},$$

où  $\delta_{\alpha\beta} = 1$  si  $\alpha = \beta, \delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ .

*Preuve :* supposons par exemple  $|\alpha| \geq |\beta|$ . On remarque que  $y^\alpha e^{-iy\eta} = (-D_\eta)^\alpha (e^{-iy\eta})$  et on intègre par parties :

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-iy\eta} y^\alpha \eta^\beta dy d\eta = (2\pi)^{-n} \int D_\eta^\alpha (\eta^\beta) e^{-iy\eta} dy d\eta.$$

Si  $\alpha \neq \beta$ , alors il existe  $j$  tel que  $\alpha_j > \beta_j$ . On en déduit :

$$D_\eta^\alpha (\eta^\beta) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta, \quad \text{alors} \quad D_\eta^\alpha (\eta^\alpha) = (-i)^{|\alpha|} \alpha!.$$

Il reste à calculer :

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-iy\eta} dy d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) \chi(\varepsilon \eta) dy d\eta,$$

pour  $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\chi(0) = 1$ . L'intégrale à évaluer n'est autre que :

$$(2\pi)^{-n} \int \chi(\varepsilon \eta) \hat{\chi}(\eta/\varepsilon) d\eta/\varepsilon^n = (2\pi)^{-n} \int \chi(\varepsilon^2 \eta) \hat{\chi}(\eta) d\eta,$$

qui tend vers  $(2\pi)^{-n} \int \hat{\chi}(\eta) d\eta = \chi(0) = 1$ .

On en déduit :

$$a^*(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a}(x, \xi) + R_k(x, \xi).$$

Notons que  $\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a} \in S^{m-|\alpha|}$ . Nous allons prouver que  $R_k \in S^{m-k-1}$ . Pour cela on remarque que, en intégrant par parties en  $\eta$  puis en  $y$  comme ci-dessus,  $R_k(x, \xi)$  est combinaison linéaire de termes du type

$$\int_0^1 (1-t)^{2k+1} t^j \int e^{-iy\eta} \partial_y^\gamma \partial_\eta^\gamma \bar{a}(x-ty, \xi-t\eta) dy d\eta dt,$$

où  $|\gamma| \geq k+1$ . Mais  $(y, \eta) \mapsto \partial_y^\gamma \partial_\eta^\gamma \bar{a}(x-ty, \xi-t\eta)$  appartient à  $A_0^{m-|\gamma|}(\mathbb{R}^{2n}) \subset A_0^{m-|\gamma|}(\mathbb{R}^{2n})$ , et l'intégrale oscillante correspondante est donc majorée par :

$$\begin{aligned} C \sup_{y, \eta} (1+|y|+|\eta|)^{-|m-|\gamma||} (1+|\xi-t\eta|)^{m-|\gamma|} \\ \leq C \sup_{\eta} (1+t|\eta|)^{-|m-|\gamma||} (1+|\xi-t\eta|)^{m-|\gamma|} \\ \leq C(1+|\xi|)^{m-|\gamma|} \leq C(1+|\xi|)^{m-k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi  $|R_k(x, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m-k-1}$ , et on majore de même

$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_k(x, \xi)$ , en remplaçant  $a$  par  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Remarque.* Une démonstration légèrement différente, qui s'adapte à de plus larges classes de symboles, est proposée à l'exercice 4.12 (question c)).

La preuve du théorème 4.1 se déroule exactement selon le même plan, puisque la quantité à étudier est cette fois

$$a \# b(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy\eta} a(x, \xi - \eta) b(x - y, \xi) dy d\eta,$$

qui est encore une intégrale oscillante à amplitude dans  $A_0^{+\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ . Nous laissons les détails au lecteur (voir aussi l'exercice 4.11).

### 8.3 Action d'un opérateur pseudo-différentiel sur une fonction oscillante

Par la même méthode, nous allons prouver un résultat très utile, qui est en particulier la clé de la proposition 7.1 de changement de variables pour les opérateurs pseudo-différentiels.

**THÉORÈME 3.** Soient  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , à valeurs réelles, telles que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $d\psi(x) \neq 0$ ,  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $\lambda \geq 1$ ,

$$a(x, D)(u e^{i\lambda\psi})(x) = e^{i\lambda\psi(x)} I(x, \lambda) \quad (3.1)$$

où  $I(x, \lambda)$  admet, si  $\lambda \rightarrow +\infty$ , le développement asymptotique suivant, localement uniformément en  $x$ ,

$$I(x, \lambda) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha (e^{i\lambda r_x(y)} u(y)) \Big|_{y=x} D_\xi^\alpha a(x, \lambda d\psi(x)). \quad (3.2)$$

Dans la formule (3.2), on a posé  $r_x(y) = \psi(y) - \psi(x) - d\psi(x)(y - x)$ , et le terme de rang  $\alpha$  est estimé par  $\lambda^{m - |\alpha|/2}$ .

*Preuve :* par définition, on a, au sens des intégrales oscillantes,

$$I(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi) e^{i\lambda(\psi(y) - \psi(x))} u(y) dy d\xi.$$

Posant  $y = x + z$ ,  $\xi = \eta + \lambda d\psi(x)$ , on obtient :

$$I(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \iint e^{-iz\cdot\eta} e^{i\lambda r_x(x+z)} u(x+z) \times \\ \times a(x, \eta + \lambda d\psi(x)) dz d\eta \quad (3.3)$$

avec les notations de l'énoncé ci-dessus.

a) Notons  $\Phi(x, \eta, \lambda) = \int e^{-iz \cdot \eta} e^{i\lambda r_x(x+z)} u(x+z) dz$ , de sorte que :

$$I(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \int a(x, \eta + \lambda d\psi(x)) \Phi(x, \eta, \lambda) d\eta,$$

et montrons que, pour  $C$  assez grand,

$$\forall k, \quad |\Phi(x, \eta, \lambda)| \leq C_k (1 + |\eta| + \lambda)^{-k}$$

$$\text{hors de } \frac{\lambda}{C} \leq |\eta + \lambda d\psi(x)| \leq C\lambda. \quad (3.4)$$

En effet, on écrit :

$$-z \cdot \eta + \lambda r_x(x+z) = \lambda \left[ r_z(x+z) - z \cdot \frac{\eta}{\lambda} \right] = \lambda f(z)$$

avec  $f'(z) = d\psi(x+z) - d\psi(x) - \eta/\lambda$ .

Si  $|\eta + \lambda d\psi(x)| < \lambda/C$ , et  $C$  est choisie telle que  $|d\psi(y)| \geq 2/C$  pour tout élément  $y$  du support de  $u$ , alors  $|f'(z)| \geq 1/C$ .

De même, si  $|\eta + \lambda d\psi(x)| > C\lambda$ , et  $C$  est choisie telle que  $|d\psi(y)| \leq C/2$  pour tout élément  $y$  du support de  $u$ , alors  $|f'(z)| \geq C/2$ .

L'intégrale qui définit  $\Phi$  a donc une phase  $f$  uniformément non stationnaire, et le lemme 1 implique l'estimation (3.4).

Ecrivons alors :

$$I(x, \lambda) = I_1(x, \lambda) + I_2(x, \lambda),$$

où

$$I_2(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \iint e^{-iz \cdot \eta} e^{i\lambda r_x(x+z)} u(x+z) \times \\ \times \chi \left( \frac{\eta}{\lambda} + d\psi(x) \right) a(x, \eta + \lambda d\psi(x)) dz d\eta \quad (3.5)$$

et où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\chi(\xi) = 1$  pour  $1/C \leq |\xi| \leq C$ ,  $\chi(\xi) = 0$  pour  $|\xi| \leq 1/2C$ .

A cause de l'estimation sur  $\Phi$ ,  $I_1$  est à décroissance rapide lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

b) Pour traiter  $I_2$ , notons :

$$b(x, z, \eta, \lambda) = u(x+z) a(x, \eta + \lambda d\psi(x)) \chi \left( \frac{\eta}{\lambda} + d\psi(x) \right).$$

Alors  $b$  vérifie les estimations suivantes :

$$\forall \alpha, \forall \beta \quad \left| \partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta b(x, z, \eta, \lambda) \right| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^{m-|\beta|}$$

et admet un support compact en  $z$ , uniformément en  $\eta, \lambda$  et localement uniformément en  $x$ .

Le théorème est alors conséquence du lemme suivant :

LEMME 4. Soient  $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifiant  $dr(0) = 0$  et  $b \in C^\infty(\mathbb{R}_z^n \times \mathbb{R}_\eta^n)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in [1, +\infty[$ , de sorte que, pour un certain  $m$ ,

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta b(z, \eta, \lambda)| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^{m-|\beta|}.$$

On suppose en outre que  $b$  est à support compact en  $z$  uniformément par rapport à  $\eta, \lambda$ .

Alors l'intégrale

$$J(\lambda) = (2\pi)^{-n} \iint e^{-iz \cdot \eta} e^{i\lambda r(z)} b(z, \eta, \lambda) dz d\eta$$

admet si  $\lambda \rightarrow +\infty$  le développement asymptotique suivant :

$$J(\lambda) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha (e^{i\lambda r(z)} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda)) \Big|_{z=0},$$

le terme de rang  $\alpha$  étant estimé par  $\lambda^{m-|\alpha|/2}$ .

*Preuve* : on procède comme pour le théorème 2, par un développement de Taylor de l'amplitude en  $z = \eta = 0$ . A l'aide du lemme 3, on a immédiatement

$$J(\lambda) = \sum_{|\alpha| + |\beta| < 2k} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha (e^{i\lambda r} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda)) \Big|_{z=0} + R_k(\lambda),$$

$$R_k(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int_0^1 (1-t)^{2k-1} \sum_{|\alpha| + |\beta| = 2k} \iint e^{-iz \cdot \eta} z^\alpha \eta^\beta \times \\ \times \partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta (e^{i\lambda r} b)(tz, t\eta, \lambda) dz d\eta dt.$$

Etudions d'abord la croissance des termes « principaux ». Dans  $\partial_z^\alpha (e^{i\lambda r} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda))$  chaque dérivée en  $z$  portant sur l'exponentielle fait apparaître  $i\lambda \partial_z r$ , qui s'annule en  $z = 0$ , de sorte que la contribution de  $e^{i\lambda r}$  dans ce terme sera combinaison linéaire de termes du type :

$$\lambda^q \partial_z^{\alpha_1} r \dots \partial_z^{\alpha_q} r e^{i\lambda r}$$

où  $\sum_{i=1}^q |\alpha_i| \leq |\alpha|$ , et  $|\alpha_i| \geq 2$ , donc  $q \leq \frac{|\alpha|}{2}$ .

Compte tenu des estimations sur  $b$ , on conclut que :

$$\left| \partial_z^\alpha (e^{i\lambda r} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda)) \Big|_{z=0} \leq C_\alpha \lambda^{m-|\alpha|/2}.$$

Nous allons exploiter également l'annulation de  $dr$  en 0 pour estimer le reste  $R_k(\lambda)$ .

En intégrant par parties en  $\eta$  et en  $z$ , on se ramène, comme dans la preuve du théorème 2, à estimer une quantité du type :

$$\iint e^{-iz \cdot \eta} \partial_z^\gamma (e^{i\lambda r} \partial_\eta^\gamma b)(tz, t\eta, \lambda) dz d\eta \quad (3.6)$$

uniformément pour  $t \in [0, 1]$ , avec  $|\gamma| = k$ .

A  $\lambda$  fixé, (3.6) est une intégrale oscillante pour la phase  $-z \cdot \eta$ , d'amplitude appartenant à  $A_0^0$ . Malheureusement, les dérivations en  $z$  portant sur  $e^{i\lambda r}$  font apparaître une grande croissance en  $\lambda$ , qui compense la décroissance apportée par les dérivations en  $\eta$  portant sur  $b$ , et font que les semi-normes de cette amplitude dans  $A_0^0$  n'ont pas la décroissance souhaitée.

Nous allons donc retransformer cette intégrale, en développant les dérivées en  $z$ . L'amplitude est alors combinaison linéaire de termes du type

$$e^{i\lambda r} \lambda^q \partial_z^{\nu_1} r \dots \partial_z^{\nu_q} r \partial_z^\mu \partial_\eta^\gamma b$$

pris en  $(tz, t\eta, \lambda)$ , avec  $\sum_{i=1}^q |\nu_i| + |\mu| = |\gamma|$ ,  $|\nu_i| \geq 1$ .

Si  $|\nu_i| = 1$ ,  $(\partial_z^{\nu_1} r)(tz) = t\psi_{\nu_1}(tz) \cdot z$ , où  $\psi_{\nu_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Des intégrations par parties en  $\eta$  nous ramènent alors à des amplitudes du type :

$$e^{i\lambda r} \lambda^q \Phi(tz) \partial_z^\mu \partial_\eta^{\gamma + \delta} b(tz, t\eta, \lambda),$$

où  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\delta| = \# \{i, |\nu_i| = 1\}$ , de sorte

$$|\gamma| \geq \sum_{i=1}^q |\nu_i| \geq 2q - |\delta|,$$

i.e.

$$q - \frac{|\delta|}{2} \leq \frac{|\gamma|}{2}. \quad (3.7)$$

On estime alors l'intégrale oscillante par une semi-norme (fixe) de l'amplitude, et on obtient, compte tenu des estimations sur  $b$ ,

$$|R_k(\lambda)| \leq C_k \lambda^{M+q+m-|\gamma|-|\delta|}$$

soit, compte tenu de (3.7),

$$|R_k(\lambda)| \leq C_k \lambda^{M+m-|\gamma|/2} \leq C_k \lambda^{M+m-k/2}$$

où  $M$  est un entier indépendant de  $k$ , c.q.f.d. □

*Remarque.* Le développement asymptotique (3.2) est classiquement obtenu, à partir de l'expression (3.5), à l'aide du théorème plus général « de la phase stationnaire » (cf. Ex. 7.1), visant à étudier des intégrales du type  $\int e^{i\lambda f(x)} u(x) dx$ , lorsque  $u \in C_0^\infty$  et  $f$  n'a que des points critiques non dégénérés. (Voir [H1, paragraphe 7.7].) La structure particulièrement simple de la phase intervenant ici nous a incité à donner une démonstration directe.

## COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE I

Ce chapitre emprunte toute sa substance — parfois même littéralement — au chapitre correspondant de l'ouvrage de HÖRMANDER *The analysis of linear partial differential operators* (tome III, chapitre 18, paragraphe 1). Nous nous sommes efforcés toutefois d'écrire un texte le plus élémentaire possible, auto-contenu, incluant ce que l'on a estimé être le « strict minimum » de la théorie. Nous croyons qu'une telle présentation pourra être utile aux étudiants, mais aussi aux chercheurs plus « appliqués » ou venant d'autres disciplines, qui pourront lire ce chapitre comme un « crash-course ».

Bien entendu, de nombreux aspects ne sont qu'effleurés : les classes les plus générales de symboles pour lesquelles on dispose d'un calcul symbolique raisonnable sont introduites dans HÖRMANDER [H5] (tome III, paragraphe 18.5, « Calcul de Weyl ») ; une discussion approfondie de l'action des opérateurs « exotiques » dans  $L^2$  fait l'objet du livre de COIFMAN et MEYER [CM] *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels* ; le cas d'opérateurs à symboles analytiques dans le domaine complexe est développé dans SJÖSTRAND [Sj] *Singularités analytiques microlocales* ; enfin, une discussion des différentes inégalités de « type Gårding » existantes, se trouve dans HÖRMANDER [H5] (paragraphe 18.6.7 « Gårding fort », paragraphe 18.6.8 « Fefferman-Phong », paragraphe 22.3.3 « Melin »).

D'autres prolongements du présent chapitre seront discutés avec les applications au chapitre II.

## EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

**1.1** Soit  $p = p(\xi)$  une fonction polynomiale de degré  $m \geq 1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs complexes, elliptique au sens suivant :

Si  $p_m$  est la partie homogène de plus haut degré de  $p$ ,  
 on a :  $p_m(\xi) \neq 0$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  . (\*)

a) Montrer qu'on peut définir  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{p(\xi)},$$

où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est à choisir ; vérifier que  $p(D)E = \delta + \omega$ ,  $\omega \in \mathcal{S}$ .

b) Vérifier que, si  $|\alpha|$  est assez grand,  $x^\alpha E \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et  $D^\beta(x^{\alpha+\beta}E) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\beta$ . En déduire que  $E$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

c) On suppose  $m \geq n + 1$ . Montrer que  $D^\beta E \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\beta$  tel que  $|\beta| \leq m - n - 1$ . En déduire que si  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifie  $p(D)u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\alpha$  de longueur inférieure ou égale à  $m - n - 1$ .

*Remarque.* L'estimation ci-dessus est bien sûr loin d'être optimale. On a en fait  $\partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour  $|\alpha| \leq m - 1$  et « presque » pour  $|\alpha| \leq m$ .

**1.2** Soit  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , pour tout entier  $k$ ,  $\partial_j^k u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Prouver que  $\partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . (Indication : considérer l'opérateur  $P_k = \sum_{j=1}^n \partial_j^{2k}$ .)

**2.1 a)** Soit  $a = a(x, \xi) \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . On écrit  $n = n_1 + n_2$  avec  $n_2 \geq 1$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  avec  $\xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ . On suppose que  $a$  ne dépend pas de  $\xi_2$ . Montrer que  $a$  est différentiel d'ordre  $[m]$ .

b) Soit  $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vérifiant

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi_1|)^{m - |\beta|},$$

avec les notations de  $a$ . Soit  $\chi \in S^0(\mathbb{R}_\xi^n)$ , à support dans  $\{|\xi_2| \leq C|\xi_1|\}$ , pour un certain  $C > 0$ . Montrer que  $a(x, \xi)\chi(\xi) \in S^m$ . (On justifiera l'existence d'un tel  $\chi$ .)

**2.2** Soient  $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^n)$ , de support contenu dans  $\{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ , et  $\chi$  ne s'annule pas sur  $S^{n-1}$ .

Pour  $\lambda \geq 1$ , on pose  $a_\lambda(x, \xi) = \chi(\xi) a(x, \lambda\xi)$ . Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

i)  $a \in S^m$ .

ii)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\|a_\lambda\|_{C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \leq C_k \lambda^m$ .

**2.3** Soit  $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vérifiant :  $\exists m \in \mathbb{R}$

i)  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\left| \partial_x^\alpha a(x, \xi) \right| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^m$ .

ii)  $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $\left| \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}$ .

Montrer que  $a \in S^m$ . (Utiliser l'exercice 2.2, et l'exercice 1.2.)

2.4 a) Soit  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ . On suppose  $f$  et  $\partial^\alpha f (|\alpha| = k)$  bornés. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $P_x(h) = \sum_{1 \leq |\beta| \leq k-1} \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!} h^\beta$ . Montrer que la famille  $(P_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$  est bornée et en déduire

$$\forall \beta, 1 \leq \beta \leq k-1, \|\partial^\beta f\|_{L^\infty} \leq C \left( \|f\|_{L^\infty} + \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \right).$$

En changeant  $x$  en  $\lambda x$  ( $\lambda$  à choisir) prouver que

$$\|\partial^\beta f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{1-|\beta|/k} \left( \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \right)^{|\beta|/k}.$$

b) Soit  $p = p(x, \xi) \in S^m$  telle qu'il existe  $\mu < m$  vérifiant  $|p(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^\mu$ . Montrer que,  $\forall \varepsilon > 0, p \in S^{\mu+\varepsilon}$  (on pourra utiliser l'exercice 2.2).

c) A quelle question naturelle la fonction  $\xi \mapsto e^{i(\text{Log}|\xi|)^2}$  répond-elle ?

2.5 Soient  $C_0 > 0, \Omega = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, |\text{Re} \zeta| > C_0 |\text{Im} \zeta|\}$  et  $a = a(\zeta)$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  vérifiant :

$$\forall \zeta \in \Omega, |\zeta| \geq 1, |a(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^m.$$

Montrer que  $(1 - \chi(\xi)) a(\xi) \in S^m$  ( $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vaut 1 près de  $\xi = 0$ ).

2.6 Cet exercice étend le lemme du paragraphe 2.3 au cas de fonctions holomorphes dans un secteur saillant de  $\mathbb{C}$ . Soit  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im} z| < C_0 \text{Re} z\}$ , où  $C_0 > 0$  est donné.

a) Pour  $\alpha > 0$ , on pose  $f_\alpha(z) = e^{-\alpha/z}$ . Vérifier que  $f_\alpha(z)/z^k \rightarrow 0, z \rightarrow 0, z \in \Omega$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et que  $f_\alpha(z) \rightarrow 1$  quand  $\alpha \rightarrow 0^+$  uniformément sur tout compact de  $\Omega$ .

b) Soit  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Montrer qu'il existe une suite  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de réels positifs telle que la série  $\sum_{j=0}^\infty b_j \frac{z^j}{j!} (1 - f_{\alpha_j}(z))$  converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$ . Conclusion ?

2.7 Soit  $m_j$  une suite décroissante de réels tendant vers  $-\infty$ , et soit  $a_j \in S^{m_j}$ . On suppose qu'il existe  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vérifiant :

- i)  $\exists \mu \in \mathbb{R}, a \in S^\mu$ .
- ii)  $\exists (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de réels tendant vers  $-\infty$ , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| a(x, \xi) - \sum_{j < n} a_j(x, \xi) \right| \leq C_n (1 + |\xi|)^{\mu_n}.$$

Montrer que  $a \sim \sum a_j$ . (On pourra utiliser l'exercice 2.4.)

2.8 Pour  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , on pose  $p(\xi, \tau) = \frac{1}{1 + \xi^2 + i\tau}$ .

a) Etablir une relation de récurrence entre  $\partial_\xi^{k+2} p$ ,  $\partial_\xi^{k+1} p$ ,  $\partial_\xi^k p$ . En déduire que  $p$  n'appartient à aucun  $S^m(\mathbb{R}_\xi^2, \tau)$ . (On pourra raisonner par l'absurde et étudier la décroissance des  $\partial_\xi^k p(\tau^{1/2}, \tau)$  pour  $\tau \rightarrow +\infty$ .)

b) Montrer qu'on a les estimations suivantes :

$$\forall j, \forall k \quad |\partial_\xi^k \partial_\tau^j p(\xi, \tau)| \leq C_{j,k} (1 + |\xi| + |\tau|)^{-1-k/2-j}.$$

2.9 Pour  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\delta \in [0, 1]$ , on note  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  telles que :

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{-\rho|\beta| + \delta|\alpha|}.$$

a) Soit  $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vérifiant  $|b| \geq C(1 + |\xi|)^\mu$  ( $C > 0$ ) et :

$$\exists \rho, \delta, \forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b| \leq C_{\alpha\beta} |b(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{-\rho|\beta| + \delta|\alpha|}.$$

Montrer que  $1/b \in S_{\rho, \delta}^{-\mu}$ .

b) Dans quelles classes  $S_{\rho, \delta}^m$  se trouvent les symboles  $\varphi(x)(1 + |x|^{2\mu} |\xi|^{2\nu})^{-1}$  ( $\mu, \nu$  entiers  $\geq 0$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ) ?

3.1 Cet exercice établit le type de conditions vérifiées par le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel (voir paragraphe 3.2.2) sans chercher à caractériser l'ordre de l'opérateur.

a) Soit  $a(x, \xi) \in \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m (\equiv S^{+\infty})$ . On considère le noyau  $K$  de  $a(x, D)$ ,

donné par la formule (3.2.2). Montrer qu'il existe un entier  $N$  tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n,$$

$$|\beta| \geq N, (\partial_x + \partial_y)^\alpha (x-y)^\beta K(x, y) \in C^{|\beta| - N}(\mathbb{R}^{2n}) \quad (*)$$

(i.e. est continue bornée sur  $\mathbb{R}^{2n}$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $|\beta| - N$ ).

b) Inversement, soit  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  vérifiant les conditions (\*) pour un certain  $N$ . On note  $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  la distribution définie par (3.2.2'). Montrer qu'il existe un entier  $M$  tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \quad |\beta| \geq M, \forall \gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| \leq |\beta| - M,$$

$$\xi^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in L^\infty.$$

En déduire que  $a \in S^{+\infty}$ .

*Remarque.* Si l'on cherche à déterminer précisément l'ordre de  $a$  à partir de l'entier  $N$  intervenant en  $a$ ) et  $b$ ), on constate un important décalage (de l'ordre de  $n$ ). Cela tient au fait que l'espace  $L^\infty$  se comporte très mal vis-à-vis de l'analyse de Fourier.

**3.2** L'exercice 3.1 montre que le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel est  $C^\infty$  hors de la diagonale  $\{x = y\}$ .

Soit  $a \in S^0$ , et  $K$  le noyau de  $a(x, D)$ . On se propose d'étudier ici le comportement de  $K(x, y)$  lorsque  $(x, y)$  s'approche de la diagonale, i.e. lorsque  $z = x - y$  est proche de 0.

On pose  $H(x, z) = K(x, x - z)$ . Pour  $\lambda \geq 1$ , à choisir, on note  $H = H_1 + H_2$  où :

$$H_1(x, z) = \int e^{iz \cdot \xi} a(x, \xi) \chi(\xi/\lambda) d\xi / (2\pi)^n$$

$$H_2(x, z) = \int e^{iz \cdot \xi} a(x, \xi) (1 - \chi(\xi/\lambda)) d\xi / (2\pi)^n,$$

où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vaut 1 pour  $|\xi| \leq C$ .

a) En intégrant par parties, montrer que, pour tout  $N$ ,

$$|H_2(x, z)| \leq C_N \lambda^{n-2N} |z|^{-2N}.$$

b) Vérifier que  $|H_1(x, z)| \leq C \lambda^n$  et conclure que

$$|H(x, z)| \leq C/|z|^n.$$

c) Montrer de même que  $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y)| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{|x-y|^{n+|\beta|}}$  pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

*Remarque.* Les opérateurs dont le noyau  $K$  vérifie les conditions décrites en c) forment une classe beaucoup plus générale que celles des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0. En particulier, ils ne sont pas en général bornés sur  $L^2$  (à la différence de ces derniers, voir le paragraphe 5), et cette propriété est très délicate à décrire en fonction de la distribution  $K$  (voir [DJ]). Un exemple simple est étudié à l'exercice 5.4.

**4.1** Montrer que, si  $a_1(x, D)$  et  $a_2(x, D)$  sont des opérateurs différentiels, alors  $a_1(x, D) a_2(x, D) = b(x, D)$  où  $b(x, \xi) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha a_2$

(noter que la somme est finie).

**4.2** Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel nilpotent (i.e.  $\exists k \in \mathbb{N}/A^k = 0$ ). Que peut-on dire de  $A$ ? Donner un exemple non trivial avec  $k = 2$ . (On pourra utiliser l'exercice 2.4.)

4.3 Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel idempotent (i.e.  $A^2 = A$ ). Montrer que  $A$  ou  $1 - A$  est d'ordre  $-\infty$ .

4.4 Sans utiliser la preuve du théorème 4.1 dans l'appendice, montrer les résultats suivants :

a) L'application

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \rightarrow S^{m_1 + m_2}$$

$$(a_1, a_2) \mapsto a_1 \# a_2 \quad (= \text{symbole de } a_1(x, D) a_2(x, D)),$$

est continue (utiliser le théorème du graphe fermé et par exemple la proposition 3.1).

b) L'application

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \rightarrow S^{m_1 + m_2 - 1}$$

$$(a_1, a_2) \mapsto a_1 \# a_2 - a_1 a_2,$$

est continue.

#### 4.5 Intégrales oscillantes

Caractériser comme suit l'espace  $A_\rho^m$  de l'appendice lorsque  $\rho > 1$  :

$$\text{si } m < 0, \quad A_\rho^m = \mathcal{S}$$

$$\text{si } m \geq 0, \quad A_\rho^m = \mathcal{S} \oplus \mathcal{P}_{[m/\rho]},$$

où  $\mathcal{P}_d$  est l'espace des fonctions polynomiales de degré  $d$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

4.6 a) Vérifier l'énoncé suivant du théorème 1 « avec paramètre » :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et soient  $\varphi = \varphi(x, \theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  et  $a = a(x, \theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$  vérifiant :

- i)  $\varphi$  est  $\mu$ -homogène en  $\theta$ , et  $d_\theta \varphi(x, \theta) \neq 0$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .
- ii) Il existe  $\rho > 1 - \mu$  tel que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ ,  $x \in K$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\theta|)^{m - \rho |\beta|}.$$

Alors la fonction  $I_\varphi(a)(x) = \int e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

b) On se propose de généraliser le résultat ci-dessus lorsque la condition i) est relâchée en

- i')  $\varphi$  est  $\mu$ -homogène en  $\theta$ , et  $d_{x, \theta} \varphi(x, \theta) \neq 0$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

On va montrer qu'alors  $I_\varphi(a)$  peut être encore définie, mais comme distribution sur  $\Omega$ , l'application  $I_\varphi : A_\rho^{+\infty} \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  étant continue.

Soit  $a$  vérifiant ii) avec  $m < -N$ . Alors  $I_\varphi(a) \in C^0(\Omega)$  et, si  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , on a :

$$\int I_\varphi(a) u \, dx = \iint e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) u(x) \, d\theta \, dx.$$

Soit  $x_0 \notin \text{supp } u$ , et soit  $U$  un voisinage ouvert de  $\text{supp } u$  relativement compact dans  $\Omega$ . On choisit une fonction  $\chi = \chi(t, \theta) \in C^\infty((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N) \setminus \{0\})$  homogène de degré 0 en  $(t, \theta)$ , telle que  $\chi = 1$  si  $x_0 + \frac{t}{|\theta|} \in \text{supp } u$ ,  $\chi = 0$  si  $x_0 + \frac{t}{|\theta|} \notin U$ . On pose alors :

$$\begin{aligned} \psi(t, \theta) &= \varphi\left(x_0 + \frac{t}{|\theta|}, \theta\right) \chi(t, \theta) \\ b(t, \theta) &= \frac{1}{|\theta|^N} a\left(x_0 + \frac{t}{|\theta|}, \theta\right) u\left(x_0 + \frac{t}{|\theta|}\right). \end{aligned}$$

Montrer que  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+N} \setminus \{0\})$ , qu'elle est homogène de degré  $\mu$  par rapport à  $(t, \theta)$ , et que  $d_{t, \theta} \psi \neq 0$  si  $x_0 + \frac{t}{|\theta|} \in \text{supp } u$ . Montrer que  $b \in A_\rho^{m-N}(\mathbb{R}^{n+N})$ , et que

$$\int I_\varphi(a) u \, dx = \iint e^{i\psi} b \, dt \, d\theta.$$

Conclusion.

c) Montrer que le support singulier de  $I_\varphi(a)$  est contenu dans l'ensemble  $\{x \in \Omega, \exists \theta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}$ .

*Remarque.* Les distributions du type  $I_\varphi(a)$  jouent un rôle particulièrement important en analyse, spécialement lorsque  $\mu = 1, \rho = 1$  (intégrales de Fourier). Des exemples sont donnés au chapitre II, paragraphes B.1 et B.2.

4.7 Soit  $\alpha$  un nombre réel. On note  $S_\alpha$  le support singulier de la transformée de Fourier de la fonction  $f_\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_\alpha(x) = \cos |x|^\alpha$ . Montrer que  $S_\alpha = \emptyset$  si  $\alpha > 1$ ,  $S_\alpha = \{\pm 1\}$  si  $\alpha = 1$ ,  $S_\alpha \subset \{0\}$  si  $\alpha < 1$  (on pourra utiliser l'exercice 1.2). L'exercice suivant prouve qu'en fait  $S_\alpha = \{0\}$  si  $\alpha < 1$ .

4.8 Soit  $a = a(\theta) \in A_\rho^m, \rho > 0$ . On suppose que  $\hat{a}$  est  $C^\infty$  près de 0. Montrer que  $a \in \mathcal{S}$ . (Indication : estimer  $a(\theta) - (\hat{\varphi} * a)(\theta)$ , où  $\varphi \in C_0^\infty, \int \hat{\varphi} = 1$ , lorsque  $\theta \rightarrow \infty$ .)

4.9 Soit  $q$  une forme quadratique non-dégénérée sur  $\mathbb{R}^n$ . L'exercice 4.6 montre que la transformée de Fourier de  $e^{iq/2}$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . (Pourquoi ?) Nous allons la calculer explicitement.

a) On appelle  $\hat{q}$  la forme duale de  $q$ , i.e. : si  $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ ,  $\hat{q}(\xi) = \langle A^{-1}\xi, \xi \rangle$ .

Vérifier que  $q(x) - 2 \langle x, \xi \rangle = q(x - A^{-1}\xi) - \hat{q}(\xi)$ , et en déduire que :

$$\widehat{e^{iq/2}} = (2\pi)^{n/2} e^{i\sigma\pi/4} |\det q|^{-1/2} e^{-i\hat{q}/2}$$

où  $\sigma$  est la signature de  $q$ , et  $\det q$  est le déterminant de  $q$  dans une base orthonormée.

(On calculera  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2/2} dx$  par prolongement analytique à partir de l'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$ .)

b) Déduire de a) la formule suivante :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{|\alpha| = 2k} \left( \int e^{iq(x)/2} \frac{x^\alpha}{\alpha!} dx \right) \xi^\alpha &= \\ &= (2\pi)^{n/2} e^{i\sigma\pi/4} |\det q|^{-1/2} \times \frac{(i\hat{q}(\xi))^k}{2^k k!} \end{aligned}$$

qui nous sera utile pour établir la formule de la phase stationnaire (voir exercice 7.1).

**4.10** En reprenant la preuve du théorème 1, montrer le résultat suivant :

Soient  $\varphi = \varphi(\theta)$  et  $a = a(\theta, \lambda)$  deux fonctions vérifiant les mêmes hypothèses qu'au théorème,  $a$  variant avec le paramètre  $\lambda \in [1, +\infty[$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } \rho \geq 0, \quad & |\partial^\alpha a(\theta, \lambda)| \leq C_\alpha (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha|} \\ \text{si } \rho < 0, \quad & |\partial^\alpha a(\theta, \lambda)| \leq C_\alpha (1 + |\theta| + \lambda)^{m - \rho|\alpha|}. \end{aligned}$$

Soit  $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  valant 1 près de  $\theta = 0$ . Montrer que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \int e^{i\varphi(\theta)} a(\theta, \lambda) (1 - \chi_0(\theta/\lambda)) d\theta \right| \leq C_N \lambda^{-N}.$$

#### 4.11 Théorèmes du calcul symbolique

Soit  $p = p(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . On dit que  $p \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$  si

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma p(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (1 + |\xi|)^{m - |\gamma|}.$$

Sous cette hypothèse, on considère l'opérateur  $A$  de noyau

$$K(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} p(x, y, \xi) d\xi.$$

Montrer que  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$ , et que son symbole  $a(x, \xi)$  vérifie :

$$a(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha D_\xi^\alpha p(x, y, \xi)_{y=x}.$$

Vérifier que le théorème ci-dessus entraîne les théorèmes 3.2.3 et 4.1. (Pour ce dernier, on remarquera que, si  $A = a(x, D)$  et  $C = c(x, D)$  sont deux opérateurs pseudo-différentiels, alors  $AC^*$  est du type étudié ci-dessus avec  $p(x, y, \xi) = a(x, \xi) \overline{c(y, \xi)}$ .)

**4.12\*** Soient  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\delta \in [0, 1]$ ; on définit comme à l'exercice 2.9, la classe  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$  par  $p = p(x, y, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$  si

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma p(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\gamma| + \delta(|\alpha| + |\beta|)}.$$

On définit l'opérateur  $A$  comme à l'exercice 4.11.

a) Vérifier que l'intégrale donnant le symbole  $a(x, \xi)$  de  $A$  en fonction de  $p$  peut encore être interprétée à l'aide du théorème 1.

b) On suppose  $\delta = 0$ . Montrer que  $a \in S_{\rho, 0}^m$ .

c) On suppose  $\rho \geq \delta > 0$ . On note  $\lambda = |\xi|$ , et on choisit  $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  valant 1 pour  $|y| + |\eta| \leq 1/2$ , et valant 0 pour  $|y| + |\eta| \geq 3/4$ . En utilisant l'exercice 4.10, montrer que :

$$\left| a(x, \xi) - \int e^{iy \cdot \eta} p(x, x - y, \xi - \eta) \chi_0(y/\lambda, \eta/\lambda) dy d\eta / (2\pi)^n \right| \leq C_N \lambda^{-N},$$

pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .

Poser  $y = \lambda^{-\delta} y'$ ,  $\eta = \lambda^\delta \eta'$  dans l'intégrale comparée ci-dessus à  $a(x, \xi)$  et vérifier que la fonction

$$q(x, y, \xi, \eta) = p(x, x - \lambda^{-\delta} y, \xi - \lambda^\delta \eta) \chi_0(\lambda^{-\delta} y/\lambda, \lambda^\delta \eta/\lambda),$$

vérifie les estimations :

$$\forall \alpha, \beta, x, y, \xi, \eta \quad |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta q| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^m.$$

Conclure que  $|a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^m$ , puis que  $a \in S_{\rho, \delta}^m$ .

d) On suppose  $\rho > \delta \geq 0$ . Montrer que  $a$  vérifie encore :

$$a(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha D_\xi^\alpha p(x, y, \xi)_{y=x}.$$

*Remarque.* Cet exercice montre en particulier que le passage à l'adjoint et le produit laissent stable la classe des opérateurs pseudo-différentiels de type  $(\rho, \delta)$ , lorsque  $\rho \geq \delta$ ,  $\delta < 1$ . De plus, si  $\rho > \delta$ , de tels opérateurs jouissent d'un calcul symbolique tout à fait analogue à celui exposé dans le cours aux paragraphes 3 et 4. Notons enfin que l'hypothèse  $\delta < 1$  est cruciale : l'adjoint d'un opérateur de type  $(1, 1)$  n'est pas en général un opérateur pseudo-différentiel de type  $(1, 1)$ . (Pour une étude détaillée, voir [H8].)

### 5.1 Continuité $L^2$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  avec  $|\xi_0| = 1$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\lambda \geq 1$ . On considère  $u_\lambda(x) = \lambda^{n/4} e^{i\lambda x \cdot \xi_0} \varphi(\lambda^{1/2}(x - x_0))$ .

a) Calculer  $|u_\lambda|_0$ .

b) Soit  $a \in S^m$ . Montrer qu'il existe  $b_\lambda \in S^m$  tel que :

$$e^{-i\lambda x \cdot \xi_0} a(x, D) u_\lambda = \lambda^{n/4} b_\lambda(y, D) \varphi|_{y=\lambda^{1/2}(x-x_0)}.$$

Montrer qu'il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que :

$$|b_\lambda(y, \eta) - a(x_0, \lambda \xi_0)| \leq C \lambda^{m-1/2} (1 + |y| + |\eta|)^M.$$

(On pourra distinguer deux cas, suivant que  $|\eta|$  est inférieur ou supérieur à  $\lambda^{1/2}/2$ .)

c) En déduire  $(a(x, D) u_\lambda, u_\lambda) = a(x_0, \lambda \xi_0) |\varphi|_0^2 + o(\lambda^{m-1/2})$ .

d) Montrer que si  $a(x, D)$  est borné sur  $L^2$ , alors  $a \in S^\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $|a(x, \xi)| \leq C$  (utiliser l'exercice 2.4, en commençant par remarquer que  $|a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-1/2}$ ).

**5.2** Cet exercice concerne la première démonstration (historiquement) du théorème de continuité  $L^2$  pour un opérateur pseudo-différentiel : le symbole est supposé homogène de degré 0.

Soit donc  $a = a(x, \xi) \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , coïncidant pour  $|\xi| \geq 1$  avec une fonction  $\sigma(x, \xi)$  homogène de degré 0 en  $\xi$ . (Remarquer que ce degré d'homogénéité permet de définir  $\sigma(x, D)$ .)

a) Montrer que, si  $\sigma(x, D)$  est borné sur  $L^2$ , alors  $a(x, D)$  est borné sur  $L^2$ . (On pourra étudier  $a(x, D) - \sigma(x, D) \chi(D)$  où  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  vaut 1 pour  $|\xi| \geq 1$  et 0 près de  $\xi = 0$ .)

b) On suppose  $n = 1$ . Montrer que  $\sigma(x, D)$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

c) On suppose  $n \geq 2$ , et on admet le théorème suivant la décomposition en harmoniques sphériques.

*Il existe une base hilbertienne  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(S^{n-1})$  formée de fonctions  $C^\infty$  sur  $S^{n-1}$ , telle que les coefficients de Fourier de toute fonction  $f \in C^\infty(S^{n-1})$  soient à décroissance rapide quand  $k \rightarrow +\infty$ , alors que  $\|h_k\|_{L^\infty(S^{n-1})} = O(k^M)$  pour un certain  $M$ .*

Pour  $n = 2$ , il se réduit à la décomposition habituelle en série de Fourier.

Montrer que l'on peut écrire :

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x) h_k(\xi/|\xi|),$$

où  $\|\sigma_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  est à décroissance rapide en  $k$ . En déduire que  $\sigma(x, D)$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

*Remarque.* On notera que la démonstration ci-dessus ne nécessite pour  $a$  ou  $\sigma$ , aucune régularité en  $x$ , sinon d'être dans  $L^\infty$ . Cela tient à l'hypothèse d'homogénéité en  $\xi$  faite sur  $\sigma$ .

Plus précisément, si  $a$  vérifie seulement les estimations

$$\forall \alpha, \quad |\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|},$$

l'opérateur  $a(x, D)$  n'est pas nécessairement borné sur  $L^2$ .

En revanche on montre (voir [W], théorème 9) qu'il l'est toujours si l'on ajoute les estimations suivantes :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall \alpha, \quad |\partial_{x_i} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}.$$

**5.3\*** Cet exercice donne une démonstration du théorème 5.1 qui n'utilise pas le calcul symbolique.

Soit  $a \in C^{2n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vérifiant  $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq C$  pour  $\alpha \in \{0, 1\}^n$ ,  $\beta \in \{0, 1\}^n$ . On se propose de montrer que  $a(x, D)$  est borné sur  $L^2$ . On pose  $\|a\| = \sum_{\alpha \in \{0, 1\}^n, \beta \in \{0, 1\}^n} \sup |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a|$ .

a) Préliminaire. Soient  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Vérifier que

$$\tilde{u}(x, \xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} \varphi(x - y) u(y) dy \quad \text{et}$$

$$\tilde{v}(x, \xi) = \int e^{ix \cdot \eta} \varphi(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta,$$

sont dans  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ .

b) Vérifier qu'il suffit de prouver l'inégalité suivante :

$$\forall a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \forall u \in \mathcal{S}, \forall v \in \mathcal{S},$$

$$|(a(x, D) u, v)| \leq C \|a\| \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

c) On pose  $\varphi(x) = \prod_{j=1}^n (1 + ix_j)^{-1}$ , et  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont alors définies comme à la question a). On écrit :

$$(a(x, D) u, v) = \iiint e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) u(y) \overline{v(x)} dx dy \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

En intégrant par parties en  $\xi$ , montrer que :

$$(a(x, D) u, v) = \iint e^{ix \cdot \xi} b(x, \xi) \tilde{u}(x, \xi) \overline{\tilde{v}(x)} dx d\xi,$$

où  $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vérifie  $\sum \sup |\partial_x^\alpha b| \leq C \|a\|$ .

d) En écrivant  $v(x) = \int e^{ix \cdot \eta} \hat{v}(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$  dans l'intégrale ci-dessus, et en intégrant par parties en  $x$ , montrer que :

$$(a(x, D) u, v) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \iint e^{ix \cdot \xi} c_\alpha(x, \xi) \partial_x^\alpha \tilde{u}(x, \xi) \overline{\hat{v}(x, \xi)} dx d\xi,$$

où  $c_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $\sup |c_\alpha| \leq C \|a\|$ . Conclure.

*Remarque.* Cet exercice montre bien sûr beaucoup plus que le théorème 5.1 : on obtient ainsi la continuité  $L^2$  des opérateurs de la classe  $S_{0,0}^0$  (cf. Ex. 2.9 et [W]) auxquels la démonstration du théorème 5.1 ne s'adapte pas. En revanche l'exercice 4.12 met en évidence un calcul symbolique pour la classe  $S_{\rho,\delta}^m$  lorsque  $1 \geq \rho > \delta \geq 0$ , qui permet d'obtenir la continuité  $L^2$  des opérateurs à symbole dans  $S_{\rho,\delta}^0$ .

Lorsque  $1 > \rho = \delta > 0$ , la démonstration de l'exercice 5.3 s'adapte ([W]) tandis que la continuité  $L^2$  est fautive dans les autres cas  $0 \leq \rho < \delta \leq 1$  et  $\rho = \delta = 1$ . (Voir COIFMAN-MEYER [CM].)

### 5.4\* Intégrales singulières

Soit  $k \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , localement lipschitzienne, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |k(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad |\partial_x k(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

$(k(x - y))$  vérifie donc une partie des estimations établies pour le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 en dehors de la diagonale  $\{x = y\}$  (voir Ex. 3.2.).

On se propose d'étudier l'existence et la continuité  $L^2$  de l'opérateur « valeur principale »

$$Au(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} k(x-y) u(y) dy .$$

a) Montrer que  $Au$  existe dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si la condition suivante est réalisée :

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} k(x) dx \text{ a une limite lorsque } \varepsilon \text{ tend vers } 0 . \quad (*)$$

(Comparer  $Au(x)$  à  $u(x) \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1} k(y) dy$ .) Vérifier qu'alors la famille de fonctions  $k_\varepsilon = k \cdot 1_{\{|x| \geq \varepsilon\}}$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vers une distribution notée  $k_0$ , et que  $A$  est borné sur  $L^2$  si et seulement si  $\hat{k}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

b) Vérifier que  $\hat{k}_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , et que  $|\hat{k}_\varepsilon(\xi)| \leq C$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\xi/|\xi| \geq 1/\varepsilon$ . (On pourra estimer  $\xi_j \hat{k}_\varepsilon(\xi)$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .)

c) Si  $|\xi| \leq 1/\varepsilon$ , on pose  $\hat{k}_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon(\xi) + J(\xi)$ , où  $J(\xi) = \int_{|x| \geq 1/|\xi|} k(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$ . Vérifier que  $|J(\xi)| \leq C$  et que :

$$\left| I_\varepsilon(\xi) - \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/|\xi|} k(x) dx \right| \leq C .$$

En déduire que, sous la condition (\*), l'opérateur  $A$  est borné sur  $L^2$  si et seulement si la condition suivante est réalisée :

$$\int_{1 \leq |x| \leq R} k(x) dx \text{ reste bornée pour } R \rightarrow +\infty . \quad (**)$$

Que deviennent (\*) et (\*\*) lorsque  $k$  est homogène de degré  $-n$  ?

d) Vérifier que l'opérateur  $A$  associé à  $k(x) = \frac{|x|^{i\gamma-n}}{1 + |\text{Log } |x||}$  est bien défini et borné sur  $L^2$ . ( $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .)

e) On prend  $k(x) = |x|^{i\gamma-n}$ . Vérifier que  $k$  ne satisfait pas la condition (\*), mais que, pour tout nombre complexe  $\alpha$  de module 1, on peut définir

$$A_\alpha u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \varepsilon_n} k(x-y) u(y) dy ,$$

où  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$  et  $\varepsilon_n^{i\gamma} \rightarrow \alpha$ . Vérifier que  $A_\alpha - A_\beta = \frac{\alpha - \beta}{i\gamma}$  et que les  $A_\alpha$  sont bornés sur  $L^2$ .

**5.5** Soit  $B(L^2)$  l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur  $L^2$ , muni de sa structure naturelle d'espace de Banach.

a) Vérifier que l'application

$$\begin{aligned} S^0 &\rightarrow B(L^2) \\ a &\mapsto a(x, D), \end{aligned}$$

est continue. Son image est-elle fermée ?

b) Soit  $a \in S^0$ . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow B(L^2) \\ \varepsilon &\mapsto a(x, \varepsilon D), \end{aligned}$$

n'est pas en général continue, mais qu'elle l'est si on munit  $B(L^2)$  de la topologie de la convergence simple.

**5.6** Si  $s$  est entier, montrer que  $H^s = \{u \in L^2, D^\alpha u \in L^2, |\alpha| \leq s\}$ .

**5.7** Si  $s > n/2$ , montrer que  $H^s$  est contenu dans l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, et qu'on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C |u|_s.$$

**5.8** A quel espace de Sobolev appartient  $\delta$  dans  $\mathbb{R}^n$  ?

**5.9** Cet exercice détermine tous les opérateurs pseudo-différentiels  $P$  locaux, i.e. tels que  $\text{supp } Pu \subset \text{supp } u$  pour tout  $u \in \mathcal{S}$ .

Par exemple, les opérateurs différentiels sont locaux. On va montrer qu'il n'y en a pas d'autres. (C'est aussi une conséquence d'un théorème général de PEETRE.)

a) Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m < -n/2$ , local.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et soit  $u \in \mathcal{S}$ . Montrer qu'il existe une suite  $u_k \in \mathcal{S}$  telle que  $u_k = 0$  près de  $x_0$  pour tout  $k$ , et  $u_k \rightarrow u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . En déduire que  $Pu(x_0) = 0$ . (Utiliser l'Ex. 5.7)

b) Soit  $P$  local d'ordre  $< 0$ . Montrer que  $P = 0$ . (Utiliser l'Ex. 4.2.)

c) Soit  $P$  local d'ordre  $m < k \in \mathbb{N}$ . Soient  $f_1, \dots, f_k \in C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , bornées ainsi que leurs dérivées. Montrer que  $\text{Ad } f_1 \dots \text{Ad } f_k P = 0$ . (On rappelle que  $(\text{Ad } A) B = [A, B] = AB - BA$ .) En déduire que si  $u \in \mathcal{S}$  vérifie  $u^{(j)}(x_0) = 0$  pour  $j \leq k - 1$ , alors  $Pu(x_0) = 0$ . Conclure que

$P = \sum_{|\alpha| \leq k-1} a_\alpha D^\alpha$  où les  $a_\alpha$  sont  $C^\infty$ , bornées ainsi que leurs dérivées.

(On pourra utiliser la formule de Taylor.)

**5.10** Soit  $r \in S^{-\infty}$  tel que,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r(x, 0) = 1$ . On pose, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho_\varepsilon = r(x, \varepsilon D)$ .

a) Montrer les inégalités  $|\rho_\varepsilon u|_0 \leq C |u|_0$ ,  $|u - \rho_\varepsilon u|_0 \leq C_m \varepsilon^m |u|_m$  pour tout  $u \in \mathcal{S}$ ,  $m > 0$ . En déduire que pour tout  $u \in L^2$ ,  $\rho_\varepsilon u \rightarrow u$  dans  $L^2$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et que, si  $A$  est d'ordre négatif,  $\rho_\varepsilon A$  tend vers  $A$  en norme.

b) Soit  $L$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. Montrer que  $|[L, \rho_\varepsilon] u|_0 \leq C |u|_0$  pour tout  $u \in \mathcal{S}$ . On note  $D(L) = \{u \in L^2, Lu \in L^2\}$ , et on munit  $D(L)$  de la norme  $|u|_0 + |Lu|_0$ . Montrer que  $D(L)$  est un espace de Hilbert, dans lequel  $H^{+\infty}$ , puis  $\mathcal{S}$ , sont denses.

**5.11** Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. Pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$H^{s,k}(P) = \{u \in H^s, P^j u \in H^s \text{ pour tout } j \leq k\}.$$

a) Montrer que si  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0,  $u \in H^{s,k}(P)$  entraîne  $Au \in H^{s,k}(P)$ . (En particulier :  $u \in H^s$  et  $Pu \in H^{s+k-1}$  entraîne  $Au \in H^{s,k}(P)$ .)

b) Soient  $p, q \in S^1$  tels qu'il existe  $a \in S^0$  vérifiant  $p - aq \in S^0$ . Montrer que  $H^{s,k}(q(x, D)) \subset H^{s,k}(p(x, D))$ .

**5.12 Opérateurs elliptiques et inégalité de Gårding**

Soit  $a \in S^0$ .

a) On suppose que  $a(x, D)$  satisfait une inégalité de Gårding :  $\forall u \in \mathcal{S}$ ,  $\text{Re}(a(x, D)u, u) + C|u|_{-\delta}^2 \geq c_0|u|_0^2$ . Montrer que  $\text{Re} a(x, \xi) \geq c_0$  pour  $|\xi|$  assez grand (utiliser l'Ex. 5.1).

b) On suppose que  $a(x, D)$  satisfait une inégalité de type elliptique  $|u|_0 \leq C(|a(x, D)u|_0 + |u|_{-\delta})$ . Montrer que  $a$  est elliptique d'ordre 0.

c) Reprendre les questions a) et b) avec  $a \in S^m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

**5.13** Soit  $a \in S^m$  un symbole vérifiant  $\text{Re} a(x, \xi) \geq C|\xi|^m$  pour  $\xi$  assez grand, et soit  $k$  un entier  $> 1$ . Montrer qu'il existe  $b \in S^{m/k}$  tel que  $b(x, D)^k = a(x, D)$  modulo un opérateur d'ordre  $-\infty$ .

**5.14** Soit  $a \in S^0$  tel que  $|a(x, \xi)| \geq C > 0$  pour tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . On va montrer que, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $a(x, \varepsilon D)$  est inversible. (Noter

que ce n'est pas une conséquence du fait que  $|a(x, 0)| \geq C$ ; voir exercice 5.5 b)).

a) On pose, pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $a_\varepsilon(x, \xi) = a(x, \varepsilon\xi)$ . Montrer que  $q_\varepsilon = \frac{a_\varepsilon - a_0}{\varepsilon}$  est une famille bornée de  $S^1$  pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ .

b) Vérifier que  $a_\varepsilon \# 1/a_\varepsilon = 1 + \varepsilon(q_\varepsilon \# 1/a_\varepsilon - q_\varepsilon/a_\varepsilon)$  et en déduire qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que :  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $a_\varepsilon(x, D)$  soit un isomorphisme de  $L^2$ .

### 6.1 Partitions de l'unité

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts relativement compacts recouvrant  $\Omega$ . On va montrer qu'il existe une famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de fonctions telle que :

i)  $\forall i \in I, \varphi_i \in C_0^\infty(U_i), 0 \leq \varphi_i \leq 1$ .

ii) La famille  $(\text{supp } \varphi_i)$  est localement finie. (C'est-à-dire que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ ,  $K \cap \text{supp } \varphi_i = \emptyset$  sauf pour un nombre fini de  $i \in I$ .)

iii) Dans  $\Omega$ ,  $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1$ . (Cette somme est bien définie d'après ii).)

a) Montrer qu'on peut supposer  $I = \mathbb{N}$ .

b) On suppose que la famille  $(U_i)$  est localement finie. Montrer qu'il existe une famille  $(V_i)$  d'ouverts telle que  $\forall i \in I, \bar{V}_i \subset U_i$ , et  $\Omega = \bigcup_{i \in I} V_i$ .

(On pourra construire les  $V_i$  par récurrence, de telle sorte que  $\forall n \in \mathbb{N}, \Omega = \bigcup_{i \leq n} V_i \cup \bigcup_{j > n} U_j$ .) Choisir alors  $\psi_i \in C_0^\infty(U_i), \psi_i \geq 0$ , telle

que  $\psi_i > 0$  sur  $V_i$ , et vérifier que  $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\sum_{j \in I} \psi_j}$  répond à la question.

c) Cas général. Construire une suite localement finie  $(A_n)$  d'ouverts relativement compacts de  $\Omega$ , recouvrant  $\Omega$ . Pour chaque  $n$ , on choisit  $I_n \subset I$  fini tel que  $\bar{A}_n \subset \bigcup_{i \in I_n} U_i$ , et l'on pose, si  $i \in I_n, U'_{n,i} = U_i \cap A_n$ .

Montrer que les  $U'_{n,i}, n \in \mathbb{N}, i \in I_n$ , forment un recouvrement localement fini de  $\Omega$ ; choisir une partition de l'unité  $(\varphi'_{n,i})$  comme en b), et poser  $\varphi_i = \sum_{n/i \in I_n} \varphi'_{n,i}$ .

Dans les exercices qui suivent, on note  $\Psi_{ps}^m(\Omega)$  l'espace des opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés sur  $\Omega$ , d'ordre  $m$ .

**6.2 a)** Montrer que la proposition 2.3 se généralise au cas d'éléments de  $S_{\text{loc}}^{+\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .

b) Généraliser les théorèmes de calcul symbolique 3.2.3 et 4.1 à la classe des opérateurs proprement supportés sur  $\Omega$ .

c) Soit  $a \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , et soit  $A \in \Psi_{ps}^m(\Omega)$  admettant  $a$  pour symbole. Montrer qu'il existe  $B \in \Psi_{ps}^m(\Omega)$  vérifiant  $BA = I + R$  (resp.  $AB = I + R$ ), où  $R$  est un noyau  $C^\infty$ , si et seulement si  $a$  vérifie la condition suivante : pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe  $C_K > 0$  et  $R_K$  tels que  $\forall x \in K, |a(x, \xi)| \geq C_K |\xi|^m$  si  $|\xi| \geq R_K$ . (On dit alors que  $a$  — ou  $A$  — est elliptique d'ordre  $m$ .)

d) Soit  $p_m(x, \xi)$ ,  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  une fonction homogène en  $\xi$  de degré  $m$ . Soit  $P \in \Psi_{ps}^m(\Omega)$ , de symbole  $p$ , tel que  $p - \tilde{p}_m \in S_{\text{loc}}^{m-1}$  ( $\tilde{p}_m \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ) est une fonction qui coïncide avec  $p_m$  pour  $|\xi| \geq 1$  : on dit que  $p_m$  est le symbole principal de  $P$ . (Voir paragraphe 7.2.2.) A quelle condition sur  $p_m$  l'opérateur  $P$  est-il elliptique d'ordre  $m$  ?

**6.3 a)** Soit  $A \in \Psi_{ps}^m(\Omega)$ . Montrer que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , pour tout réel  $s$ , il existe  $C_{K,s} > 0$  telle que :

$$\forall u \in C_0^\infty(K), \quad |Au|_s \leq C_{K,s} |u|_{s+m}.$$

b) On note

$$H_{\text{loc}}^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

que l'on munit des semi-normes  $|\varphi u|_s$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Montrer que l'inégalité de la question a) signifie que  $A$  est borné de  $H_{\text{loc}}^{s+m}(\Omega)$  dans  $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ .

**6.4** Cet exercice fournit une caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels locaux par leur action sur  $L^2$ . (Voir [CM].)

a) Soit  $T$  un opérateur linéaire borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , de noyau à support compact dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , on note  $e_\xi$  la fonction définie par  $e_\xi(x) = e^{ix \cdot \xi}$ , et on pose :

$$\sigma_T(x, \xi) = T(e_\xi)(x) e^{-ix \cdot \xi}.$$

Justifier l'existence de  $\sigma_T$ , et vérifier qu'elle est continue en  $\xi$ , à valeurs  $L^2(\mathbb{R}_x^n)$ . Vérifier enfin que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int |\sigma_T(x, \xi)|^2 dx < +\infty,$$

et que,  $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $Tu(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \sigma_T(x, \xi) \hat{u}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$  (remarquer par exemple que, pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle Tu, \varphi \rangle = \langle u, T^* \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) \langle e_\xi, T^* \varphi \rangle d\xi.$$

b) On désigne par  $\mathfrak{E}$  l'espace vectoriel des opérateurs  $T$ , comme en a), tels que, pour toute famille finie  $X_1, \dots, X_k$  de champs de vecteurs, l'opérateur  $ad(X_1) \dots ad(X_k) T$  soit borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

i) Montrer que tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 à noyau supporté dans un compact est dans  $\mathfrak{E}$ .

ii) Montrer que si  $T_1, T_2$  sont dans  $\mathfrak{E}$ ,  $T_1 T_2$  est dans  $\mathfrak{E}$ .

iii) On note  $\Sigma = \{\sigma_T, T \in \mathfrak{E}\}$ . Montrer que  $\Sigma$  est stable par la multiplication par une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et par l'action de  $\partial/\partial x_j$ ,  $\partial/\partial \xi_j$ ,  $\xi_k \partial/\partial \xi_j$  pour tous  $j, k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

iv) En utilisant a), montrer que  $\Sigma \subset S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

c) Énoncer et prouver un résultat analogue à celui de b), dans le cadre des opérateurs proprement supportés sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

d) Soit  $\sigma(\xi) = \exp(i e \langle \xi \rangle) e^{-\langle \xi \rangle^{1/2}}$ ,  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ . Montrer que l'opérateur  $\sigma(D)$  est borné de  $H^s$  dans  $H^t$  pour tous réels  $s$  et  $t$ , et que, pour toute famille finie  $X_1, \dots, X_k$  de champs de vecteurs à symboles dans  $S^1$ , l'opérateur  $ad(X_1) \dots ad(X_k) \sigma(D)$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Le symbole  $\sigma$  appartient-il à  $S^0$ ?

**6.5\*** a) Soient  $s, t$  deux éléments de  $[0, 1[$  vérifiant  $s + t < 1$ . Soient  $A \in \Psi_{ps}^{-m}(\Omega)$ ,  $m = s + t$ ,  $P$  et  $Q \in \Psi_{ps}^1(\Omega)$ ; on suppose que  $P$  et  $Q$  admettent tous deux un symbole principal réel.

Montrer que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe  $C_K > 0$  telle que :

$$\forall u \in C_0^\infty(K), \quad |(Au, PQu)| \leq C_K (|u|_0^2 + |Pu|_{-s}^2 + |Qu|_{-t}^2).$$

En choisissant  $A = E^* E [P, Q]$ , où  $E \in \Psi^{-(m+1)/2}$  est elliptique, en déduire que

$$\forall u \in C_0^\infty(K), \quad |[P, Q]u|_{-(1+s+t)/2} \leq C_K (|u|_0 + |Pu|_{-s} + |Qu|_{-t})$$

(avec d'autres constantes  $C_K$ ).

b) Soient  $X_1, \dots, X_p$  des champs de vecteurs réels  $C^\infty$  sur  $\Omega$ . On suppose qu'en tout point  $x$  de  $\Omega$ , les vecteurs  $X_i(x)$ ,  $[X_j, X_k](x)$  pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j < k \leq p$ , engendrent  $\mathbb{R}^n$ .

i) En utilisant a), avec  $s = t = 0$ , montrer l'estimation :

$$\forall u \in C_0^\infty(K), \quad |u|_{1/2} \leq C_K \left( |u|_0 + \sum_{i=1}^p |X_i u|_0 \right).$$

ii) Soit alors  $u \in L_{loc}^2(\Omega)$  telle que, pour tout  $i$ ,  $X_i u \in L_{loc}^2(\Omega)$ . En appliquant l'inégalité ci-dessus à  $R_\varepsilon u$ , avec

$$R_\varepsilon = \varphi \chi(\varepsilon D) \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \chi \in \mathcal{S} \text{ et } \chi(0) = 1,$$

conclure que  $u \in H_{loc}^{1/2}(\Omega)$ . (On pourra remarquer que  $R_\varepsilon = r_\varepsilon(x, D)$ , où la famille  $(r_\varepsilon)$  est bornée dans  $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .)

iii) Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telle que pour tout  $i$ ,  $X_i u \in H_{loc}^s(\Omega)$ . Montrer que  $u \in H_{loc}^{s+1/2}(\Omega)$ . (On pourra remarquer que tout  $x \in \Omega$  a un voisinage ouvert  $\omega$  tel que  $u \in H_{loc}^\sigma(\omega)$  pour un certain  $\sigma$ .) Montrer que si  $X_i u \in C^\infty(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq p$ , alors  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

iv) Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère  $X_1 = \partial/\partial x$ ,  $X_2 = x\partial/\partial y$ . Soient  $\varphi, \psi$  deux fonctions  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\text{supp } \psi \subset [1, 2]$ . Pour  $\lambda \geq 1$ , on pose  $u_\lambda(x, y) = \psi(\lambda x) \int_0^{+\infty} e^{iy\eta} \varphi(x\sqrt{\eta}) d\eta$ . Estimer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \|u_\lambda(x, \cdot)\|_{H^s}^2 dx$  pour  $s \geq 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , puis  $|X_i u_\lambda|_0^2$ , et conclure que le résultat ci-dessus est optimal.

c) On se donne toujours  $X_1, \dots, X_p$  sur  $\Omega$ , mais on suppose cette fois que, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\mathbb{R}^n$  est engendré par les  $X_I(x)$ ,  $|I| \leq r$ , où l'on a posé :

si  $I = (i_1, \dots, i_q) \in \{a, \dots, p\}^q$ ,  $q = |I|$ ,

$$X_I = (adX_{i_1}) \dots (adX_{i_{q-1}}) X_{i_q}.$$

En raisonnant comme dans la question b), montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, si  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  vérifie  $X_i u \in H_{loc}^s(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq p$ , alors  $u \in H_{loc}^{s+\delta}(\Omega)$ .

*Remarque.* Contrairement à la question b), le gain  $\delta$  mis en évidence par cette méthode n'est pas optimal. (On peut montrer que le gain optimal est  $1/r$ .)

6.6 Soient  $X_1, \dots, X_p$  des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\Omega$ . On pose :

$$P = \sum_{i=1}^p X_i^2.$$

a) Prouver l'estimation suivante :

Pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , tout  $s \in \mathbb{R}$ , tout  $u \in C_0^\infty(K)$ ,

$$\sum_{i=1}^p |X_i u|_s^2 \leq |\operatorname{Re} (Pu, u)_s| + C_{K,s} |u|_s^2,$$

où  $(v, w)_s$  désigne le produit scalaire dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

b) En raisonnant comme à l'exercice 6.5 b) ii), montrer que si  $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$  vérifie  $Pu \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ , alors  $X_i u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

c) On suppose que les  $X_i$  vérifient les hypothèses de la question 6.5 c). Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Que peut-on dire de  $u$  si  $Pu \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ , si  $Pu \in C^\infty(\Omega)$  ?

**6.7\*** Soit  $P \in \Psi_{ps}^1(\Omega)$ , admettant un symbole principal  $p_1$ , vérifiant :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad p_1(x, \xi) = 0 \Rightarrow \{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Im} p_1\}(x, \xi) > 0.$$

a) Soit  $E$  un opérateur d'ordre  $-1$ , proprement supporté, de symbole principal  $|\xi|^{-1}$ . Montrer qu'il existe une constante  $C_0$  positive telle que l'opérateur

$$Q = [P^*, P] + C_0 EP^* P,$$

vérifie les hypothèses de l'inégalité de Gårding.

b) Prouver que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe  $C_K > 0$  telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(K), \quad |u|_{1/2} \leq C_K (|Pu|_0 + |u|_0).$$

En utilisant un régularisateur comme à l'exercice 6.5 b) ii), en déduire que si  $u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  et  $Pu \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ , alors  $u \in H_{\text{loc}}^{1/2}(\Omega)$ ; conclure que si  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  vérifie  $Pu \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ , alors  $u \in H_{\text{loc}}^{s+1/2}(\Omega)$ . (Raisonnement comme à l'exercice 6.5.)

On dit que  $P$  est « sous-elliptique avec gain d'une demi-dérivée ».

### 6.8\* Condition de transmission à une variable

a) Calcul préliminaire. Pour  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant  $\chi(\xi) = 1$  pour  $\xi \geq 1$ , et  $\chi(\xi) = 0$  pour  $\xi \leq 1/2$ , on pose :

$$u_\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \chi(\xi) \xi^\mu d\xi.$$

On sait (voir exercice 4.6) que  $u_\mu$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$  qui est  $C^\infty$  en dehors de  $x = 0$ . Montrer que, si  $x > 0$ , on a :

$$\begin{cases} u_\mu(x) = e^{i\pi/2(\mu+1)} \Gamma(\mu+1) x^{-\mu-1} & \text{modulo } C^\infty([0, +\infty[) \\ u_\mu(-x) = e^{-i\pi/2(\mu+1)} \Gamma(\mu+1) x^{-\mu-1} & \text{modulo } C^\infty([0, +\infty[) . \end{cases}$$

$$\text{si } \mu \notin \{-1, -2, -3, \dots\};$$

et

$$\begin{cases} u_{-n}(x) = i^{n+1} x^{n-1} \text{Log } x & \text{modulo } C^\infty([0, +\infty[) \\ u_{-n}(-x) = (-i)^{n+1} x^{n-1} \text{Log } x & \text{modulo } C^\infty([0, +\infty[) \end{cases}$$

si  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

On désigne ici par  $\Gamma$  la fonction eulérienne usuelle définie, pour  $\text{Re } z > 0$ , par  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  et prolongée méromorphiquement à tout le plan complexe. *Indication* : on se placera d'abord dans le cas  $\mu > -1$ , où l'on comparera  $u_\mu$  à  $\int_0^\infty e^{ix\xi} \xi^\mu d\xi$ , puis on remarquera que  $D_x u_\mu = u_{\mu+1}$ .

b) Soit  $\lambda \sim \sum \lambda_j$  un symbole classique d'ordre  $m$  sur  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \lambda(\xi) d\xi.$$

Montrer que  $u|_{x>0}$  se prolonge en une fonction  $C^\infty$  si et seulement si :  $\forall j \in \mathbb{N}, \lambda_j(-1) = e^{i\pi(m-j)} \lambda_j(1)$ , ce qui signifie que  $\lambda_j(\xi)$  se prolonge holomorphiquement à  $\text{Im } \xi > 0$ .

c) Soit  $a \sim \sum_{j \geq 0} a_j$ , un symbole classique d'ordre  $m$  sur  $\mathbb{R}$ . On dit que l'opérateur  $a(x, D)$  satisfait à la propriété de transmission par rapport à  $]0, +\infty[$  si  $\forall u \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ , la fonction  $a(x, D)(u^0)|_{x>0}$  se prolonge en une fonction  $C^\infty$ . (On a noté  $u^0$  le prolongement de  $u$  à tout  $\mathbb{R}$  donné par  $u^0(x) = 0$  si  $x < 0$ .)

Montrer que, si  $u \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ ,

$$a(x, D) u^0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \lambda(\xi) d\xi,$$

où  $\lambda$  est un symbole classique d'ordre  $m$ , vérifiant notamment  $\lambda_0(\xi) = -i\xi^{-1} a_0(0, \xi) u(0)$ . (On pourra commencer par remarquer que  $\hat{u}^0(\xi)$  est un symbole classique d'ordre  $-1$ , dont on calculera un développement asymptotique, puis on se reportera à l'appendice, théorème 2, pour calculer  $\lambda$  en fonction de  $a$ .)

En déduire que  $a(x, D)$  satisfait à la propriété de transmission dès que sont vérifiées les conditions suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \partial_x^k a_j(0, -1) = e^{i\pi(m-j)} \partial_x^k a_j(0, 1). \quad (*)$$

d) Montrer réciproquement que si  $a(x, D)$  satisfait à la propriété de transmission, alors les relations (\*) ont lieu. (On commencera par montrer

le cas  $j = k = 0$ , puis on remarquera que, si  $a(x, D)$  satisfait à la propriété de transmission,  $[D, a(x, D)]$  également.)

### 7.1\* Formule de la phase stationnaire

a) Soit  $q$  une forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On se propose d'étudier le comportement asymptotique de :

$$I(\lambda) = \int e^{i\lambda q(x)/2} u(x) dx \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Pour cela, poser  $x = y/\sqrt{\lambda}$  dans l'intégrale, et développer  $u$  au voisinage de 0 ; en estimant le reste à l'aide du théorème 1 de l'appendice, montrer qu'on obtient un développement asymptotique en puissances de  $\lambda$ , dont on calculera chaque terme à l'aide de l'exercice 4.9 b) :

$$I(\lambda) \sim \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \frac{e^{i\sigma\pi/4}}{|\det q|^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (2i\lambda)^{-k} \left( \frac{\hat{q}(D)^k}{k!} u \right)(0),$$

$\sigma$  étant la signature de  $q$ .

Soit maintenant  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à valeurs réelles, admettant un unique point critique  $x_0$ , où le hessien  $q = f''(x_0)$  est non dégénéré. Pour  $u \in C_0^\infty$ , on se propose d'étudier :

$$I_f(\lambda) = \int e^{i\lambda f(x)} u(x) dx.$$

b) Lemme de Morse. Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  et un difféomorphisme local  $\varphi$  de  $V$  sur un voisinage de 0 tels que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \frac{1}{2} q(\varphi(x)).$$

Pour cela, chercher  $\varphi(x)$  sous la forme  $B(x)(x - x_0)$  où  $B(x_0) = I$ . Remarquer que l'on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle A(x)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$

avec  $A(x)$  symétrique,  $A(x_0)$  étant la matrice de  $q$ , et qu'on est alors ramené à résoudre :

$$B(x)^* A(x_0) B(x) = A(x), \quad B(x_0) = I,$$

pour  $x$  près de  $x_0$ .

Conclure en appliquant le théorème d'inversion locale (par exemple sous la version énoncée au chapitre III, paragraphe A.1.1) à l'application  $B \mapsto B^* A(x_0) B$  près de  $B = I$ .

c) Dédurre de a) et de b) que  $I_f(\lambda)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $\lambda$ , dont le premier terme est :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{i\sigma\pi/4} |\det f''(x_0)|^{-1/2} u(x_0),$$

$\sigma$  étant la signature du hessien  $f''(x_0)$ . (On pourra utiliser le lemme 1 de l'appendice pour localiser le domaine d'intégration autour de  $x_0$ .)

*Remarque.* Il est possible de calculer explicitement tous les termes du développement asymptotique mis en évidence en c). (Voir [H1, théorème 7.7.6], où l'on utilise une méthode indépendante du lemme de Morse.)

Dans toute la suite,  $M$  désigne une variété  $C^\infty$  (réunion dénombrable de compacts).

7.2 Vérifier que le théorème de partition de l'unité (Ex. 6.1) est encore vrai sur la variété  $M$ .

7.3 On fait choix d'une densité positive  $\mu$  sur  $M$ . (Voir éventuellement la note sur les densités à la fin des exercices.)

a) Soit  $A \in \Psi^m(M)$ , et soient  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$  telles que  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$ . Montrer qu'il existe  $k \in C_0^\infty(M \times M)$  telle que :

$$\forall u \in C^\infty(M), \forall x \in M, \varphi A \psi u(x) = \int_M k(x, y) u(y) \mu(y).$$

(On pourra d'abord étudier le cas où  $\text{supp } \varphi \subset U$ ,  $\text{supp } \psi \subset V$ ,  $U$  et  $V$  étant des domaines de cartes disjoints ; alors  $U \cup V$  est un domaine de carte.)

b) Montrer que  $\Psi^{-\infty}(M)$  coïncide exactement avec les opérateurs du type :

$$Ku(x) = \int_M k(x, y) u(y) \mu(y) \quad (u \in C_0^\infty(M)),$$

où  $k \in C^\infty(M \times M)$ .

7.4 a) Soit  $U$  un ouvert de  $M$ . Si  $A \in \Psi^m(M)$ , montrer que l'opérateur  $A|_U$  :

$$\begin{aligned} C_0^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ u &\mapsto (Au)|_U, \end{aligned}$$

est élément de  $\Psi^m(U)$ .

Si  $B \in \Psi^m(U)$ ,  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$ , montrer que  $\varphi B \psi$  définit un élément de  $\Psi^m(M)$ .

b) Soit  $A : C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  un opérateur linéaire continu. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $M$  tel que  $A|_{U_i} \in \Psi^m(U_i)$  pour tout  $i$ .  $A$  est-il élément de  $\Psi^m(M)$ ? (On pourra se contenter d'étudier le cas de deux ouverts dans  $\mathbb{R}$  !) Montrer que l'on peut conclure si l'on impose de plus que  $A$  satisfait la propriété mise en évidence à l'exercice 7.3 a).

c) Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $M$ , et, pour tout  $i \in I$ , soit  $A_i \in \Psi^m(M)$ . On se donne d'autre part  $\ell \in [-\infty, m[$ , et on suppose que, pour tous  $i, j$

$$A_i|_{U_i \cap U_j} - A_j|_{U_i \cap U_j} \in \Psi^\ell(U_i \cap U_j).$$

Montrer qu'il existe  $A \in \Psi^m(M)$  tel que, pour  $i$  :

$$A|_{U_i} - A_i \in \Psi^\ell(U_i).$$

Montrer que  $A$  est unique modulo  $\Psi^\ell(M)$ . En d'autres termes :  $\Psi^m/\Psi^\ell$  est un faisceau sur  $M$ . (Indication : on pourra prendre  $A = \sum_i \psi_i A_i \varphi_i$ , où  $\varphi_i, \psi_i \in C_0^\infty(U_i)$  sont bien choisis...)

d) Appliquer le résultat de c) aux situations suivantes :

i) Si  $a \in S^m(T^*M)$  est  $m$ -homogène, il existe  $A \in \Psi^m(M)$  dont le symbole principal est  $a$ .

ii) Soit  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de réels décroissant vers  $-\infty$ , et, pour tout  $j$ , soit  $A_j \in \Psi^{m_j}(M)$ . Montrer qu'il existe  $A \in \Psi^m(M)$  (unique modulo  $\Psi^{-\infty}(M)$ ) tel que :

$$A \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j, \text{ au sens où, pour tout } N \in \mathbb{N}, A - \sum_{j < N} A_j \in \Psi^{m_N}(M).$$

iii) Soit  $A \in \Psi^m(M)$ , de symbole principal  $a_m$ . On suppose que  $a_m \neq 0$  sur  $T^*M$ . Montrer qu'il existe  $B \in \Psi^{-\infty}(M)$  tel que  $AB \equiv I \equiv BA \pmod{\Psi^{-\infty}(M)}$ .

**7.5** Cet exercice étudie la généralisation du théorème 3.2.3 aux variétés. Soit  $\mu$  une densité positive sur  $M$ , et soit  $A \in \Psi^m(M)$ . On se propose de montrer qu'il existe  $A^* \in \Psi^m(M)$  tel que :

$$\forall u \in C_0^\infty(M), \forall v \in C_0^\infty(M), \int_M Au \cdot \bar{v} \mu = \int_M u \cdot \overline{A^*v} \mu.$$

a) Vérifier que, si un tel opérateur existe, il est unique parmi les opérateurs  $C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ . (Ou à valeurs dans l'espace des distributions sur  $M$ , si l'on sait de quoi il s'agit.)

b) Soient  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$ , où  $U$  est un domaine de carte. Construire  $(\varphi A\psi)^*$ . En déduire une construction de  $(A\psi)^*$  en utilisant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement  $(U_i)$  tel que  $U_0 = U$ ,  $U_i \cap \text{supp } \psi = \emptyset$  pour  $i \neq 0$ . (Utiliser l'exercice 7.3 a)) En déduire finalement une construction de  $A^*$ .

c) Montrer que, si  $A$  admet un symbole principal  $a_m$ , alors  $A^*$  admet  $\bar{a}_m$  pour symbole principal.

7.6 a) Montrer l'invariance par changement de coordonnées du fait qu'un opérateur est classique au sens du paragraphe 2. En déduire qu'on peut définir sur  $M$  des opérateurs pseudo-différentiels classiques.

b) Soit  $A \in \Psi^m(M)$ , classique, et soit  $a_m$  son symbole principal. Soient  $x \in M$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(M)$  telle que  $\varphi(x) = 1$ ,  $\psi \in C^\infty(M)$  telle que  $d\psi(x) \neq 0$ . Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-m} e^{-i\lambda\psi(x)} A(e^{i\lambda\psi}\varphi)(x)$  en fonction de  $a_m$ . (Utiliser le

théorème 3 de l'appendice et l'exercice 7.3 a))

7.7 L'objet de cet exercice est de caractériser les opérateurs pseudo-différentiels sur  $M = \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}^n$ , on note  $e_k$  la fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}^n$  définie par  $e_k(x) = e^{ik \cdot x}$ . Si  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ , on note  $\hat{u}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-ik \cdot x} dx$ . Si  $a = (a(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  est une suite de nombres complexes, on définit la suite  $\delta_j a$  ( $1 \leq j \leq n$ ) par :

$$\delta_j a(k) = a(k + \varepsilon_j) - a(k),$$

où  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$ . On définit ensuite  $\delta^\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  selon la procédure habituelle.

a) Soit  $A \in \Psi^m(\mathbb{T}^n)$ . Pour  $x \in \mathbb{T}^n$  et  $k \in \mathbb{Z}^n$ , on pose :

$$a(x, k) = e_{-k}(x) A e_k(x).$$

Vérifier que  $|a(x, k)| \leq C(1 + |k|)^m$  (utiliser le théorème 3 de l'appendice) et que :

$$\begin{aligned} \partial_j a(x, k) &= e_{-k}(x) [\partial_j, A] e_k(x) \\ \delta_j a(x, k) &= e_{-k}(x) (e_{-\varepsilon_j} A e_{\varepsilon_j} - A) (e_k)(x). \end{aligned}$$

En déduire que :

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_z^\alpha \delta^\beta a(x, k)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |k|)^{m - |\beta|}. \quad (*)$$

b) Réciproquement, soit  $a = a(x, k)$ , de classe  $C^\infty$  en  $x$ , vérifiant la condition (\*), on définit alors  $A: C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$  par :

$$Au(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a(x, k) \hat{u}(k) e^{ik \cdot x}. \quad (**)$$

i) Pour  $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$  telles que  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$ , montrer qu'on peut écrire :

$$\varphi A \psi u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} k(x, y) u(y) dy, \quad \text{avec } k \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n).$$

ii) On note  $U = (\mathbb{T}^1 \setminus \{1\})^n$  que l'on identifie à  $]0, 2\pi[^n$  par la carte habituelle. Pour  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$ , vérifier que  $\varphi A \psi$  appartient à  $\Psi^m(U)$ . (On remarquera que  $\delta^\alpha(e^{ik \cdot z}) = z^\alpha e^{ik \cdot z} q_\alpha(z)$  où  $q_\alpha$  est  $C^\infty$ , non nulle sur  $U$ .)

iii) Conclure.

Les trois exercices suivants montrent comment on peut appliquer les opérateurs pseudo-différentiels à l'analyse sur les variétés compactes. Afin de mieux montrer comment fonctionnent les opérateurs pseudo-différentiels, nous avons choisi de donner des preuves auto-contenues des résultats classiques de finitude, de dualité et de décomposition spectrale, et le seul résultat non trivial d'analyse fonctionnelle utilisé ici est le théorème de projection de Hilbert (Ex. 7.9 e)).

Le lecteur désireux de connaître les concepts généraux d'analyse fonctionnelle qui sont attachés à ces résultats (opérateurs de Fredholm, etc...) pourra se reporter par exemple à HÖRMANDER [H5, paragraphe 19.1].

Dans toute la suite, on se donne une variété  $M$  compacte, et sur  $M$  une densité positive  $\mu$ . L'espace  $L^2(M)$  est muni du produit scalaire hilbertien :

$$(u, v) = \int_M u \bar{v} \mu.$$

On notera comme d'habitude  $\|u\|_0^2 = (u, u)$ . Pour la norme ainsi définie,  $C^\infty(M)$  est un sous-espace dense de  $L^2(M)$ .

### 7.8\* Finitude et dualité

Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ , et soit  $P \in \Psi^m(M)$  un opérateur elliptique. On choisit une densité positive  $\mu$  sur  $M$ , et on introduit sur  $C^\infty(M)$  le produit scalaire préhilbertien

$$(u, v) = \int_M u \bar{v} \mu.$$

On a montré à l'exercice 7.5 que  $P$  possédait un adjoint  $P^*$  pour cette structure, et que  $P^* \in \Psi^m(M)$ .

Par ailleurs, on appellera noyau de rang fini toute fonction

$k \in C^\infty(M \times M)$  s'écrivant sous la forme  $k(x, y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \psi_j(y)$  où  $\varphi_j, \psi_j \in C^\infty(M)$ , et par extension l'opérateur  $K$  qui lui est associé par la formule  $Ku(x) = \int_M k(x, y) u(y) \mu(y)$ .

a) Montrer que, si  $K$  est un noyau de rang fini,  $\text{Ker}(I - K)$  est de dimension finie, et  $\text{Im}(I - K) = (\text{Ker}(I - K^*))^\perp$ .

b) Soit  $k \in C^\infty(M \times M)$ . Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k'$  de rang fini tel que  $\sup_{M \times M} |k - k'| \leq \varepsilon$ . (On pourra penser au théorème de Stone-Weierstrass.)

En déduire qu'il existe  $Q \in \Psi^{-m}(M)$  tel que  $QP = I - K$ , où  $K$  est un noyau de rang fini.

c) Montrer que  $\text{Ker} P$  est de dimension finie. Soit  $f \in (\text{Ker} P^*)^\perp$ . Montrer que  $Qf \in (\text{Ker}(I - K^*))^\perp$ , et en déduire qu'il existe  $g \in C^\infty(M)$  telle que  $f - Pg \in \text{Ker} Q$ . Montrer qu'on peut choisir  $g$  tel que  $\|f - Pg\|$  soit minimale, et qu'alors  $h = f - Pg$  est orthogonale à  $P(\text{Ker}(QP))$ . En déduire que  $P^*h \in \text{Im}(P^*Q^*)$ , puis que  $h = 0$ . Conclure que  $\text{Im} P = (\text{Ker} P^*)^\perp$ .

7.9\* Soit  $A \in \Psi^m(M)$  avec  $m < 0$ . Par le théorème 5.1,

$$A : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

se prolonge en un opérateur borné de  $L^2(M)$ , que nous noterons encore  $A$ .

On suppose  $A$  auto-adjoint, i.e.  $A^* = A$ .

a) Soit  $F \subset L^2(M)$  un sous-espace fermé stable par  $A$ , sur lequel  $A$  n'est pas identiquement nul.

i) On note  $s(F) = \sup_{u \in F, \|u\|_0 = 1} |(Au, u)|$ . Montrer que  $s(F) \in ]0, +\infty[$ .

ii) Soit  $(u_j)$  une suite de  $F$  telle que  $\|u_j\|_0 = 1$  et  $(Au_j, u_j) \rightarrow \lambda$  avec  $|\lambda| = s(F)$ . On note  $\varepsilon = \lambda/s(F) \in \{-1, 1\}$ .

Montrer que  $\|Au_j - \lambda u_j\|_0 \rightarrow 0$  (appliquer l'inégalité de Schwarz à  $Q(v) = ((s(F) - \varepsilon A)v, v)$ ) et, à l'aide de l'exercice 7.8 b) montrer qu'une sous-suite de  $(u_j)$  converge en norme vers un élément non nul de  $\text{Ker}(A - \lambda) \cap F$ . Vérifier en outre que  $\text{Ker}(A - \lambda)$  est contenu dans  $C^\infty(M)$ , de dimension finie.

b) Montrer qu'il existe une suite  $(E_k)$  de sous-espaces de  $L^2(M)$ , deux à deux orthogonaux, de dimensions finies  $> 0$  et une suite  $(\lambda_k)$  de nombres réels, telles que :

$$\forall k, A|_{E_k} = \lambda_k \text{Id} \text{ et } |\lambda_{k+1}| = s(F_k), \text{ avec } F_k = \left( \bigoplus_{j=0}^k E_j \right)^\perp ;$$

enfin  $E_k \subset C^\infty(M)$  si  $\lambda_k \neq 0$ .

c) Montrer que  $\lambda_k \rightarrow 0$ . (On utilisera les exercices 5.10 a) et 7.8 b)

pour montrer que  $A$  est limite en norme de noyaux de rang fini ; on en déduira que  $A$  ne peut vérifier une inégalité du type  $|(Au, u)| \geq c|u|^2$  avec  $c > 0$ , sur un sous-espace de dimension infinie.)

d) Montrer que, si  $(\lambda_k)$  stationne à la valeur 0,  $A$  est un noyau de rang fini.

e) On pose  $E = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_k + \text{Ker } A$ . Montrer que  $E$  est dense dans  $L^2(M)$ . (On étudiera  $E^\perp$ .)

**7.10\*** Soit  $P \in \Psi^m(M)$ , d'ordre  $m > 0$ , formellement auto-adjoint, i.e.  $P^* = P$ , dont le symbole principal  $p_m$  vérifie :

$$\forall (x, \xi) \in T^*M, \quad p_m(x, \xi) \geq c|\xi|^m, \quad \text{avec } c > 0.$$

a) Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que  $P + a$  soit injectif sur  $C^\infty(M)$ . (Utiliser l'inégalité de Gårding.)

A l'aide de l'exercice 7.8, montrer que  $P + a : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  est inversible.

b) En appliquant les résultats de l'exercice 7.9 à  $A = (P + a)^{-1}$ , montrer qu'il existe une suite  $(E_k)$  de sous-espaces de  $C^\infty(M)$ , de dimensions finies  $> 0$ , deux à deux orthogonaux, et une suite  $(\lambda_k)$  de réels tendant vers  $+\infty$  telles que :

$$L^2(M) = \overline{\bigoplus_k E_k}, \quad \text{et } \forall k, \quad P|_{E_k} = \lambda_k \text{Id}.$$

*Note. Densités sur une variété.* A l'intention du lecteur peu familier avec le calcul sur les variétés, nous rappelons ici en quelques lignes la notion de densité.

Si  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension  $n$ , on note  $|\Omega|(E)$  l'ensemble des applications  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{C}$  telles que, pour tout opérateur linéaire  $A$  sur  $E$ , pour tous vecteurs  $h_1, \dots, h_n$  de  $E$ , on a :

$$\varphi(Ah_1, \dots, Ah_n) = |\det A| \varphi(h_1, \dots, h_n). \quad (*)$$

Par exemple, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $\varphi = |e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*|$  est un élément de  $|\Omega|(E)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Il est clair que  $|\Omega|(E)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1, et qu'un tel élément en constitue une base.

Lorsque  $M$  est une variété de dimension  $n$ , on note  $|\Omega|(TM)$  la réunion disjointe des  $|\Omega|(T_m M)$  pour  $m \in M$  :  $|\Omega|(TM)$  s'organise en un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur  $M$ , que l'on appellera le fibré des

éléments de volumes sur  $M$ . On appelle densité toute section ( $C^\infty$ ) de ce fibré ; l'intérêt d'une densité  $\rho$  est qu'elle peut s'intégrer sur  $M$  (du moins si elle décroît suffisamment à l'infini, en tout cas si elle est à support compact). En effet, dans un système de coordonnées locales, on peut écrire :

$$\rho = f(x_1, \dots, x_n) |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|, \text{ avec } f \in C^\infty,$$

et, si  $\rho$  est à support compact dans le domaine de carte, on peut définir

$$\int_M \rho = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

la formule (\*) assurant l'indépendance par rapport au choix du système de coordonnées grâce à la formule de changement de variables dans les intégrales. Par partition de l'unité, on définit ainsi  $\int_M \rho$  pour toute densité  $\rho$  à support compact sur  $M$ .

Bien sûr, si  $M$  est orientable, toute densité  $\rho$  peut s'écrire  $f|\omega|$ , où  $f \in C^\infty(M)$ , et  $\omega$  est une  $n$ -forme partout non nulle.

Si  $\omega$  est positive, la quantité  $\int_M \rho$  n'est autre que  $\int_{\vec{M}} f\omega$ ,  $\vec{M}$  désignant la variété  $M$  orientée.

Les densités permettent d'intégrer sur une variété sans cette hypothèse d'orientabilité. Notons que, grâce aux partitions de l'unité, on peut toujours « trivialisier » le fibré  $|\Omega|(TM)$ , c'est-à-dire construire une densité  $\rho_0$  partout non nulle ; toute autre densité s'écrira  $f\rho_0$ , avec  $f \in C^\infty(M)$ . On s'accorde en général à choisir  $\rho_0$  positive, c'est-à-dire telle que  $\rho_0(m)(h_1, \dots, h_n) > 0$  pour tout  $m \in M$ , pour tous  $h_1, \dots, h_n \in T_m M$  indépendants. (Ce choix est aisé compte tenu de (\*).)

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

## CHAPITRE II

# Analyse non linéaire dyadique Analyse microlocale Estimations d'énergie

Il pourrait sembler à première vue un peu ridicule de présenter des « applications » d'une notion aussi communément répandue dans la Nature que celle d'opérateur pseudo-différentiel ; néanmoins, ne voulant pas renvoyer le lecteur à des articles ou traités spécialisés, nous développons ici, de façon élémentaire et très limitée, quelques aspects de ces applications. Tandis que les deux premières parties peuvent être vues comme les développements naturels (et riches de conséquences) du calcul symbolique pseudo-différentiel classique présenté au chapitre I, la troisième utilise l'efficacité de *l'outil* pseudo-différentiel pour démontrer les indispensables estimations d'énergie hyperboliques.

Ces estimations permettent d'obtenir le théorème d'Hörmander sur la propagation des singularités (un des résultats clé de l'analyse microlocale) ; d'autre part, elles sont le cœur des techniques de perturbation non linéaires présentées au chapitre III.

## A ANALYSE NON LINÉAIRE DYADIQUE

### 1 DÉCOMPOSITION DE LITTLEWOOD-PALEY : PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

#### 1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Soit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi(\xi) = 1$  pour  $|\xi| \leq 1/2$ ,  $\psi(\xi) = 0$  pour  $|\xi| \geq 1$ . Posons  $\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$  :  $\varphi$  est supportée dans la couronne  $1/2 \leq |\xi| \leq 2$ , et, pour tout  $\xi$ ,

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{p \neq 0} \varphi(2^{-p} \xi)$$

(dans cette série, il n'y a jamais qu'au plus deux termes non nuls). Pour  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , on pose :

$$u_{-1} = S_0 u = \psi(D) u, \quad u_p = \varphi(2^{-p} D) u,$$

en sorte que :

$$u = S_0 u + \sum_{p \geq 0} u_p.$$

C'est la décomposition de Littlewood-Paley de  $u$ . On notera les sommes partielles  $S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} u_q$ . Chaque terme est holomorphe dans  $\mathbb{C}^n$  (et en fait dans  $H^{+\infty}$  dès que  $u$  est dans un  $H^s$ ) et la « qualité » de  $u$  se reflète dans la vitesse de convergence de  $\sum u_p$ . Deux lemmes seront d'un usage constant. Rappelons les notations :  $|u|_s$  désigne la norme de  $u$  dans  $H^s$  ( $s \in \mathbb{R}$ ),  $\|u\|_0$  la norme  $L^\infty$ .

LEMME 1.1.1 (PRESQU'ORTHOGONALITÉ DES TERMES). *On a :*

$$1/2 \leq \psi^2(\xi) + \sum_{p \geq 0} \varphi^2(2^{-p} \xi) \leq 1, \quad (1.1.1)$$

et pour tout  $u \in L^2$

$$\sum_{p \geq -1} |u_p|_0^2 \leq |u|_0^2 \leq 2 \sum_{p \geq -1} |u_p|_0^2. \quad (1.1.2)$$

*Preuve :*

$$\psi^2(\xi) + \sum \varphi^2(2^{-p} \xi) \leq \left[ \psi(\xi) + \sum \varphi(2^{-p} \xi) \right]^2 = 1,$$

et

$$1 = \left[ \psi(\xi) + \sum \varphi(2^{-p} \xi) \right]^2 \leq 2 \left( \psi^2(\xi) + \sum \varphi^2(2^{-p} \xi) \right)$$

en vertu de l'inégalité  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ . Comme

$$|u|_0^2 = \text{Cte} \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

il suffit, pour obtenir (1.1.2) de multiplier les deux membres de (1.1.1) par  $|\hat{u}(\xi)|^2$  et d'intégrer en se souvenant que  $\hat{u}_p(\xi) = \varphi(2^{-p} \xi) \hat{u}(\xi)$  et  $\hat{u}_{-1}(\xi) = \psi(\xi) \hat{u}(\xi)$ , par définition.  $\square$

Ce lemme résulte du fait que  $(u_p, u_q)_{L^2} = 0$  dès que  $|p-q| \geq 2$  : les termes  $u_p$  ne sont pas orthogonaux, mais peu s'en faut, et le lemme 1.1.1

n'est autre que le « théorème de Pythagore » correspondant à cette presque orthogonalité.

Plus généralement, si  $\{u_p\}$  est une suite de fonctions de  $L^2$  avec  $\text{supp } \hat{u}_p \subset \left\{ \xi, \frac{1}{C} 2^{p-1} \leq |\xi| \leq C 2^{p+1} \right\}$ , on a toujours l'inégalité :

$$\left| \sum u_p \right|_0^2 \leq \text{Cte} \sum |u_p|_0^2. \quad (1.1.2')$$

LEMME 1.1.2 (SENSIBILITÉ DES TERMES AUX DÉRIVATIONS). *Il existe des constantes  $C$ , indépendantes de  $p$  et de  $u$ , pour lesquelles :*

i) pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $p \geq -1$

$$|\partial^\alpha u_p|_0 \leq C 2^{p|\alpha|} |u|_0, \quad |\partial^\alpha S_p u|_0 \leq C 2^{p|\alpha|} |u|_0, \quad (1.1.3)$$

$$\|\partial^\alpha u_p\|_0 \leq C 2^{p|\alpha|} \|u\|_0, \quad \|\partial^\alpha S_p u\|_0 \leq C 2^{p|\alpha|} \|u\|_0. \quad (1.1.4)$$

ii) Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $p \geq 0$ ,

$$\frac{1}{C} 2^{ps} |u_p|_0 \leq |u_p|_s \leq C 2^{ps} |u_p|_0. \quad (1.1.5)$$

iii) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 0$ ,

$$\frac{1}{C} 2^{pk} \|u_p\|_0 \leq \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u_p\|_0 \leq C 2^{pk} \|u_p\|_0. \quad (1.1.6)$$

*Preuve :*

a) Par définition,

$$|u_p|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s \varphi^2(2^{-p}\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi;$$

comme  $(1 + |\xi|^2)^s$  est majoré et minoré sur le support de  $\varphi(2^{-p}\xi)$  par  $C 2^{2ps}$ , on obtient immédiatement (1.1.3) et (1.1.5).

b) En notant  $\check{\Phi}$  la transformée de Fourier inverse de  $\Phi$  (c'est-à-dire  $\check{\Phi} = \Phi$ ), on a  $\check{\Phi}(D)u = \check{\Phi} * u$ , et si  $\check{\Phi}(\xi) = \check{\Phi}_1(\mu\xi)$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ;  $\check{\Phi}_1$  fixe)  $\check{\Phi}(x) = \mu^{-n} \check{\Phi}_1(x/\mu)$ , en sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\check{\Phi}(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\Phi}_1(y)| dy,$$

est indépendante de  $\mu$ . On en déduit  $\|\check{\Phi} * u\|_0 \leq C \|u\|_0$ , où  $C$  ne dépend pas de  $\mu$ . Pour tout  $\alpha$ , on a :

$$\partial^\alpha (\check{\Phi}(D)u) = (\partial^\alpha \check{\Phi}) * u = \mu^{-|\alpha|} (\mu^{-n} (\partial^\alpha \check{\Phi}_1)(x/\mu)) * u,$$

d'où :

$$\|\partial^\alpha(\Phi(D)u)\|_0 \leq C\mu^{-|\alpha|} \|u\|_0;$$

en appliquant ceci à  $\Phi(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)$  (qui définit  $u_p$ ) ou à  $\Phi(\xi) = \psi(2^{-p}\xi)$  (qui définit  $S_p u$ ), on obtient (1.1.4). De même,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \hat{u}_p &= \text{Cte } \xi^\alpha \varphi(2^{-p}\xi) \hat{u}(\xi) = \text{Cte } 2^{p|\alpha|} (2^{-p}\xi)^\alpha \varphi(2^{-p}\xi) \hat{u}(\xi) \\ &= \text{Cte } 2^{p|\alpha|} \Phi_1(2^{-p}\xi) \hat{u}_p(\xi), \end{aligned}$$

où  $\Phi_1(\xi) = \xi^\alpha \chi(\xi)$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\chi = 1$  près du support de  $\varphi$ . On obtient ainsi l'inégalité de droite de (1.1.6).

c) Pour obtenir (1.1.6), on écrit, avec  $\chi \in C_0^\infty$  valant 1 près de  $\text{supp } \varphi$ ,

$$\varphi(\xi) = \left( \sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha \chi_\alpha(\xi) \right) \varphi(\xi),$$

où :

$$\chi_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha \chi(\xi)}{\sum_{|\alpha|=k} (\xi^\alpha)^2} \in C_0^\infty,$$

et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{u}_p(\xi) &= \varphi(2^{-p}\xi) \hat{u}(\xi) = \sum (2^{-p}\xi)^\alpha \chi_\alpha(2^{-p}\xi) \hat{u}_p(\xi) \\ &= 2^{-pk} \sum \chi_\alpha(2^{-p}\xi) \widehat{D^\alpha u_p}(\xi), \end{aligned}$$

d'où  $2^{pk} u_p = \sum (2^{pn} \check{\chi}_\alpha(2^p \cdot)) * D^\alpha u_p$  et la conclusion.  $\square$

## 1.2 Caractérisation des espaces de Sobolev

### PROPOSITION 1.2

i) Si  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $p \geq -1$ ,  $|u_p|_0 \leq \text{Cte } |u|_s c_p 2^{-ps}$ , où  $c_p = c_p(u)$  vérifie  $\sum c_p^2 \leq 1$ .

ii) Inversement, si, pour  $p \geq -1$ ,  $|u_p|_0 \leq C c_p 2^{-ps}$ , avec  $\sum c_p^2 \leq 1$ , alors  $u \in H^s$  et  $|u|_s \leq \text{Cte } C$ .

*Preuve :* comme  $(\langle D \rangle^s u)_p = \langle D \rangle^s u_p$ , c'est une conséquence immédiate de (1.1.5) et de la caractérisation de  $L^2$  fournie par le lemme 1.1.1.  $\square$

## 1.3 Caractérisation des espaces de Hölder

Pour  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , nous définissons  $C^\alpha = C^\alpha(\mathbb{R}^n)$  comme l'espace des  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$  ( $k = E(\alpha) =$  partie entière de  $\alpha$ ), bornées ainsi que leurs

dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ , telles que :

$$\exists C, \forall x, \forall y, \forall \beta, \quad |\beta| = k, \quad |\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)| \leq C |x - y|^{\alpha - k}. \quad (1.3.1)$$

La norme dans  $C^\alpha$  sera notée  $\|u\|_\alpha$  et définie par  $\|u\|_\alpha = \|u\|_0 + \|u\|'_\alpha$ , où  $\|u\|'_\alpha$  désigne la meilleure constante dans (1.3.1).

PROPOSITION 1.3

i) Si  $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$  ( $\alpha \notin \mathbb{N}$ ), pour tout  $p \geq -1$ ,

$$\|u_p\|_0 \leq C \|u\|_\alpha 2^{-p\alpha}.$$

ii) Inversement, si, pour  $p \geq -1$ ,  $\|u_p\|_0 \leq C 2^{-p\alpha}$  ( $\alpha \notin \mathbb{N}$ ) alors  $u \in C^\alpha$  et  $\|u\|_\alpha \leq C C$ .

*Preuve :* remarquons que les inégalités (1.1.6) et le fait que  $(\partial^\alpha u)_p = \partial^\alpha u_p$  permettent de se ramener immédiatement au cas  $0 < \alpha < 1$ .

a) Comme  $\|u_{-1}\|_0 \leq C \|u\|_0$ , il suffit de considérer :

$$u_p(x) = \int 2^{pn} \check{\varphi}(2^p(x-y)) u(y) dy \quad \text{pour } p \geq 0.$$

Du fait que  $\int \check{\varphi}(z) dz = C \varphi(0) = 0$ , on a aussi :

$$u_p(x) = \int 2^{pn} \check{\varphi}(2^p(x-y))(u(y) - u(x)) dy,$$

d'où :

$$|u_p(x)| \leq \|u\|_\alpha \int 2^{pn} |\check{\varphi}(2^p(x-y))| |x-y|^\alpha dy \leq C \|u\|_\alpha 2^{-p\alpha},$$

ce qui prouve i).

b) Inversement, posons, pour un  $p$  à déterminer,

$$u = S_p u + R_p u, \quad R_p u = \sum_{q \geq p} u_q;$$

on a :

$$\|R_p u\|_0 \leq \sum_{q \geq p} \|u_q\|_0 \leq C 2^{-p\alpha}.$$

Par ailleurs,

$$|S_p u(x) - S_p u(y)| \leq |x-y| \sum_{q=-1}^{p-1} \|\nabla u_q\|_0;$$

d'après (1.1.6),

$$\|\nabla u_q\|_0 \leq \text{Cte } C 2^{q(1-\alpha)},$$

et bien sûr  $\|\nabla u_{-1}\|_0 \leq \text{Cte } C$ ; donc, si  $0 < \alpha < 1$ ,

$$|S_p u(x) - S_p u(y)| \leq \text{Cte } C |x - y| 2^{p(1-\alpha)},$$

car la série  $\sum \|\nabla u_q\|_0$  est alors géométriquement divergente.

En regroupant les estimations sur  $R_p u$  et  $S_p u$ , on trouve :

$$|u(x) - u(y)| \leq \text{Cte } C |x - y| 2^{p(1-\alpha)} + 2 C 2^{-p\alpha}.$$

En prenant pour  $p$  le plus grand entier tel que  $2^p \leq \frac{1}{|x - y|}$ , on obtient

$$|u(x) - u(y)| \leq \text{Cte } C |x - y|^\alpha, \text{ ce qui prouve ii). } \square$$

Bien entendu, il faut prendre garde que  $\|u_p\|_0 \leq C$  ne caractérise pas  $L^\infty$ , et que  $\|u_p\|_0 \leq C 2^{-p}$  ne caractérise pas  $C^1$  (au sens classique), mais un espace plus gros (cf. Ex. A.3).

## 1.4 Injections de Sobolev

**PROPOSITION 1.4.** *Pour  $s > n/2$ ,  $s - n/2 \notin \mathbb{N}$ ,  $H^s \subset C^{s-n/2}$  (injection continue).*

*Preuve :* On écrit  $u_p(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \hat{u}_p(\xi) d\xi$ , d'où :

$$\begin{aligned} \|u_p\|_0 &\leq \text{Cte} \int_{|\xi| \leq C 2^p} |\hat{u}_p(\xi)| d\xi \\ &\leq \text{Cte} |\hat{u}_p|_0 [\text{volume } B(0, C 2^p)]^{1/2} \\ &\leq \text{Cte } 2^{pn/2} |u|_s c_p 2^{-ps}, \end{aligned}$$

d'après la proposition 1.2.

En « oubliant »  $c_p \leq 1$ , on obtient le résultat à l'aide de la proposition 1.3.  $\square$

## 1.5 Inégalités de convexité

**PROPOSITION 1.5**

i) Si  $s = \lambda s_0 + (1 - \lambda) s_1$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $s_0 < s_1$ ,  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ ) on a, pour toute  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , l'inégalité

$$|u|_s \leq \text{Cte} |u|_{s_0}^\lambda |u|_{s_1}^{1-\lambda}. \quad (1.5.1)$$

ii) Si  $\alpha = \lambda \alpha_0 + (1 - \lambda) \alpha_1$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\alpha_0 < \alpha_1$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  positifs non entiers) on a, pour toute  $u \in C^{\alpha_1}$ ,

$$\|u\|_{\alpha} \leq \text{Cte} \|u\|_{\alpha_0}^{\lambda} \|u\|_{\alpha_1}^{1-\lambda}. \quad (1.5.2)$$

*Preuve :*

$$\begin{aligned} a) |u|_s^2 &= \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int (1 + |\xi|^2)^{\lambda s_0} |\hat{u}(\xi)|^{2\lambda} (1 + |\xi|^2)^{(1-\lambda)s_1} |\hat{u}(\xi)|^{2(1-\lambda)} d\xi, \end{aligned}$$

d'où le résultat par l'inégalité de Hölder avec «  $p = 1/\lambda$  » et «  $q = 1/(1-\lambda)$  ».

b) On écrit :

$$\begin{aligned} \|u_p\|_0 &\leq \|u_p\|_0^{\lambda} \|u_p\|_0^{1-\lambda} \leq \text{Cte} \|u\|_{\alpha_0}^{\lambda} (2^{-p\alpha_0})^{\lambda} \|u\|_{\alpha_1}^{1-\lambda} (2^{-p\alpha_1})^{1-\lambda} \\ &\leq \text{Cte} \|u\|_{\alpha_0}^{\lambda} \|u\|_{\alpha_1}^{1-\lambda} 2^{-p\alpha}, \end{aligned}$$

d'où le résultat par la proposition 1.3. □

*Remarque.* Il est utile de savoir que (1.5.2) est encore vraie pour  $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ , en définissant  $C^{\alpha}$  comme  $L^{\infty}$  pour  $\alpha = 0$ , et comme l'espace des fonctions à dérivées d'ordre  $\leq \alpha - 1$  lipschitziennes pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq 1$  (cf. chapitre I, exercice 2.4 a).

On voit très bien ici comment « fonctionne » la caractérisation donnée à la proposition 1.3 : elle contient dans ses termes mêmes, une quantité de propriétés utiles des espaces de Hölder (comme par exemple 1.5.2) qu'il n'est pas besoin de connaître explicitement.

## 1.6 Opérateurs de régularisation

PROPOSITION 1.6 Il existe une famille  $S_{\theta}$  ( $\theta \geq 1$ ) d'opérateurs  $S_{\theta} : \bigcup_{\alpha \geq 0} C^{\alpha} \rightarrow \bigcap_{\beta \geq 0} C^{\beta}$  avec les propriétés suivantes :

- i)  $\|S_{\theta} u\|_{\alpha} \leq \text{Cte} \|u\|_{\beta}$ ,  $\alpha \leq \beta$
- ii)  $\|S_{\theta} u\|_{\alpha} \leq \text{Cte} \theta^{\alpha - \beta} \|u\|_{\beta}$ ,  $\alpha \geq \beta$
- iii)  $\|S_{\theta} u - u\|_{\alpha} \leq \text{Cte} \theta^{\alpha - \beta} \|u\|_{\beta}$ ,  $\alpha \leq \beta$
- iv)  $\left\| \frac{d}{d\theta} S_{\theta} u \right\|_{\alpha} \leq \text{Cte} \theta^{\alpha - \beta - 1} \|u\|_{\beta}$ , tous  $\alpha, \beta$ .

Lorsque  $\alpha$  ou  $\beta$  est entier, on entend ici par  $C^{\alpha}$  l'espace défini par la caractérisation de la proposition 1.3, avec la norme correspondante.

*Preuve :* On pose, pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi = 1$  au voisinage de l'origine,

$$S_\theta u = \sum_p \chi(2^p/\theta) u_p;$$

cela implique  $(S_\theta u)_p = 0$  pour  $2^p \geq \text{Cte } \theta$ , et  $\|(S_\theta u)_p\|_0 \leq \text{Cte } \|u\|_\beta 2^{-p\beta}$  sinon.

En particulier, si  $\alpha \geq \beta$ ,

$$\|(S_\theta u)_p\|_0 \leq \text{Cte } 2^{-p\alpha} 2^{p(\alpha-\beta)} \|u\|_\beta$$

entraîne ii).

Comme  $S_\theta u - u = \sum (\chi(2^p/\theta) - 1) u_p$ , on a  $(S_\theta u - u)_p = 0$  pour  $2^p \leq \text{Cte } \theta$ , et  $\|(S_\theta u - u)_p\|_0 \leq \text{Cte } \|u\|_\beta 2^{-p\beta}$  sinon; en écrivant :

$$\|(S_\theta u - u)_p\|_0 \leq \text{Cte } \|u\|_\beta 2^{-p\alpha} 2^{p(\alpha-\beta)},$$

on obtient iii).

Finalement,  $\frac{d}{d\theta} S_\theta u = \frac{1}{\theta} \sum (\chi_1)(2^p/\theta) u_p$  avec  $\chi_1(z) = -z\chi'(z)$ , et les mêmes raisonnements que précédemment donnent iv), car  $\text{Cte } \theta \leq 2^p \leq \text{Cte } \theta$  sur le support de  $\chi_1$ .  $\square$

## 2 APPLICATION À L'ÉTUDE DES PRODUITS ET DE LA COMPOSITION

### 2.1 Estimations d'un produit de deux fonctions

PROPOSITION 2.1.1

i) Si  $u, v \in C^\alpha$  ( $\alpha \notin \mathbb{N}$ ),

$$\|uv\|_\alpha \leq \text{Cte} (\|u\|_0 \|v\|_\alpha + \|u\|_\alpha \|v\|_0). \quad (2.1.1)$$

ii) Si  $u, v \in L^\infty \cap H^s$  ( $s > 0$ ),  $uv$  également, et

$$|uv|_s \leq \text{Cte} (\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|v\|_0). \quad (2.1.2)$$

*Preuve :* Écrivons

$$u = \sum_p u_p, \quad v = \sum_q v_q,$$

et

$$uv = \sum_{p,q} u_p v_q = \sum_q (S_q u) v_q + \sum_p u_p S_{p+1} v = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Les termes de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma_2$  ont leurs spectres (c'est-à-dire les supports de leurs transformées de Fourier) dans des boules  $\{|\xi| \leq Cte 2^p\}$ . Nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 2.1 Soit  $(a_q)_{q \geq -1}$  une suite de fonctions telle que :

$$\text{supp } \hat{a}_q \subset \{\xi, |\xi| \leq Cte 2^q\} .$$

Supposons que  $\|a_q\|_0 \leq C 2^{-q\alpha}$  pour un  $\alpha > 0$  (resp.  $|a_q|_0 \leq C c_q 2^{-q\alpha}$  pour un  $s > 0$ , avec  $\Sigma c_q^2 \leq 1$ ).

Alors  $u = \sum_{q \geq -1} a_q$  appartient à  $C^\alpha$  (resp.  $u \in H^s$ ), avec  $\|u\|_\alpha \leq Cte C$  (resp.  $|u|_s \leq Cte C$ ).

Preuve : il suffit d'observer que, pour un certain  $N$ , les blocs dyadiques  $u_p$  de  $u$  vérifient  $u_p = \sum_{q \geq p-N} (a_q)_p$ , d'où, notant  $|\cdot|$  la norme  $L^2$  ou  $L^\infty$ ,

$$|u_p| \leq \sum_{q \geq p-N} |(a_q)_p| \leq Cte \sum_{q \geq p-N} |a_q| ,$$

d'après le lemme 1.1.2 i).

Dans le cas  $L^\infty$ , on en déduit :

$$\|u_p\|_0 \leq Cte C \sum_{q \geq p-N} 2^{-q\alpha} \leq Cte C 2^{-p\alpha} .$$

Dans le cas  $L^2$ ,

$$|u_p|_0 \leq Cte C \sum_{q \geq p-N} c_q 2^{-qs} \leq Cte C 2^{-ps} \left( \sum_{q \geq p-N} c_q^2 2^{-(q-p)s} \right)^{1/2} ,$$

d'après l'inégalité de Schwarz appliquée à  $c_q 2^{-(q-p)s/2} \times 2^{-(q+p)s/2}$ , et il reste à remarquer que

$$\sum_p \sum_{q \geq p-N} c_q^2 2^{-(q-p)s} \leq Cte . \quad \square$$

On notera le rôle crucial joué dans ces estimations par la nature géométrique du découpage utilisé.

Compte tenu du lemme, il suffit d'évaluer  $\|(S_q u) v_q\|_0$ . Or

$$\|(S_q u) v_q\|_0 \leq \|S_q u\|_0 \|v_q\|_0 \leq Cte \|u\|_0 \|v\|_\alpha 2^{-q\alpha} ,$$

d'où  $\|\Sigma_1\|_\alpha \leq Cte \|u\|_0 \|v\|_\alpha$ , et de même pour  $\Sigma_2$  en échangeant  $u$  et  $v$ .

Pour prouver ii), on écrit

$$|(S_q u) v_q|_0 \leq \|S_q u\|_0 |v_q|_0 \leq \text{Cte} \|u\|_0 |v|_s c_q 2^{-qs},$$

d'où  $|\Sigma_1|_s \leq \text{Cte} \|u\|_0 |v|_s$  et de même pour  $\Sigma_2$ .

Si, dans la preuve ci-dessus, au lieu de  $uv = \sum_{p,q} u_p v_q = \Sigma_1 + \Sigma_2$ , on écrit plus finement :

$$\begin{aligned} uv &= \sum_{p \leq q-3} u_p v_q + \sum_{q \leq p-3} u_p v_q + \sum_{|p-q| \leq 2} u_p v_q \\ &= \sum (S_{q-2} u) v_q + \sum (S_{p-2} v) u_p + \sum_{|p-q| \leq 2} u_p v_q = \Sigma'_1 + \Sigma'_2 + \Sigma'_3, \end{aligned}$$

on remarque que les termes des sommes  $\Sigma'_1$  et  $\Sigma'_2$  ont leurs spectres dans des couronnes (et pas seulement dans des boules) ; par exemple pour  $\Sigma'_1$  :

$$\text{spectre } S_{q-2} u \subset \{ \xi, |\xi| \leq 2^{q-2} \},$$

$$\text{spectre } v_q \subset \left\{ \xi, \frac{1}{2} 2^q \leq |\xi| \leq 22^q \right\},$$

donc :

$$\text{spectre } (S_{q-2} u) v_q \subset \text{somme des spectres} \subset \{ \xi, 2^{q-2} \leq |\xi| \leq 92^{q-2} \}.$$

De plus, les termes  $u_p$  et  $v_q$  sont tous deux petits si  $u$  et  $v$  sont assez régulières, en sorte que la dernière somme, dont les termes sont petits comme  $u_p v_q$ , représente un « terme d'erreur » plus régulier que  $u$  ou  $v$ .

Cette démarche est à l'origine de l'introduction par J.-M. BONY du concept de « paraproduit », le paraproduit (non symétrique) de  $u$  et  $v$  étant  $T_u v = \sum (S_{q-2} u) v_q$  (cf. Ex. A.5) ; on a alors  $uv = T_u v + T_v u +$  reste meilleur. Ce concept et la notion « d'opérateurs paradifférentiels » qui lui est liée se sont révélés très fructueux dans l'étude des singularités de solutions d'équations non linéaires (cf. BONY [B1]).

Remarquons que si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , la partie i) de la proposition est élémentaire, compte tenu de la remarque du paragraphe 1.5. Une variante commode dans les applications est donnée par la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.1.2** *Si  $u, v \in L^\infty \cap H^s$  ( $s$  entier  $> 0$ ), pour tous  $\alpha, \beta$ ,  $|\alpha| + |\beta| = s$ , on a :*

$$|(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v)|_0 \leq \text{Cte} (\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|v\|_0). \quad (2.1.3)$$

*Preuve :* c'est évident si  $|\alpha| = 0$  ou  $|\beta| = 0$ . Sinon (par exemple  $|\alpha| \geq 1$ ), on écrit

$$\partial^\alpha u \partial^\beta v = \sum_j * \partial_{i_j} (\partial^{\alpha_j} u \partial^{\beta_j} v) + * u \partial^{\alpha + \beta} v,$$

où  $|\alpha_j| + |\beta_j| = s - 1$ , \* désignant des coefficients sans importance.

Pour prouver (2.1.3), il suffit de montrer :

$$|\partial^{\alpha_j} u \partial^{\beta_j} v|_1 \leq \text{Cte} (\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|v\|_0).$$

On procède comme dans la preuve de la proposition 2.1.1 :

$$\partial^{\alpha_j} u \partial^{\beta_j} v = \sum (S_q \partial^{\alpha_j} u) (\partial^{\beta_j} v)_q + \sum (\partial^{\alpha_j} u)_p (S_{p+1} \partial^{\beta_j} v) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

et on a cette fois :

$$\begin{aligned} |S_q (\partial^{\alpha_j} u) (\partial^{\beta_j} v)_q|_0 &\leq \|S_q \partial^{\alpha_j} u\|_0 |(\partial^{\beta_j} v)_q|_0 \\ &\leq \text{Cte} \|u\|_0 2^{q|\alpha_j|} |v|_s c_q 2^{-q(s-|\beta_j|)} \\ &\leq \text{Cte} \|u\|_0 |v|_s 2^{-q} c_q, \end{aligned}$$

à cause du lemme 1.1.2 iii), ce qui prouve le résultat.  $\square$

Remarquons que l'analogie de (2.1.3) dans les espaces de Hölder résulte simplement des inégalités de convexité du paragraphe 1.5.

Il est en fait traditionnel de prouver (2.1.3) à l'aide de l'inégalité (dite « de Gagliardo-Nirenberg ») suivante (voir [Au]) : si  $u \in L^\infty \cap H^s$  ( $s$  entier  $> 0$ ), pour tout  $\alpha$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq s$ ,

$$|\partial^\alpha u|_{L^p} \leq \text{Cte} \|u\|_0^{1-|\alpha|/s} |u|_s^{|\alpha|/s},$$

où  $p = 2s/|\alpha|$ .

En admettant cette inégalité, on obtient par l'inégalité de Hölder ( $p = 2s/|\alpha|$ ,  $q = 2s/|\beta|$ )

$$\begin{aligned} |(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v)|_0 &\leq |\partial^\alpha u|_{L^p} |\partial^\beta v|_{L^q} \\ &\leq \text{Cte} (\|u\|_0 |v|_s)^{1-|\alpha|/s} (|u|_s \|v\|_0)^{|\alpha|/s} \\ &\leq \text{Cte} (\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|v\|_0), \end{aligned}$$

par convexité de l'exponentielle  $a^\mu b^{1-\mu} \leq \mu a + (1-\mu)b$ , l'argument étant parallèle à celui dans les espaces  $C^\alpha$ .  $\square$

## 2.2 Estimation d'une fonction composée

**PROPOSITION 2.2.** Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^\infty$ , avec  $F(0) = 0$ . Si  $u \in L^\infty \cap H^s$  ( $s > 0$ ), alors  $F(u) \in L^\infty \cap H^s$  et  $|F(u)|_s \leq C |u|_s$ , où  $C$  ne dépend que de  $F$  et de  $\|u\|_0$ .

La preuve utilise le lemme suivant.

LEMME 2.2 (« MULTIPLICATEURS DE MEYER »). Soit  $\delta \in \mathbb{R}$  et une suite  $m_p \in C^\infty$ , avec, pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{|\alpha| = k} \|\partial^\alpha m_p\|_0 \leq C_k 2^{p(k+\delta)}.$$

L'application  $M : u \mapsto \sum m_p u_p = Mu$  applique  $H^s$  dans  $H^{s-\delta}$  pour tout  $s > \delta$ , avec une norme d'opérateur ne dépendant que des  $C_k$  pour  $k \leq E(s - \delta) + 1$ .

Preuve : Comme le spectre de  $u_p$  est contenu dans  $\{\xi, 1/2 \leq 2^{-p} |\xi| \leq 2\}$ , choisissons  $C > 4$  et découpons  $m_p$  selon la formule

$$\hat{m}_p = \psi(2^{-p} \xi/C) \hat{m}_p + \sum_{k \geq 0} \varphi(2^{-k} 2^{-p} \xi/C) \hat{m}_p = \hat{m}_{p,-1} + \sum_{k \geq 0} \hat{m}_{p,k}.$$

Posons alors  $M_k u = \sum m_{p,k} u_p$ ,  $k \geq -1$ .

Les termes de  $M_{-1} u$  ont leurs spectres dans des boules  $\{\xi, |\xi| \leq (C+2) 2^p\}$  et  $|m_{p,-1} u_p|_0 \leq \text{Cte } |m_{p,-1}|_0 c_p |u|_s 2^{-ps}$ . Comme, d'après le lemme 1.1.2 i),

$$\|m_{p,-1}\|_0 \leq \text{Cte } \|m_p\|_0 \leq \text{Cte } 2^{p\delta} C_0,$$

le lemme 2.1 montre que  $M_{-1} u \in H^{s-\delta}$  si  $s > \delta$ .

Les termes de  $M_k u$  ( $k \geq 0$ ) ont leurs spectres dans des couronnes  $\left\{ \xi, 2^{p+1} \left( \frac{C}{4} 2^k - 1 \right) \leq |\xi| \leq 2^{p+1} (1 + C 2^k) \right\}$  et

$$|m_{p,k} u_p|_0 \leq \text{Cte } \|m_{p,k}\|_0 c_p |u|_s 2^{-ps}.$$

Comme, d'après le lemme 1.1.2 i) et iii),

$$\begin{aligned} \|m_{p,k}\|_0 &\leq \text{Cte } \sum_{|\alpha| = \ell} \|\partial^\alpha m_{p,k}\|_0 2^{-(p+k)\ell} \\ &\leq \text{Cte } C_\ell 2^{-k\ell} 2^{p\delta}, \end{aligned}$$

on obtient, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |m_{p,k} u_p|_0 &\leq \text{Cte } C_\ell |u|_s 2^{-k\ell} c_p 2^{-p(s-\delta)} \\ &\leq \text{Cte } C_\ell |u|_s 2^{k(s-\ell-\delta)} C_p 2^{-(p+k)(s-\delta)}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $M_k u \in H^{s-\delta}$  avec  $|M_k u|_{s-\delta} \leq \text{Cte } C_\ell 2^{k(s-\ell-\delta)} |u|_s$ , d'après la remarque suivant le lemme 1.1.1 et (1.1.2'). Finalement, en

choisissant  $\ell > s - \delta$ ,  $M = \sum_{k \geq -1} M_k$  converge normalement dans l'espace des opérateurs continus de  $H^s$  dans  $H^{s-\delta}$ , et  $\|M\| \leq Cte (C_0 + C_\ell)$ .  $\square$

Un exemple typique de tels « multiplicateurs de Meyer » (où  $\delta = 0$ ) est donné par  $m_p = S_p a$ , pour une certaine  $a \in L^\infty$  (à cause du lemme 1.1.2). Bien sûr, dans ce cas,  $m_p$  a son spectre dans une boule  $\{\xi, |\xi| \leq C 2^p\}$ , ce qui n'est pas supposé en général ; néanmoins, la preuve du lemme 2.2 consiste précisément à montrer qu'on peut pour l'essentiel se ramener à cette situation.

Remarquons (Ex. A.7) que  $M$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $\delta$ , dont le symbole  $m(x, \xi) = \sum m_p(x) \varphi(2^{-p} \xi)$  ne vérifie toutefois pas les estimations standard : son action de  $H^s$  dans  $H^{s-\delta}$  n'est donc pas si évidente qu'il y paraît, et elle est d'ailleurs soumise à la condition  $s > \delta$ .

*Preuve de la proposition 2.2 :* on utilise l'artifice dit « de la série télescopique » qui consiste à écrire

$$F(u) = F(S_0 u) + F(S_1 u) - F(S_0 u) + \dots + F(S_{p+1} u) - F(S_p u) + \dots,$$

puis

$$F(S_{p+1} u) - F(S_p u) = m_p u_p, \text{ avec } m_p = \int_0^1 F'(S_p u + t u_p) dt.$$

a) Si  $u \in L^\infty \cap L^2$ , pour tout  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha (F(S_0 u)) \in L^\infty \cap L^2$  : en effet,

$$\partial^\alpha (F(S_0 u)) = \sum * F^{(q)}(S_0 u) (\partial^{\gamma_1} S_0 u) \dots (\partial^{\gamma_q} S_0 u),$$

où les  $\gamma_j$  sont des multi-indices,  $\gamma_1 + \dots + \gamma_q = \alpha$ ,  $1 \leq q \leq |\alpha|$ ,  $|\gamma_j| \geq 1$ . Tout terme  $\partial^\gamma S_0 u$  est dans  $L^2 \cap L^\infty$ , avec  $\|\partial^\gamma S_0 u\|_0 \leq Cte \|u\|_0$ ,  $|\partial^\gamma S_0 u|_0 \leq Cte |u|_0$ , d'où le résultat si  $|\alpha| \geq 1$ . Pour  $|\alpha| = 0$ ,  $|F(S_0 u)(x)| \leq C |S_0 u(x)|$  (où  $C$  ne dépend que de  $\|u\|_0$ ), donc  $|F(S_0 u)|_0 \leq C Cte |u|_0$ .

b) Vérifions que  $m_p$  est un « multiplicateur de Meyer » d'ordre  $\delta = 0$ . Il suffit de considérer  $\tilde{m}_p = G(S_p u)$ . On a alors :

$$\partial^\alpha G(S_p u) = \sum * G^{(q)}(S_p u) (\partial^{\gamma_1} S_p u) \dots (\partial^{\gamma_q} S_p u),$$

comme en a), et  $\|\partial^\gamma S_p u\|_0 \leq Cte \|u\|_0 2^{p|\gamma|}$  d'après le lemme 1.1.2. Donc

$$\|\partial^\alpha G(S_p u)\|_0 \leq Cte 2^{p(|\gamma_1| + \dots + |\gamma_q|)} = Cte 2^{p|\alpha|},$$

où la constante ne dépend que de  $G$ ,  $\alpha$  et  $\|u\|_0$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Là encore, nous renvoyons à J.-M. BONY pour la formule suivante, dite de « paralinéarisation », qui rend « évidente » la proposition 2.2 : si  $u \in H^s$ ,  $s > \frac{n}{2}$ ,  $F(u) = T_{F'(u)}u + R(u)$ , avec  $T$  le paraproduit défini au paragraphe 2.1 (cf. Ex. A.5), et  $R(u) \in H^{2s-n/2} \not\subseteq H^s$ . Autrement dit, l'estimation sur  $F(u)$  est « linéaire en  $u$  » parce qu'en fait  $F(u)$  est, au reste près,  $T_{F'(u)}u$ .

## B ANALYSE MICROLOCALE : FRONT D'ONDE ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

### 1 FRONT D'ONDE D'UNE DISTRIBUTION

#### 1.1 Définition du front d'onde

La transformée de Fourier  $\hat{u}(\xi)$  d'une fonction  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est à décroissance rapide en  $\xi$ , c'est-à-dire :

$$\forall k, \quad |\hat{u}(\xi)| \leq C_k(1 + |\xi|)^{-k}. \tag{1.1.1}$$

Inversement, si (1.1.1) est satisfaite par la transformée de Fourier d'une distribution  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à cause de la formule d'inversion de Fourier.

**DÉFINITION 1.1.1.** Pour  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , soit  $\Sigma(u)$  le complémentaire (dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ) de l'ensemble des directions  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  au voisinage (conique) desquelles  $\hat{u}$  satisfait (1.1.1). Par « conique », on entend la propriété suivante d'un ensemble  $\Gamma : \xi \in \Gamma, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda \xi \in \Gamma$ . De même que  $\text{supp sing } u = \bigcup \{x, u \text{ est } C^\infty \text{ près de } x\}$  est l'ensemble des « mauvais points » de  $u$ ,  $\Sigma(u)$  est l'ensemble des « mauvaises directions spectrales » de  $u$ , ou encore des « mauvaises fréquences » de  $u$ .

Pour combiner ces deux informations dans le concept de  $WF(u)$ , ( $WF$  se prononce « front d'onde de »), on utilise le lemme suivant.

**LEMME 1.1.1.** Si  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Sigma(\varphi u) \subset \Sigma(u)$ .

*Preuve :* on a  $\widehat{\varphi u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(\eta) \hat{u}(\xi - \eta) d\eta$ . Comme  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M$  pour un certain  $M$ , et d'autre part  $\hat{\varphi}$  vérifie (1.1.1). Soit  $\xi_0 \notin \Sigma(u)$  : dans un voisinage conique  $\Gamma$  de  $\xi_0$ ,  $\hat{u}$  satisfait (1.1.1) ; coupons l'intégrale en  $\int_{|\eta| \leq c|\xi|}$  et  $\int_{|\eta| \geq c|\xi|}$ , en sorte que pour  $\xi$  dans un voisinage  $\Gamma_1$  de  $\xi_0$ , on ait  $\xi - \eta \in \Gamma$  dans la

première intégrale (c'est possible avec  $0 < c < 1$ ,  $c$  assez petit). On obtient alors :

$$\left| \int_{|\eta| \leq c|\xi|} \right| \leq c_k (1 + |\xi|)^{-k} (1 - c)^{-k} |\hat{\varphi}|_{L_1},$$

car  $|\eta| \leq c|\xi|$  implique  $|\xi - \eta| \geq (1 - c)|\xi|$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\eta| \geq c|\xi|} \right| &\leq \\ &\leq C \int |\hat{\varphi}(\eta)| (1 + |\eta|)^{k+M} (1 + |\xi - \eta|)^M \frac{d\eta}{(1 + |\eta|)^{k+M}} \\ &\leq C \int |\hat{\varphi}(\eta)| (1 + |\eta|)^{k+M} \frac{(1 + (1 + 1/c)|\eta|)^M}{(1 + |\eta|)^M} d\eta \frac{1}{(1 + c|\xi|)^k} \\ &\leq \frac{C(1 + 1/c)^M}{c^k} (1 + |\xi|)^{-k} \int |\hat{\varphi}(\eta)| (1 + |\eta|)^{k+M} d\eta, \end{aligned}$$

car  $|\xi - \eta| \leq \left(\frac{1}{c} + 1\right) |\eta|$ .

L'estimation

$$|(1 + |\xi|)^k \widehat{\varphi u}(\xi)| \text{Cte}_k \int |\hat{\varphi}(\eta)| (1 + |\eta|)^{k+M} d\eta \quad (1.1.2)$$

prouve le lemme, en même temps qu'elle précise la dépendance en  $\varphi$ .  $\square$

On peut alors définir, pour  $u \in \mathcal{D}'(X)$ , ( $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ), l'ensemble  $\Sigma_x(u)$  des « mauvaises directions spectrales » de  $u$  au-dessus de  $x$  par  $\Sigma_x(u) = \bigcap_{\varphi} \Sigma(\varphi u)$ ,  $\varphi$  décrivant l'ensemble des  $\varphi \in C_0^\infty(X)$ ,  $\varphi(x) \neq 0$ .

**DÉFINITION 1.1.2.** Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathcal{D}'(X)$ . Le fermé conique de  $X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$  défini par

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \xi \in \Sigma_x(u)\},$$

est le front d'onde de  $u$ .

La proposition suivante montre que  $WF(u)$  est l'ensemble des mauvaises directions spectrales de  $u$  au-dessus de  $\text{supp sing } u$  : c'est donc bien la synthèse annoncée au chapitre I, paragraphe 1.

**PROPOSITION 1.1.2.** La projection de  $WF(u)$  sur  $X$  est  $\text{supp sing } u$ .

*Preuve :* en effet, si  $x_0 \notin \text{supp sing } u$ ,  $\Sigma_{x_0}(u) = \emptyset$  par définition. Inversement, supposons que, pour un  $x_0$ ,  $\Sigma_{x_0}(u) = \emptyset$  : cela signifie que pour

toute direction  $\xi \in S^{n-1}$ , il existe  $\varphi_\xi \in C_0^\infty(X)$ ,  $\varphi_\xi(x_0) \neq 0$ , telle que  $\widehat{\varphi_\xi u}$  soit à décroissance rapide dans un voisinage conique  $V_\xi$  de  $\xi$ . Par compacité de  $S^{n-1}$ , on obtient un nombre fini de fonctions  $\varphi_i(x) = \varphi_{\xi_i}(x)$  telles que, pour tout  $i$ ,  $V_{\xi_i} \cap \Sigma(\varphi_i u) = \phi$  : le lemme

1.1.1 implique alors que  $\Sigma\left(\left(\prod_i \varphi_i\right) u\right) = \phi$  c'est-à-dire  $\left(\prod_i \varphi_i\right) u \in C_0^\infty$ , ce qui implique  $x_0 \notin \text{supp sing } u$ . □

**1.2 Exemples. Cas des distributions de Fourier**

EXEMPLE 1.2.1. Considérons  $\delta$ , masse de Dirac à l'origine. Pour tout  $\varphi \in C_0^\infty$ ,  $\varphi(0) \neq 0$ ,

$$\widehat{\varphi \delta}(\xi) = \langle \delta, \varphi e^{-ix\xi} \rangle = \varphi(0), \text{ et } \Sigma(\varphi \delta) = \mathbb{R}^n \setminus 0.$$

Donc  $WF(\delta) = \{(x, \xi), x = 0, \xi \neq 0\}$ .

EXEMPLE 1.2.2. Soit

$$u = \begin{cases} -1 & x_1 < 0 \\ +1 & x_1 \geq 0; \end{cases}$$

on a

$$\widehat{\varphi u}(\xi) = - \int_{x_1 \leq 0} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx + \int_{x_1 \geq 0} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx.$$

Lorsque  $|\xi| \rightarrow +\infty$  près d'une direction  $\xi_0 = ((\xi_0)_1, \xi'_0)$  pour laquelle  $\xi'_0 \neq 0$ , chacune des intégrales est à décroissance rapide, car par exemple

$$\int_{x_1 \leq 0} = \int_{x_1 \leq 0} dx_1 e^{-ix_1 \xi_1} \hat{\varphi}'(x_1, \xi'),$$

où  $\hat{\varphi}'$  est la transformée de Fourier partielle en  $\xi'$ . Donc  $WF(u) \subset \{(x, \xi), x_1 = 0 \text{ et } \xi' = 0\}$ .

Par ailleurs, si une normale à  $\{x_1 = 0\}$  n'était pas dans  $WF(u)$ , les autres n'y seraient pas non plus puisque  $u$  est réelle et invariante par translation en  $x'$  et  $u$  serait  $C^\infty$ . Donc  $WF(u) = \{(0, x', \xi_1, 0), \xi_1 \neq 0\}$ .

Une classe importante de distributions est décrite dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2. Soit  $\varphi(x, \xi)$  réelle, homogène de degré 1 en  $\xi$ ,  $C^\infty$  pour  $\xi \neq 0$ , et  $a \in S^m$ , nul pour  $|x| \geq C$ . Si  $d\varphi \neq 0$  sur  $\text{supp } a$ , on peut définir  $u = \int e^{i\varphi(x, \xi)} a(x, \xi) d\xi$  (intégrale oscillante) et  $WF(u) \subset \{(x, \eta), \eta = \varphi'_x(x, \xi), \varphi'_\xi = 0\}$ .

La définition est une conséquence facile du théorème 1 de l'appendice (cf. chapitre I, exercice 4.6), tandis que le contrôle du front d'onde résulte des définitions et d'un théorème de « phase non stationnaire » (Ex. B.9).

## 2 OPÉRATEURS LINÉAIRES ET FRONT D'ONDE

### 2.1 Un théorème général

Nous admettrons ici le théorème suivant, dont la démonstration élémentaire n'utilise que la définition 1.1.2 du front d'onde (voir [H4]).

**THÉORÈME 2.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  et  $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ . Supposons que  $WF(K)$  ne contienne pas de directions parallèles à  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}^m$  (c'est-à-dire  $(x, y, \xi, \eta) \in WF(K) \Rightarrow \xi \neq 0, \eta \neq 0$ ). On peut alors étendre l'opérateur  $K$  défini par la formule  $Ku(x) = \int K(x, y) u(y) dy$  à  $\mathcal{E}'(Y)$  (l'intégrale doit s'entendre au sens des distributions), et*

$$WF(Ku) \subset WF'(K) \circ WF(u), \quad (2.1.1)$$

où :

$$WF'(K) = \{(x, y, \xi, \eta), (x, y, \xi, -\eta) \in WF(K)\}.$$

Ici,

$$WF'(K) \circ WF(u) = \{(x, \xi), \exists (y, \eta) \in WF(u), (x, y, \xi, \eta) \in WF'(K)\}.$$

Autrement dit,  $WF'(K)$  décrit le déplacement de  $WF(u)$  par l'action de  $K$ , étant entendu que (2.1.1) n'est qu'une inclusion. Donnons quelques exemples d'applications de ce théorème.

**EXEMPLE 2.1.1.** Soit  $Tu(x) = u(x, 0)$  l'opérateur « trace de  $u$  sur  $t = 0$  » défini pour  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , où  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Comme  $u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}^2(x, \tau) d\tau$  ( $\hat{u}$  signifie la transformée de Fourier partielle par rapport à  $t$ ), on a aussi :

$$\begin{aligned} Tu(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{Tu}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n-1} \int e^{ix\xi} \hat{u}(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= (2\pi)^{-n-1} \int e^{i(x-y)\xi} e^{-i\tau} u(y, t) dy dt d\xi d\tau. \end{aligned}$$

L'opérateur  $T$  a donc pour noyau  $K(x, y, t)$  (ici  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^{n+1}$ ) la distribution de Fourier

$$K(x, y, t) = (2\pi)^{-n-1} \int e^{i(x-y)\xi} e^{-it\tau} d\xi d\tau,$$

de phase

$$\Phi(x, y, t, \xi, \tau) = (x - y)\xi - t\tau.$$

On sait (d'après le théorème 1.2) que  $WF(K) \subset \{(x, x, 0, \xi, -\xi, -\tau)\}$ . Donc  $WF(K)$  ne contient pas de directions parallèles à  $\mathbb{R}_\xi^n$ , mais il contient des directions  $(\xi, -\xi, -\tau) = (0, 0, -\tau)$  parallèles à  $\mathbb{R}_{\xi, \tau}^{n+1}$  : pour pouvoir appliquer (2.1.1), on admettra (Ex. B.4) qu'il suffit de supposer que la direction verticale  $(0, -\tau)$  n'est pas dans le front d'onde de  $u$ . On trouve alors :

$$WF(Tu) \subset \{(x, \xi), \exists \tau, (x, 0, \xi, \tau) \in WF(u)\}.$$

Si l'on veut comprendre cette relation plus intuitivement, on peut observer ceci :

i) Les singularités de  $u$  hors de  $\{t = 0\}$  ne peuvent évidemment jouer aucun rôle dans  $Tu$ .

ii) Si  $\chi(D_x)$  est un opérateur « tangentiel », on a  $\chi(D_x)Tu = T\chi(D_x)u$ .

Si, pour un  $(x_0, \xi_0)$ , et tout  $\tau$ ,  $(x_0, 0, \xi_0, \tau) \notin WF(u)$ , on aura  $Pu \in C^\infty$  pour  $P = \tilde{\chi}(D_x D_t) \chi(D_x) \varphi$  où  $\varphi \in C_0^\infty$  est une troncature près de  $(x_0, 0)$ ,  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  étant des symboles de degré zéro,  $\chi$  supporté dans un voisinage conique de  $\xi_0$ , et  $\tilde{\chi}$  nul dans un voisinage conique de  $(0, \pm 1)$ . Comme la verticale n'est pas dans  $WF(u)$ ,  $\tilde{\chi}\varphi u = \varphi u + C^\infty$ , donc

$$\chi(D_x) T\varphi u = \chi(D_x) \varphi(x, 0) Tu \in C^\infty,$$

ce qui signifie  $(x_0, \xi_0) \notin WF(Tu)$ .

EXEMPLE 2.1.2. Soit  $X = \partial_t + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \partial_{x_i}$  un champ réel  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considérons le problème de Cauchy :

$$Xu = 0, u|_{t=0} = u_0,$$

et définissons, pour  $T > 0$  assez petit,  $Ku_0 = u(x, T)$ . Notons  $x(t, x_0)$  la solution de l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = a_i(x, t) & 1 \leq i \leq n \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La courbe  $t \mapsto (x(t, x_0), t)$  n'est autre que la courbe intégrale de  $X$  issue de  $(x_0, 0)$ ; comme toute solution  $u$  est constante sur ces courbes,  $u(x(t, x_0), t) = u_0(x_0)$ , ce qui décrit l'unique solution  $u$  du problème de Cauchy considéré (car  $(x_0, t) \mapsto (x(t, x_0), t)$  est un difféomorphisme local). Toute singularité  $x_0$  de  $u_0$  se « répercute » en une singularité de  $u$  le long de la courbe intégrale de  $X$  issue de  $x_0$ , et aussi en une singularité de  $Ku_0$  en  $x(T, x_0)$  (car si la trace de  $u$  en  $x(T, x_0)$  était  $C^\infty$ ,  $u$  elle-même serait  $C^\infty$  près de  $(x(T, x_0), T)$  d'après le raisonnement précédent). L'opérateur  $K$  déplace donc le support singulier de  $u$  selon le flot de  $X$ .

Examinons maintenant la situation au niveau plus précis du front d'onde.

On a  $Ku_0(x) = u_0(\Phi^{-1}(x))$  (si  $\Phi(x_0) = x(T, x_0)$ ), ce que l'on peut écrire

$$Ku_0 = (2\pi)^{-n} \int e^{i(\Phi^{-1}(x)-y)\xi} u_0(y) dy d\xi.$$

Le noyau  $K$  est donc la distribution de Fourier :

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(\Phi^{-1}(x)-y)\xi} d\xi.$$

D'après le théorème 1.2, on a (en désignant par  $'A$  la transposée de  $A$ )

$$WF(K) \subset \{(x, \Phi^{-1}(x), '(\Phi^{-1})'(x)\xi, -\xi)\},$$

et, par (2.1.1),

$$WF(Ku_0) \subset \{(\Phi(y), \xi), \xi = ' \Phi'^{-1}(y)\eta, (y, \eta) \in WF(u_0)\}.$$

On peut « visualiser » l'application  $(y, \eta) \mapsto (x, \xi)$  induite par  $\Phi$  de la façon suivante : si  $S$  est une surface passant par  $y$ , de normale  $\eta$  en  $y$ ,  $\Phi(S)$  est une surface passant par  $x$ , de normale  $\xi$ . En même temps, cette interprétation rend « intuitif » le résultat sur  $WF(Ku_0)$  obtenu (en procédant par analogie avec l'exemple 1.2.2). Le flot de  $X$  induit donc une application  $(y, \eta) \mapsto (x, \xi)$  qui décrit le déplacement du front d'onde sous l'action de  $K$ .

EXEMPLE 2.1.3. Considérons la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\square u = (\partial_t^2 - \Delta_x) u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = u_0 \quad (2.1.2)$$

où  $\Delta_x = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$  est le laplacien.

A l'aide d'une transformation de Fourier partielle en  $x$  (notée par abus), il est facile de calculer  $u$ ; en effet

$$\partial_t^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0,$$

d'où

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) e^{i|\xi|t} + B(\xi) e^{-i|\xi|t}$$

avec

$$A + B = 0, \quad i|\xi|(A - B) = \hat{u}_0,$$

soit finalement :

$$u(x, t) = \frac{1}{2i(2\pi)^n} \left\{ \int e^{i(x-y)\xi + i|\xi|t} \frac{1}{|\xi|} u_0(y) dy d\xi - \int e^{i(x-y)\xi - i|\xi|t} \frac{1}{|\xi|} u_0(y) dy d\xi \right\}.$$

Nous admettrons que  $u$  est la seule solution du problème envisagé, et que le remplacement de  $1/|\xi|$  par  $(1 - \chi(\xi))/|\xi|$  dans les intégrales ci-dessus ( $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\chi = 1$  près de 0) définit une nouvelle fonction  $\tilde{u}$  qui ne diffère de  $u$  que par une fonction  $C^\infty$ .

On remarque que  $\tilde{u} = (K_+ + K_-)u_0$ , où le noyau  $K_\pm$  de l'opérateur  $K_\pm$  est la distribution de Fourier

$$K_\pm = \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\xi \pm i|\xi|t} \frac{1 - \chi(\xi)}{|\xi|} d\xi.$$

D'après le théorème 1.2, on a :

$$WF(K_\pm) \subset \left\{ (x, t, y, \xi, \pm|\xi|, -\xi), x - y \pm t \frac{\xi}{|\xi|} = 0 \right\},$$

d'où

$$WF(K_\pm u_0) \subset \left\{ (x, t, \xi, \pm|\xi|), (y, \xi) \in WF(u_0), \text{ où } y = x \pm t \frac{\xi}{|\xi|} \right\}.$$

Géométriquement, dessinons  $\Gamma_y$  le « cône de lumière » issu de  $y$ , d'équation  $t^2 = |x - y|^2$ : la singularité  $(y, \xi)$  de  $u_0$  se « répercute » en la singularité de  $K_\pm u_0$  consistant en la seule direction  $(\xi, \pm|\xi|)$  le long de la génératrice de  $\Gamma_y$  qui lui est perpendiculaire.

Dans le cas particulier où  $n = 1$ ,  $\square = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)$ , et toute fonction  $u = \Phi(x + t)$  (solution de  $(\partial_t - \partial_x)u = 0$ ) ou  $u = \Psi(x - t)$  (solution de  $(\partial_t + \partial_x)u = 0$ ) est solution de  $\square u = 0$ . La solution de (2.1.2) est alors  $u = \Phi(x + t) - \Phi(x - t)$  pour  $2\Phi'(x) = u_0(x)$ , soit

$u(x, t) = 1/2 \int_{x-t}^{x+t} u_0(s) ds$ . Comme dans l'exemple 2.1.2, une singularité de  $u_0$  se répercutera en deux (puisqu'il y a maintenant deux champs  $X$ ) singularités de  $u$ , analyse que l'on peut affiner au niveau du front d'onde.

La différence fondamentale du cas  $n \geq 2$  avec le cas  $n = 1$ , est que la position même du support singulier de  $u$  dépend du front d'onde de  $u_0$ , et non de son seul support singulier. Si par exemple  $u_0$  est  $C^\infty$  hors de 0, on sait que  $\text{supp sing } u \subset \Gamma_0$ ; mais pour savoir quelles génératrices exactement constituent  $\text{supp sing } u$ , il faut savoir quelles sont les directions de  $WFu_0$  au-dessus de 0. On voit sur cet exemple que l'introduction du front d'onde n'est pas un simple raffinement de l'analyse du support singulier, elle en est une nécessité.

## 2.2 Opérateurs pseudo-différentiels et front d'onde

L'application du théorème général 2.1 aux opérateurs pseudo-différentiels est d'un intérêt tout particulier.

**PROPOSITION 2.2.1.** *Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel, de noyau  $K$ . Alors  $WF(K) \subset \{(x, x, \xi, -\xi), \xi \neq 0\}$ .*

*Preuve :* en effet,  $K(x, y) = \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) d\xi$  est une distribution de Fourier, et la proposition résulte du théorème 1.2. □

**COROLLAIRE 2.2.1.** *Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel. Pour tout  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $WF(Au) \subset WF(u)$ .*

*Preuve :* si  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , cela résulte du théorème général 2.1 et de la proposition 2.2.1, car  $WF'(K) \subset \{(x, x, \xi, \xi)\}$ . Si  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ ,  $(x_0, \xi_0) \notin WF(\chi u)$  pour  $\chi \in C_0^\infty$  valant 1 près de  $x_0$ . Donc  $(x_0, \xi_0) \notin WF(A\chi u)$  et aussi  $(x_0, \xi_0) \notin WF(\tilde{\chi}A\chi u)$  pour  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty$  valant 1 près de  $x_0$ ; or  $\tilde{\chi}A\chi u = \tilde{\chi}Au + C^\infty$  si  $\chi = 1$  au voisinage de  $\text{supp } \tilde{\chi}$ ; donc  $(x_0, \xi_0) \notin WF(\tilde{\chi}Au)$  pour un tel choix de  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$ , ce qui implique  $(x_0, \xi_0) \notin WF(Au)$ .

La propriété du corollaire 2.2.1 s'appelle « propriété pseudo-locale » : elle signifie que l'action d'un opérateur pseudo-différentiel ne déplace pas le front d'onde (comparer avec les exemples 2.1.2 et 2.1.3), mais, le cas échéant, le diminue : par exemple,  $\partial_t \Phi(x) = 0$ , alors que  $\Phi$  peut être prise aussi singulière que l'on veut.

Nous allons préciser encore cette action.

**PROPOSITION 2.2.2.** *Soit  $\Gamma$  un ouvert conique de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , et  $a \in S^m$ , tel que  $a \in S^{-\infty}$  dans  $\Gamma$  (ce qui signifie que pour tout  $(x_0, \xi_0) \in \Gamma$ , il existe un voisinage conique de  $(x_0, \xi_0)$  sur lequel ont lieu les estimations qui*

caractérisent  $S^{-\infty}$ . Alors, pour  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , et  $A = \text{Op}(a)$ ,  $WF(Au) \cap \Gamma = \emptyset$ .

*Preuve* : soient  $(x_0, \xi_0) \in \Gamma$ , et  $q(x, \xi) \in S^0$  valant 1 près de  $(x_0, \xi_0)$  et tel que  $aq \in S^{-\infty}$ ; l'opérateur  $A_1 = \text{Op}(aq)$  a un noyau  $C^\infty$ , et le noyau de  $A_2 = \text{Op}(a(1-q))$  est  $C^\infty$  près de  $(x_0, x_0, \xi_0, -\xi_0)$  d'après le théorème 1.2. Donc  $(x_0, \xi_0) \notin WF(A_2 u)$  d'après le théorème général 2.1, et  $Au = A_2 u + C^\infty$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

Autrement dit, l'action d'un opérateur  $A$  détruit le front d'onde là où son symbole est d'ordre  $-\infty$ .

Le phénomène « inverse » fait l'objet du corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.2.2.** Si  $a \in S^m$ ,  $Au \in C^\infty$  près de  $(x_0, \xi_0)$  et  $|a(x, \xi)| \geq c|\xi|^m$  pour  $|\xi| \geq C$  dans un voisinage conique de  $(x_0, \xi_0)$ , alors  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ .

*Preuve* : par définition, il existe  $\tilde{b} \in S^{-m}$ ,  $a\tilde{b} - 1 \in S^{-1}$  dans un voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ . Comme au chapitre I, paragraphe 5.4, on voit alors qu'il existe  $b \in S^{-m}$  tel que  $b \# a - 1 \in S^{-\infty}$  près de  $(x_0, \xi_0)$ . Comme  $u = BAu - (BA - \text{id})u$ , la conclusion résulte de la proposition 2.2.2 et de la pseudo-localité.  $\square$

Autrement dit, aux points non caractéristiques du symbole de  $A$  (ceux qui, par définition, vérifient l'hypothèse du corollaire 2.2.2), le front d'onde est conservé par l'action de  $A$ .

Le corollaire 2.2.2 peut servir de caractérisation du front d'onde :  $WF(u) = \cap \text{car}(A)$ , où  $A$  décrit les opérateurs proprement supportés tels que  $Au \in C^\infty$ . Il est agréable d'avoir une preuve plus directe du corollaire 2.2.2, utilisant uniquement la définition initiale du front d'onde. La voici, dans le cas d'un opérateur différentiel  $P(x, D)$  dans un ouvert  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  : soit  $u \in \mathcal{D}'(X)$ ; on suppose que  $p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$ , et  $(x_0, \xi_0) \notin WF(Pu)$ .

Pour prouver que  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ , on considère  $\widehat{\varphi u}(\xi)$ , c'est-à-dire  $\langle u, \varphi e^{-ix\xi} \rangle$  : l'idée de la preuve est d'écrire  $\varphi e^{-ix\xi}$  sous la forme  ${}^tP(\psi e^{-ix\xi})$ , en sorte qu'alors

$$\langle u, \varphi e^{-ix\xi} \rangle = \langle u, {}^tP(\psi e^{-ix\xi}) \rangle = \langle Pu, \psi e^{-ix\xi} \rangle$$

aura la décroissance voulue d'après l'hypothèse sur  $Pu$ . Notons  $Q = {}^tP$  (avec  $q_m = p_m$ ), et observons la formule :

$$e^{ix\xi} Q(\psi e^{-ix\xi}) = q_m(x, \xi) \psi + Q_{m-1} \psi + \cdots + Q_0 \psi,$$

où  $Q_j \psi$  est la partie homogène en  $\xi$  de degré  $j$  du membre de gauche, qui est un polynôme dont les coefficients sont des opérateurs différentiels d'ordre  $m-j$  appliqués à  $\psi$ .

Pour obtenir  $q_m(x, \xi) \psi + \dots + Q_0 \psi = \varphi$  pour  $(x, \xi)$  proche de  $(x_0, \xi_0)$ , on prend tout simplement

$$\psi = \psi_N = \frac{1}{q_m(x, \xi)} (\varphi + a_1(x, \xi) + \dots + a_N(x, \xi)),$$

où les  $a_j(x, \xi)$ , homogènes de degré  $-j$  en  $\xi$ , sont déterminés par les relations :

$$\begin{aligned} a_1 + Q_{m-1}(\varphi/q_m) &= 0, \\ a_2 + Q_{m-1}(a_1/q_m) + Q_{m-2}(\varphi/q_m) &= 0, \text{ etc...} \end{aligned}$$

De la sorte,  $e^{ix\xi} Q(\psi e^{-ix\xi}) = \varphi + r_{N+1}$ , où  $r_{N+1}$  est un symbole en  $\xi$  d'ordre  $-N-1$ ,  $\text{supp } r_{N+1} \subset \text{supp } \varphi$ .

Que dire maintenant de  $\langle Pu, \psi_N e^{-ix\xi} \rangle$  ?

On sait que pour une certaine  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de  $x_0$ ,  $\xi_0 \notin \Sigma(\chi Pu)$  : en prenant  $\text{supp } \varphi \supset \text{supp } \psi_N$  assez petit pour que  $\chi = 1$  au voisinage de  $\text{supp } \varphi$ , on obtient  $\langle Pu, \psi_N e^{-ix\xi} \rangle = (\psi_N \chi Pu)(\xi)$ , d'où

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^k |\widehat{\varphi u}(\xi)| &\leq (1 + |\xi|)^k |(r_{N+1})^\wedge|(\xi) + \\ &+ C_k \int |\widehat{\psi_N}(\eta, \xi)| (1 + |\eta|)^{k+M} d\eta, \end{aligned}$$

d'après (1.1.2). Pour  $N$  assez grand, le second membre est borné en  $\xi$ , ce qui complète la preuve.

La proposition 2.2.2 est importante également pour la raison suivante : si l'on étudie une équation  $Pu = f$  au voisinage d'un point  $(x_0, \xi_0)$ , seul le comportement du symbole  $p$  de  $P$  au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$  intervient. On peut utiliser alors toutes les ressources de l'étude locale des fonctions pour préciser la structure de  $p$  et en déduire des propriétés de  $P$ .

### C ESTIMATIONS D'ÉNERGIE

Nous allons montrer ici comment, pour trouver et contrôler les solutions de larges classes d'opérateurs ou de systèmes différentiels, il suffit en fait d'étudier le cas d'opérateurs scalaires pseudo-différentiels d'ordre 1 (cf. par exemple la discussion dans l'exemple B.2.1.3).

#### 1 OPÉRATEURS DU PREMIER ORDRE

On considère dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  l'équation

$$\begin{cases} Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x, D) u = f, & 0 < t < T, \\ u(0, x) = \varphi, \end{cases} \tag{1.1}$$

où

- i)  $a_t(x, \xi) = a(t, x, \xi)$  reste dans un borné de  $S^1$  pour  $0 \leq t \leq T$ .
- ii)  $t \mapsto a_t$  est continue comme application à valeurs dans  $C^\infty$ .
- iii)  $a_1(t, x, \xi)$ , symbole principal de  $a$ , est imaginaire pur.

On prendra bien garde à ce que  $a(t, x, D)u$  dénote l'action de  $a$ , comme opérateur, en les variables  $x$  seulement sur  $u(t, \cdot)$  (on dit que l'opérateur est « tangentiel »).

Le prototype des opérateurs  $L$  est un champ réel  $X = \partial_t + \sum a_j \partial_j$ , pour lequel  $a = i \left( \sum_j a_j \xi_j \right)$  vérifie i), ii) et iii). Le simple fait de permettre à  $a$  d'être pseudo-différentiel, sans introduire de difficultés techniques nouvelles, permettra d'accéder à de nombreuses applications.

### 1.1 L'estimation d'énergie

**PROPOSITION 1.1.** *Si  $s \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq \lambda_s$ , on a, pour tout  $u \in C^1([0, T]; H^s) \cap C^0([0, T]; H^{s+1})$ , l'inégalité*

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} |u(t, \cdot)|_s \leq |u(0, \cdot)|_s + 2 \int_0^T e^{-\lambda t} |Lu(t, \cdot)|_s dt. \quad (1.1.1)$$

*Preuve :*

a) Supposons d'abord  $s = 0$ . On a d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |e^{-\lambda t} u(t, \cdot)|_0^2 &= \frac{d}{dt} \int e^{-2\lambda t} u(t, x) \bar{u}(t, x) dx = \\ &= -2\lambda |e^{-\lambda t} u(t, \cdot)|_0^2 + 2 \operatorname{Re} (e^{-2\lambda t} u_t, u); \end{aligned}$$

d'autre part,

$$(e^{-2\lambda t} au, u) = (e^{-2\lambda t} u, a^* u) = (e^{-2\lambda t} u, (-a + b) u),$$

où  $b = b(t, x, D)$ ,  $b \in S^0$ , à cause de iii) et du théorème 3.2.3 du chapitre I, d'où :

$$2 \operatorname{Re} (e^{-2\lambda t} au, u) = (e^{-2\lambda t} u, bu).$$

Donc

$$2 \operatorname{Re} (e^{-2\lambda t} Lu, u) \geq \frac{d}{dt} |e^{-\lambda t} u(t, \cdot)|_0^2 + (2\lambda - B) |e^{-\lambda t} u(t, \cdot)|_0^2,$$

où  $B \geq \|b\|_{L_x^2 \rightarrow L_x^2}$  pour  $0 \leq t \leq T$ . Pour  $\lambda \geq B/2$ , on obtient en intégrant de 0 à  $t$ ,  $M^2 \leq |u(0, \cdot)|_0^2 + 2MI$ , avec  $M = \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} |u(t, \cdot)|_0$ ,

$$I = \int_0^T e^{-\lambda t} |Lu(t, \cdot)|_0 dt, \text{ soit finalement :}$$

$$M \leq |u(0, \cdot)|_0 + 2I.$$

b) Pour  $s \in \mathbb{R}$ , notons  $E_s = (1 + |D_x|^2)^{s/2}$ : la fonction  $E_s u$  satisfait à l'équation  $\tilde{L}E_s u = E_s Lu$ , où  $\tilde{L} = \partial_t + \tilde{a}$ ,  $\tilde{a} = E_{-s} a E_s$ , ayant les mêmes propriétés i), ii), iii) que  $a$ . L'estimation de a) donne alors (1.1.1).  $\square$

L'intérêt de cette preuve très simple est qu'elle se généralise à des systèmes (d'opérateurs) du premier ordre, c'est-à-dire au cas où  $a$  est une matrice  $N \times N$ , l'hypothèse iii) étant remplacée alors par :

iii)' La matrice  $ia_1(t, x, \xi)$  est symétrique réelle (ou hermitienne). (Voir par exemple l'exercice C.7.)

De tels systèmes sont dit « hyperboliques symétriques » et jouent un grand rôle dans les applications physiques (cf. chapitre III, paragraphe B.1 par exemple).

### 1.2 Existence de solutions

Comme souvent dans le domaine des équations aux dérivées partielles, l'existence de solutions pour un opérateur est une conséquence d'inégalités obtenues d'abord pour cet opérateur.

Le cas considéré dans ce paragraphe est tout à fait typique.

**PROPOSITION 1.2.** *Pour tous  $s \in \mathbb{R}$ ,  $f \in L^1([0, T]; H^s)$  et  $\varphi \in H^s$ , le problème de Cauchy (1.1) admet une unique solution  $u \in C([0, T]; H^s)$  et celle-ci vérifie l'estimation d'énergie (1.1.1).*

*Preuve :*

a) Vérifions d'abord l'unicité. Si  $f = 0$ ,  $\varphi = 0$ , l'équation  $Lu = 0$  implique  $u \in C^1([0, T]; H^{s-1})$ , et l'inégalité (1.1.1) s'applique (avec  $s - 1$  au lieu de  $s$ ), d'où  $u = 0$ .

b) Le passage d'une inégalité à un théorème d'existence utilise une méthode « par dualité » : on prouve qu'une forme linéaire sur un certain espace est continue (c'est là qu'intervient l'inégalité), et on la représente à l'aide d'une fonction concrète qui fournit la solution.

Pour justifier la suite, remarquons que si  $u$  est solution de (1.1), pour toute  $v \in C_0^\infty\{t < T\}$ , on a :

$$\int_0^T (u, L^* v) dt = \int_0^T (Lu, v) dt + (\varphi, v(0, \cdot)),$$

avec  $L^* = -\partial_t + a^*(t, x, D)$ .

On considère donc la forme antilinéaire

$$\psi : L^* v \mapsto \int_0^T (f, v) dt + (\varphi, v(0, \cdot)) = \psi(L^* v),$$

qui est bien définie sur le sous-espace  $E = L^*(C_0^\infty\{t < T\})$  de  $L^1([0, T]; H^{-s})$  car  $L^*$  satisfait l'estimation (1.1.1)

$$\sup_{t \in [0, T]} |v(t, \cdot)|_{-s} \leq C \int_0^T |L^* v(t, \cdot)|_{-s} dt.$$

La forme  $\psi$  est continue, car

$$|\psi(L^* v)| \leq \text{Cte} \left( |\varphi|_s + \int_0^T |f(t, \cdot)|_s dt \right) \int_0^T |L^* v(t, \cdot)|_{-s} dt,$$

d'après l'estimation ci-dessus.

Le théorème de Hahn-Banach permet d'étendre  $\psi$  en une forme linéaire continue  $\tilde{\psi}$ . On représente alors  $\tilde{\psi}$  par une fonction  $u \in L^\infty([0, T]; H^s)$  (le dual de  $L^1([0, T]; H^{-s})$ ) selon la formule  $\psi(L^* v) = \int_0^T (u, L^* v) dt$ , ce qui donne finalement

$$\int_0^T (u, L^* v) dt = \int_0^T (f, v) dt + (\varphi, v(0, \cdot)) \quad (1.2.1)$$

pour tout  $v \in C_0^\infty(t < T)$ . Le reste de la preuve consiste à exploiter (1.2.1) ingénieusement.

c) D'abord, si l'on prend  $v \in C_0^\infty(0 < t < T)$  (c'est-à-dire,  $v$  nulle aussi près de  $t = 0$ ), (1.2.1) et la définition de  $L^*$  impliquent  $Lu = f$  au sens de  $\mathcal{D}'(0 < t < T)$ . Si  $f$  était continue à valeurs dans  $\mathcal{S}$ , on obtiendrait alors, en utilisant l'équation,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty([0, T]; H^{s-1})$ , d'où  $u \in C([0, T]; H^{s-1})$  et  $u \in C^1([0, T]; H^{s-2})$  en utilisant l'équation une nouvelle fois.

Mais alors, pour un tel  $u$ , on peut intégrer  $\int_0^T (u, L^* v) dt$  par parties et (1.2.1) implique  $(u(0, \cdot), v(0, \cdot)) = (\varphi, v(0, \cdot))$  pour tout  $v \in C_0^\infty(t < T)$ , en particulier  $u(0, \cdot) = \varphi$ .

Dans cette étape de la preuve, on a donc obtenu une solution  $u$  de (1.1) pour des données  $(f, \varphi)$  dans  $\mathcal{S}$ ,  $u$  jouissant d'une régularité qui permet de lui appliquer (1.1.1).

d) On procède alors par approximation, en utilisant le fait que la régularité *a priori* exigée de  $u$  pour (1.1.1) n'apparaît pas dans les termes mêmes de cette inégalité : elle disparaît donc par passage à la limite.

Pour  $f, \varphi$  donnés comme dans l'énoncé, on choisit

$$f_k \in \mathcal{S}, \varphi_k \in \mathcal{S}, \text{ avec } \int_0^T |(f - f_k)(t, \cdot)|_s dt \rightarrow 0, |\varphi - \varphi_k|_s \rightarrow 0.$$

En « pensant »  $f_k, \varphi_k$  à valeurs dans  $H^{s+2}$ , le point  $c$ ) donne une solution  $u_k \in C^1([0, T]; H^s) \cap C^0([0, T]; H^{s+1})$  de (1.1).

L'estimation d'énergie (1.1.1) appliquée à  $u_k - u_\ell$  montre que  $u_k$  est une suite de Cauchy dans  $C([0, T]; H^s)$ , dont la limite  $u \in C([0, T]; H^s)$  est la solution cherchée. De plus, en passant à la limite dans les estimations d'énergie pour les  $u_k$ , on trouve l'estimation pour  $u$ .  $\square$

Dans le cas des systèmes symétriques du premier ordre mentionné au paragraphe précédent, la même preuve s'applique.

### 1.3 Propagation des singularités

A titre d'illustration des méthodes pseudo-différentielles, on peut obtenir facilement les singularités de  $u(t, \cdot)$  pour une solution de (1.1) avec  $f \equiv 0$  (comparer avec la discussion de l'exemple B.2.1.2 dans le cas d'un champ réel).

L'idée de la preuve est la suivante : si  $Q = Q(t, x, D)$  commute avec  $L, Qu$  vérifie

$$LQu = 0, \quad (Qu)(0, \cdot) = Q(0, x, D) \varphi.$$

Si de plus  $Q(0, x, D) \varphi \in C_0^\infty$ , la proposition 1.2 implique que  $Q(t, x, D) u \in C^\infty$  pour tout  $t$ , d'où

$$WFu(t, \cdot) \subset \{(x, \xi), q(t, x, \xi) = 0\},$$

d'après le corollaire B.2.2.2.

a) Bien entendu,  $Q$  ne va commuter avec  $L$  qu'approximativement, ce que nous allons préciser :

On cherche  $q \sim \sum_{j \geq 0} q_j$  ( $q_j$  homogène de degré  $-j$ ), et l'on note

$$a_i \sim \sum_{j \geq 0} b_j \quad (b_j \text{ homogène de degré } 1 - j).$$

Le symbole principal du commutateur (tangential)  $[L, Q]$  vaut  $\partial_t q_0 + \{b_0, q_0\}$ , tandis que le terme d'ordre  $-j$  a pour symbole  $\partial_t q_j + \{b_0, q_j\} + r_j$ , où  $r_j$  est connu en fonction de  $q_0, \dots, q_{j-1}$ .

On doit donc résoudre successivement les équations différentielles

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + H_{b_0} q_0 = 0, \quad q_0(0, x, \xi) = \tilde{q}_0(x, \xi) \tag{1.3.1}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + H_{b_0} q_j + r_j = 0, \quad q_j(0, x, \xi) = \tilde{q}_j(x, \xi). \tag{1.3.2}$$

En notant  $(x, \xi) = \chi_t(y, \eta)$  la solution du système :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial b_0}{\partial \xi}(t, x, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial b_0}{\partial x}(t, x, \xi), \quad x(0) = y, \quad \xi(0) = \eta,$$

il est facile de voir que  $\chi_t$  existe pour  $0 \leq t \leq T$  et est inversible ( $x$  et  $\xi$  étant homogènes en  $\eta$  de degrés 0 et 1). La solution de (1.3.1) est alors  $q_0(t, x, \xi) = \tilde{q}_0(\chi_t^{-1}(x, \xi))$  (comparer avec le paragraphe B.2.1), tandis que (1.3.2) se résout en faisant « varier la constante ».

Si on choisit  $q \sim \Sigma q_j$ , on aura  $q(0, x, \xi) \sim \tilde{q}$ , et  $[L, Q] = R(t, x, D)$  où  $r(t, x, \xi)$  est continu en  $t$  à valeurs dans  $S^{-\infty}$ .

b) Supposons maintenant  $(x_0, \xi_0) \notin WF(\varphi)$  : il existe  $\tilde{q}(x, \xi)$ , tel que  $\tilde{q}(x_0, \xi_0) \neq 0$  et  $\tilde{q}(x, D)\varphi \in C_0^\infty$ . Pour la solution  $u$  de (1.1), on trouve

$$LQu \in C([0, T]; H^s) \\ Qu|_{t=0} \in C_0^\infty$$

pour tout  $s$  ( $Q$  correspondant à  $\tilde{q}$  construit en a).

Donc, pour tout  $t$ ,  $\chi_t(x_0, \xi_0) \notin WFu(t, \cdot)$ . Comme on peut renverser le sens du temps, on trouve finalement la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.3.** *Si  $u$  est une solution de (1.1) avec  $f \equiv 0$  et  $\varphi \in \bigcup_s H^s$ , alors  $u \in C([0, T])$ ;  $\bigcup_s H^s$  et, pour  $0 \leq t \leq T$ ,  $WFu(t, \cdot) = \chi_t(WF\varphi)$ , où  $\chi_t$  est défini par le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i} \frac{\partial a_1}{\partial \xi}(t, x, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{i} \frac{\partial a_1}{\partial x}(t, x, \xi) \\ x(0) = y, \quad \xi(0) = \eta, \quad (x, \xi) = \chi_t(y, \eta).$$

Ce résultat peut être étendu dans différentes directions :

i) Pour  $t$  fixé, il est facile de vérifier que  $\chi_t$  est canonique (c'est-à-dire préserve la 2-forme  $\sigma$ , cf. chapitre I, paragraphe 7.2.1).

ii) L'opérateur  $K: \varphi \rightarrow u(t_0, \cdot)$  est un « opérateur intégral de Fourier elliptique associé à la transformation canonique  $\chi_{t_0}$  ». L'exemple développé ici est le point de départ historique de cette théorie. (Voir [H2, 4, 5].)

D'autre part, on peut déduire (Ex. C.3) de la proposition 1.3 le théorème de propagation des singularités d'Hörmander, qui s'énonce ainsi :

*Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  proprement supporté sur un ouvert  $X \subset \mathbb{R}^n$ , de symbole principal réel  $p_m$ .*

Si  $u \in \mathcal{D}'(X)$  vérifie  $Pu \in C^\infty(X)$ , alors  $WF(u)$  est une réunion de courbes intégrales de  $H_{p_m}$  issues de points où  $p_m = 0$ .

Ce théorème, qui permet de séparer les « rayons » de propagation des singularités issus d'un point  $x_0 \in \text{supp sing } u$  de la base  $X$  selon leurs origines  $(x_0, \xi_0)$  dans  $T^*X$  au-dessus de  $x_0$ , est un des résultats fondamentaux de l'analyse microlocale (comparer avec la discussion de l'exemple B.2.1.3 et de l'exercice C.2).

## 2 OPÉRATEURS D'ORDRE $m$

Lorsque  $x \in \mathbb{R}$ , un opérateur différentiel d'ordre  $m$

$$P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{k+\ell \leq m} a_{k,\ell} D_x^k D_t^\ell, \quad (a_{0,m} \equiv 1),$$

peut se « factoriser » sous la forme :

$$P(x, t, D_x, D_t) = (D_t - \lambda_1(t, x) D_x) \dots (D_t - \lambda_m(t, x) D_x) + \text{ordre } m - 1,$$

où les  $\lambda_j, \xi$  sont les racines en  $\tau$  supposées distinctes du polynôme  $p_m = \sum_{k+\ell=m} a_{k,\ell} \xi^k \tau^\ell = 0$ .

Lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), les racines en  $\tau$ , supposées distinctes, de l'équation  $p_m(x, t, \xi, \tau) = 0$  sont seulement homogènes de degré 1 en  $\xi$ , et les facteurs  $D_t - \lambda_j(t, x, D_x)$  correspondants sont des opérateurs pseudo-différentiels de la forme considérée au paragraphe 1. Les racines en  $\tau$  étant distinctes, il est facile de montrer (Ex. C.4) qu'on peut, en fait, factoriser le symbole complet de  $P$  (et pas seulement son symbole principal) ; nous n'utiliserons dans la suite qu'un fait plus élémentaire.

Considérons donc ici un opérateur de la forme  $P = P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j \leq m} P_j(x, t, D_x) D_t^j$ , pour lequel  $P_m \equiv 1$ ,  $P_j$  étant d'ordre  $m - j$ , de symbole principal  $p_j$  homogène de degré  $m - j$  en  $\xi$ .

On suppose que :

(H). Les racines en  $\tau$  du polynôme  $p = \sum p_j(x, t, \xi) \tau^j = 0$  sont réelles (hypothèse d'« hyperbolicité » de  $P$ ).

(S). Ces racines sont (uniformément) simples, c'est-à-dire  $\left| \frac{\partial p}{\partial \tau}(x, t, \xi, \tau) \right| \geq C |\xi|^{m-1}$  lorsque  $p = 0$ . (On dit alors que  $P$  est « strictement » hyperbolique.)

Pour un tel  $P$ , on a une estimation d'énergie analogue à (1.1.1).

PROPOSITION 2.1. Si  $s \in \mathbb{R}$ , on a pour tout  $u \in \bigcap_{j=0}^{m-1} C^j([0, T], H^{s+m-1-j})$  tel que  $Pu \in L^1([0, T]; H^s)$  l'inégalité

$$\sum_{j \leq m-1} \sup_{t \in [0, T]} |D_t^j u(t, \cdot)|_{s+m-1-j} \leq C \left\{ \sum_{j \leq m-1} |D_t^j u(0, \cdot)|_{s+m-1-j} + \int_0^T |Pu(t, \cdot)|_s dt \right\}. \quad (2.1)$$

Preuve :

a) Notons  $\lambda_1(x, t, \xi) < \lambda_2(x, t, \xi) < \dots < \lambda_m(x, t, \xi)$  les  $m$  zéros réels de  $p$ . L'hypothèse (S) implique  $|\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \lambda_j(x, t, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} |\xi|^{1-|\beta|}$ , en sorte que si  $\chi \in C_0^\infty$  vaut 1 près de 0,  $A_j(x, t, \xi) = (1 - \chi(\xi)) \lambda_j(x, t, \xi) \in S^1$ . Pour tout  $j$ , montrons qu'on peut trouver

$$Q_j = \sum_{k=0}^{m-1} Q_{jk}(x, t, D_x) D_t^k$$

(avec  $Q_{jk} \in S^{m-1-k}$  et  $Q_{j(m-1)} = 1$ ), et

$$R_j(t, x, D_x) \in S^{m-1}$$

tel que.

$$P = (D_t - A_j(x, t, D_x)) Q_j + R_j.$$

En effet, en écrivant

$$\begin{aligned} P_j D_t^j &= D_t P_j D_t^{j-1} - \frac{1}{i} (\partial_t P_j) D_t^{j-1} = \\ &= (D_t - A_j) P_j D_t^{j-1} + A_j P_j D_t^{j-1} - \frac{1}{i} (\partial_t P_j) D_t^{j-1}, \end{aligned}$$

et en recommençant le même artifice pour les deux derniers termes etc..., on obtient l'expression désirée avec  $R_j = R_j(t, x, D_x) \in S^m$ . Or, pour  $\tau = \lambda_j$ , le symbole principal  $p - (\tau - \lambda_j) q_j$  de  $R_j$ , qui ne dépend pas de  $\tau$ , est nul ; donc  $R_j \in S^{m-1}$ .

b) L'estimation d'énergie (1.1.1) pour l'opérateur  $D_t - A_j$  donne alors (pour  $\lambda$  assez grand)

$$\begin{aligned} \sup e^{-\lambda t} |Q_j u(t, \cdot)|_s &\leq \\ &\leq |Q_j u(0, \cdot)|_s + 2 \int_0^T e^{-\lambda t} \{ |Pu(t, \cdot)|_s + C |u(t, \cdot)|_{s+m-1} \} dt. \end{aligned}$$

Montrons que le contrôle des  $Q_j u$  pour tous les  $j$  permet celui du membre de gauche de (2.1) : le symbole principal de  $Q_j$  est  $q_j = \prod_{k \neq j} (\tau - \lambda_k)$ , et les

$q_j$  forment une base de l'espace des polynômes en  $\tau$  de degré  $\leq m - 1$ ; en particulier, pour  $k \leq m - 1$ ,

$$\tau^k = \sum q_j \frac{\lambda_j^k}{q_j(x, t, \xi, \lambda_j)}.$$

En posant

$$M_{kj}(t, x, \xi) = (1 - \chi(\xi)) \frac{\lambda_j^k(x, t, \xi)}{q_j(x, t, \xi, \lambda_j)},$$

on définit  $M_{kj} \in S^{k-(m-1)}$  tels que

$$D_t^k u = \sum M_{kj} Q_j u + \sum_{j=0}^{m-1} R_{kj}(t, x, D) D_t^j u,$$

avec  $R_{kj} \in S^{k-j-1}$ . On en déduit l'estimation :

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq m-1} |D_t^k u(t, \cdot)|_{s+m-1-k} &\leq \\ &\leq C \left\{ \sum |Q_j u(t, \cdot)|_s + \sum_{k \leq m-1} |D_t^k u(t, \cdot)|_{s+m-2-k} \right\}. \end{aligned}$$

c) Le « terme d'erreur »

$$\sum_{k \leq m-1} |D_t^k u(t, \cdot)|_{s+m-2-k}$$

est traité de la façon suivante :

— Pour  $k = m - 1$ ,  $|Q_1 u - D_t^{m-1} u|_{s-1}$  est majoré par la somme  $\Sigma'$  des termes pour  $k \leq m - 2$ .

— Pour  $k \leq m - 2$ , on utilise l'estimation d'énergie (1.1.1) pour l'opérateur  $L = \partial_t$ , soit :

$$\begin{aligned} \sup e^{-\lambda t} |D_t^k u(t, \cdot)|_{s+m-2-k} &\leq \\ &\leq |D_t^k u(0, \cdot)|_{s+m-2-k} + 2 \int_0^T e^{-\lambda t} |D_t^{k+1} u(t, \cdot)|_{s+m-2-k} dt. \end{aligned}$$

d) Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \sup e^{-\lambda t} \sum_{k \leq m-1} |D_t^k u(t, \cdot)|_{s+m-1-k} &\leq C \left\{ \sum_{k \leq m-1} |D_t^k u(0, \cdot)|_{s+m-1-k} + \right. \\ &\left. + \int_0^T e^{-\lambda t} |Pu(t, \cdot)|_s dt + \int_0^T e^{-\lambda t} \sum_{k \leq m-1} |D_t^k u(t, \cdot)|_{s+m-1-k} dt \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

L'argument habituel de type « Gronwall » permet alors de conclure.  $\square$

Bien entendu, on peut aussi déduire de (2.1) un théorème d'existence de solutions du problème de Cauchy

$$Pu = f, \quad D_t^j u(0, \cdot) = u_j, \quad j \leq m - 1,$$

comme au paragraphe 1.2, mais c'est un peu plus délicat et nous ne continuerons pas dans cette voie.

## COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE II

Ce chapitre constitue un pont entre la théorie « sèche » du premier chapitre et les applications aux « vrais » problèmes non linéaires esquissés au dernier.

La partie A « Analyse non linéaire dyadique » repose sur l'usage systématique de partitions dyadiques en fréquence. Cet état d'esprit, qu'on trouve déjà développé dans COIFMAN et MEYER [CM], s'est avéré particulièrement efficace dans l'analyse des équations non linéaires : on trouvera dans BONY [B1] les concepts fondamentaux de « paramultiplication », « opérateurs paradifférentiels » et les formules de « paralinéarisation » correspondantes, tandis que la « paracomposition » est construite et étudiée dans ALINHAC [A]. La présentation ici s'inspire davantage de MEYER [M], qui contient également le cas des espaces  $L^p$ .

Outre une introduction aux théories mentionnées ci-dessus, on a voulu donner dans cette partie, les premiers exemples naturels de ce qu'on appellera au chapitre III des « applications douces » (c'est-à-dire susceptibles d'estimations « linéaires par rapport à la grande norme ») : le produit et la composition.

Ce type d'estimations est crucial pour résoudre à peu près n'importe quel problème non linéaire, et se trouve être l'une des hypothèses fondamentales du théorème de Nash-Moser.

La partie B « Analyse microlocale » présente un matériel désormais très classique (front d'onde, régularité elliptique microlocale), qu'on trouvera par exemple dans HÖRMANDER [H4]. De petits textes synthétiques sont disponibles sur ce sujet : la monographie de NIRENBERG [N] et l'article de HÖRMANDER [H2] dans *l'Enseignement mathématique*. L'approche privilégie les tronçures coniques en fréquence, visant à séparer les « bonnes » directions spectrales des « mauvaises ».

Les parties A et B correspondent en fait aux deux types de « découpage » du fibré cotangent naturellement associés au calcul pseudo-différentiel classique (celui du chapitre I) : découpage selon la taille de  $|\xi|$ , et découpage conique sur  $\xi \in S^{n-1}$ .

Le développement des idées de la partie B constitue l'analyse microlocale des années soixante-dix : hypoellipticité et propagation des singulari-

tés pour les opérateurs linéaires ; c'est pour l'essentiel le sujet de l'ouvrage de HÖRMANDER [H5].

Depuis, le calcul paradifférentiel de BONY et ses prolongements ont permis d'étendre certains résultats fondamentaux (régularité elliptique, propagation des singularités) au cas d'équations non linéaires.

Enfin, la nécessité s'est fait sentir, notamment dans certains problèmes non linéaires, d'une localisation plus fine encore des fonctions (dans le fibré cotangent) au voisinage de leurs lieux singuliers : c'est l'analyse 2-microlocale. Le lecteur averti pourra consulter LEBEAU [L] (dans le cadre analytique) ou BONY [B2] (dans le cadre des espaces de Sobolev), par exemple.

La partie C est consacrée aux « inégalités d'énergie », qui sont l'outil principal pour étudier les équations hyperboliques et la propagation des singularités. Là encore, le matériel est emprunté à HÖRMANDER [H5], dans lequel on trouvera aussi les extensions de cette technique à l'étude des problèmes mixtes.

**EXERCICES SUR LE CHAPITRE II**

A.1 a) Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $c_s > 0$  telle que si  $u \in H^s$

$$\frac{1}{c_s} \|u - S_p u\|_s^2 \leq \sum_{q \geq p} 4^{qs} \|u_q\|_0^2 \leq c_s \|u - S_p u\|_s^2,$$

et en déduire que  $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} H^t$  est dense dans  $H^s$ .

b) Soit  $\alpha$  un réel positif, non entier. On pose  $m = E(\alpha)$  (partie entière de  $\alpha$ ),  $\rho = \alpha - m$  (mantisse de  $\alpha$ ). Montrer qu'il existe  $C_\alpha$  telle que, si  $u \in C^\infty$ ,

$$\frac{1}{C_\alpha} \|u - S_p u\|_\alpha \leq \sup_{q \geq p} 2^{q\alpha} \|u_q\|_0 \leq C_\alpha \|u - S_p u\|_\alpha,$$

et en déduire que  $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} C^\gamma$  n'est pas dense dans  $C^\alpha$ .

La suite de cet exercice se propose de caractériser les points adhérents à  $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} C^\gamma$  dans  $C^\alpha$  par la condition :

$$\sum_{|\beta| = m} \sup_{(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |h| \leq \delta} \frac{|\partial^\beta u(x+h) - \partial^\beta u(x)|}{|h|^\rho} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

(\*)

c) Vérifier directement que toute fonction  $u$  de  $C^\alpha$  adhérente à  $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} C^\gamma$  satisfait à la condition (\*).

d) En reprenant la preuve de la proposition 1.3 i), montrer que, si  $u \in C^\infty$ ,

$$\forall q \geq 0, \quad \|u_q\|_0 \leq C 2^{-q\alpha} \int |\tilde{\varphi}(y)| \times \\ \times \sum_{|\beta| = m} \sup_{(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |h| \leq 2^{-q}|y|} \frac{|\partial^\beta u(x+h) - \partial^\beta u(x)|}{|h|^\rho} dy.$$

En déduire que, si  $u$  vérifie (\*),  $\|u - S_p u\|_\alpha \rightarrow 0$ .

## A.2 Cas limite des injections de Sobolev

a) Vérifier que  $L^1$  n'est pas contenu dans  $H^{-n/2}$ . (On pourra supposer le contraire, et montrer qu'alors la masse de Dirac appartiendrait à  $H^{-n/2}$ .) En déduire que  $H^{n/2}$  n'est pas contenu dans  $L^\infty$ .

b) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose

$$W^{k, \infty}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k\}.$$

Montrer que, si  $s = \frac{n}{2} + k$ ,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  n'est pas contenu dans  $W^{k, \infty}(\mathbb{R}^n)$ . (On pourra remarquer que toute fonction  $u \in H^s$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) s'écrit

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^n \partial_j u_j, \quad \text{où } u_1, \dots, u_n \in H^{s+1}, \text{ et } u_0 \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} H^t.$$

## A.3\* Classe de Zygmund

On note

$$C_*^1(\mathbb{R}^n) = \\ = \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \sup_{(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)|}{|h|} < +\infty \right\}.$$

On se propose de caractériser  $C_*^1$  par les décompositions dyadiques.

a) Montrer que, si  $u \in C_*^1(\mathbb{R}^n)$  et si  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  est paire, alors  $u_p = \varphi(2^{-p} D) u$  vérifie  $\sup_{p \geq 0} \|u_p\|_0 \cdot 2^p < +\infty$ .

b) On ne suppose plus que  $\varphi$  est paire dans  $a$ . Montrer que la conclusion reste vraie. (On pourra écrire  $u_p = \varphi(2^{-p}D)\tilde{u}_p$ , et  $\tilde{u}_p = \tilde{\varphi}(2^{-p}D)u$ ,  $\tilde{\varphi}$  étant bien choisie.)

c) Soit  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , et soit  $u = \sum_{p \geq -1} u_p$  une décomposition dyadique de  $u$ . On suppose que

$$\sup_{p \geq -1} \|u_p\|_0 \cdot 2^p < +\infty.$$

Montrer, en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 1.3 ii), que  $u \in C_*^1$ . (On pourra remarquer que

$$|v(x+h) + v(x-h) - 2v(x)| \leq \text{Cte} |h|^2 \sup_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_0.)$$

d) Montrer l'injection de Sobolev généralisée  $H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n) \subset C_*^1(\mathbb{R}^n)$ .

e) En utilisant l'exercice A.2, montrer que l'inclusion  $W^{1,\infty} \subset C_*^1$  est stricte.

#### A.4 Interpolation

Soient  $s_0 < s < s_1$  trois nombres réels. Soit  $(v_q)_{q \geq 0}$  une suite de  $H^{s_1}$  vérifiant

$$\forall q \geq 0, \quad |v_q|_{s_0} \leq C c_q 2^{-q(s-s_0)}; \quad |v_q|_{s_1} \leq C c_q 2^{q(s_1-s)}$$

avec

$$\sum_{q \geq 0} c_q^2 \leq 1.$$

a) Montrer que la série  $\sum_{q \geq 0} |v_q|_{s'}$ , converge pour tout  $s' < s$ . On se propose de montrer que  $v = \sum_{q \geq 0} v_q$  appartient à  $H^s$ , avec  $|v|_s \leq \text{Cte} \cdot C$ .

b) Montrer que l'on peut écrire  $v_q = a_q + b_q$ , avec

$$\begin{aligned} \text{supp } \hat{a}_q &\subset \{\xi, |\xi| \leq 2^{q+1}\}, \quad \text{supp } \hat{b}_q \subset \{\xi, |\xi| \geq 2^q\} \\ |a_q|_{s_0} &\leq \text{Cte} \cdot C c_q 2^{-q(s-s_0)}, \quad |b_q|_{s_1} \leq \text{Cte} \cdot C c_q 2^{q(s_1-s)}. \end{aligned}$$

c) En estimant les normes  $L^2$  des blocs dyadiques de  $\sum_{q \geq 0} a_q$ ,  $\sum_{q \geq 0} b_q$ , montrer que  $\sum_{q \geq 0} a_q$ ,  $\sum_{q \geq 0} b_q \in H^s$  et conclure.

d) Quel est le lien entre ce résultat et celui du lemme 2.2 ?

e) Montrer que la conclusion est la même si l'on remplace les conditions (\*) par :

$$\forall q \geq 0, \quad |v_q|_{s_0} \leq C c_q A^{-q(s-s_0)}; \quad |v_q|_{s_1} \leq C c_q A^{q(s_1-s)},$$

avec

$$\sum_{q \geq 0} c_q^2 \leq 1, \quad A > 1.$$

(On pourra définir et utiliser les décompositions  $A$ -adiques.)

f) Application. Soient  $t_0, t_1, s_0, s_1$  quatre réels, et soit  $T: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  un opérateur linéaire, borné de  $H^{t_i}$  dans  $H^{s_i}$  pour  $i = 0, 1$ . Soit  $\theta \in ]0, 1[$ ; on pose  $t = \theta t_0 + (1 - \theta) t_1$ ;  $s = \theta s_0 + (1 - \theta) s_1$ . Montrer que  $T$  est borné de  $H^t$  dans  $H^s$ . (Estimer  $|Tu_p|_{s_i}$ , où  $u = \Sigma u_p$  est la décomposition dyadique de  $u$ .)

*Remarque.* L'exercice A.4 peut également être traité dans le cadre des espaces de Hölder.

**A.5** Soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On définit le « paraproduit par  $a$  » selon la formule suivante :

$$T_a u = \sum_{p \geq 2} S_{p-2} a \cdot u_p$$

(avec les notations habituelles de la décomposition dyadique, cf. paragraphe 1.1).

a) Montrer que  $T_a$  est borné sur  $H^s$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et sur  $C^\alpha$  pour tout  $\alpha > 0$  non entier, avec une norme d'opérateur bornée par  $C \|a\|_0$ .

b) Soit  $a \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s < n/2$ . Montrer que

$$\|S_p a\|_0 \leq C 2^{p((n/2)-s)},$$

et en déduire que  $T_a$  défini encore selon la formule ci-dessus, est continu de  $H^r$  dans  $H^{r+s-n/2}$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

c) Soient  $s, t$  deux nombres réels tels que  $s + t > n/2$ . Soient  $a \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $b \in H^t(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que  $ab = T_a b + T_b a + R$ , avec  $R \in H^{s+t-n/2}(\mathbb{R}^n)$  (on pourra utiliser le lemme 2.1). Discuter la régularité  $H^r$  du produit  $ab$  selon les valeurs de  $s, t, s + t$ .

**A.6** Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$  et, pour tout  $k \geq 1$ ,  $f^{(k)}$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ . On se propose de prouver que, si  $u \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f(u) \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ .

a) Si  $u \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ , prouver que

$$\forall \alpha, \quad |\alpha| > 0, \quad \|\partial^\alpha S_p u\|_0 \leq C_\alpha 2^{p|\alpha|}.$$

En déduire que les  $m_p = \int_0^1 f'(S_{p-1} u + tu_p) dt$  sont des « multiplicateurs de Meyer », et conclure en reprenant la preuve de la proposition 2.2.

b) Montrer de même que pour  $s > n/2$ ,  $|f(u)|_s \leq C_s |u|_s$  où  $C_s$  ne dépend que de  $|u|_{n/2}$ . (Comparer avec la proposition 2.2.)

A.7\* Soit  $(m_p)_{p \geq 0}$  une suite de fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant

$$\forall p, \forall \alpha, \quad \|\partial^\alpha m_p\|_0 \leq C_\alpha 2^{p|\alpha|}.$$

Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\text{supp } \varphi \subset \{\xi, 1/4 \leq |\xi| \leq 4\}$ .

a) Montrer que la fonction définie par

$$a(x, \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} m_p(x) \varphi(2^{-p} \xi),$$

est un symbole de la classe  $S_{1,1}^0$ , i.e. vérifie les estimations :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{|\alpha| - |\beta|}.$$

b) Soit  $b \in S_{1,1}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Montrer que l'on peut écrire

$$b(x, \xi) = b_{-1}(x, \xi) + \sum_{p=0}^{\infty} b_p(x, 2^{-p} \xi)$$

avec

$$\begin{aligned} \forall p \geq -1, \quad b_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \quad |\xi| \leq 1 \quad \text{sur } \text{supp } b_{-1}, \\ 1/2 \leq |\xi| \leq 2 \quad \text{sur } \text{supp } b_p \quad \text{pour } p \geq 0, \end{aligned}$$

et

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_p(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} 2^{p|\alpha|}.$$

En déduire que

$$b(x, \xi) = b_{-1}(x, \xi) + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi, y) dy$$

où  $a(x, \xi, y) = \sum_{p=0}^{\infty} m_p(x, y) \Phi(2^{-p} \xi, y)$  est, pour chaque  $y$ , du type considéré en a), avec, de plus

$$\begin{aligned} \forall p, \forall \alpha, \forall N, \quad |\partial_x^\alpha m_p| \leq C_{\alpha, N} 2^{p|\alpha|} (1 + |y|)^{-N} \\ \forall \alpha, \quad |\partial_\xi^\alpha \Phi| \leq C_\alpha (1 + |y|)^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

c) Montrer que, si  $b \in S_{1,1}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $b(x, D)$  est borné sur  $H^s$  pour tout  $s > 0$ . (On se ramènera par  $b$ ) à la proposition 2.2.)

d) Montrer de même que  $b(x, D)$  est borné sur  $C^\alpha$  pour tout  $\alpha > 0$  non entier.

*Remarque.* La continuité des opérateurs pseudo-différentiels de la classe  $S_{1,1}^0$  sur les espaces de Sobolev est un problème délicat ; de tels opérateurs ne sont pas bornés sur  $L^2$  en général (voir [CM], pp. 39-40). Nous renvoyons à [H8] pour une étude récente de ce type de problèmes.

**B.1** Soit  $S$  l'hypersurface  $\{x_1 = 0\}$ , et soit  $u$  une fonction de la forme

$$u(x) = u_+(x) \cdot 1_{\{x_1 > 0\}} + u_-(x) \cdot 1_{\{x_1 < 0\}},$$

où  $u_+, u_-$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $\forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}, u_+(0, x') \neq u_-(0, x')$ .

a) Montrer que  $WFu = \{(0, x', \xi_1, 0), \xi_1 \neq 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ . En utilisant l'invariance du front d'onde par difféomorphisme, exprimer ce résultat lorsque  $S$  est une hypersurface quelconque, de façon intrinsèque (comparer avec l'exemple 2.1.2).

b) Soit  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$  un opérateur différentiel à coefficients  $C^\infty$ . Calculer explicitement  $Pu(x)$ , et en déduire que, si  $Pu \in C^\infty$ , alors  $S$  est caractéristique pour  $P$  (i.e.  $p_m(x, \xi) = 0$  pour tous  $x \in S, \xi$  normal à  $S$  en  $x, p_m$  étant le symbole principal de  $P$ ). Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

## B.2 Construction de distributions admettant un front d'onde donné

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\int \varphi(x) dx = 1$ , et soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

a) Pour  $k \geq 1, \xi \in S^{n-1}, x \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$\varphi_k(x, \xi) = k^{n\alpha} \varphi(k^\alpha x) e^{ikx \cdot \xi}.$$

Montrer que la transformée de Fourier en  $x$  de  $\varphi_k$  vérifie :

i)  $\forall N, |\hat{\varphi}_k(\eta, \xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}$  si  $\eta$  reste dans un cône fermé  $\Gamma$  disjoint de  $\mathbb{R}_+^* \xi, C_N$  dépendant de  $\Gamma$ .

ii)  $\hat{\varphi}_k(k\xi, \xi) = 1$ .

b) On suppose dans cette question que  $\hat{\varphi} \geq 0$ , et on se donne  $\xi_0 \in S^{n-1}$ . Montrer que la fonction

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n\alpha-2} \varphi_k(x, \xi_0)$$

est continue à support compact sur  $\mathbb{R}^n$  et que

$$\Sigma(u) = \{\xi_0\}, \quad WF(u) = \{(0, t\xi_0), t > 0\}.$$

c) Soit  $F$  un fermé conique de  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ ; on note  $F_1 = F \cap (\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ , et on se donne une suite  $(x_k, \xi_k)_{k \geq 1}$  dense dans  $F_1$ . Montrer que la fonction

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n\alpha-2} \varphi_{k^2}(x - x_k, \xi_k)$$

est continue et vérifie  $WF(u) = F$ . (On pourra remarquer que, si  $k \neq j$ ,  $\xi \in S^{n-1}$ ,  $\eta \in S^{n-1}$ ,

$$|\widehat{\varphi}_{k^2}(j^2 \xi, \eta)| \leq C_N j^{-N}$$

pour tout  $N$ ; en déduire que, si  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifie  $\theta(x) = 1$  près de  $x = x_j$ ,

$$|\widehat{\theta u}(j^2 \xi_j)| \geq \frac{1}{2} j^{-2},$$

pour  $j$  assez grand.)

**B.3** Montrer que si  $u$  est une distribution à valeurs réelles,  $(x, \xi) \in WF u$  entraîne  $(x, -\xi) \in WF u$ .

#### B.4 Etude microlocale de la trace

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t)$  telle que  $WF u \cap \{t = 0, \xi = 0\} = \emptyset$ .

a) Prouver que si  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$  est supportée suffisamment près de  $t = 0$ , l'intégrale

$$I(\varphi) = \int \widehat{v}(0, \tau) \frac{d\tau}{2\pi}, \quad \text{où } v = (\psi \otimes \varphi) u,$$

converge pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ , ne dépend pas du choix de  $\psi$  (si l'on impose de plus  $\psi = 1$  près de  $t = 0$ ) et définit une distribution  $Tu$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

b) Vérifier que, si de plus  $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n))$ , on a  $Tu = u|_{t=0}$ .

c) Montrer, à l'aide de la définition du front d'onde, que

$$WF(Tu) \subset \{(x, \xi), \exists \tau, (x, 0, \xi, \tau) \in WF(u)\}.$$

**B.5** Cet exercice propose une démonstration de la proposition 2.2.2 et du corollaire 2.2.1, indépendante des théorèmes généraux cités aux paragraphes 1 et 2.

a) Soit  $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et soit  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Prouver que si

$$d(x, \text{supp } v) \geq c > 0, \forall \alpha, \forall \beta, \quad |x^\alpha \partial_x^\beta a(x, D) v| \leq C_{\alpha\beta}.$$

En déduire que, si  $a(x, D) v \in C^\infty$ , alors  $a(x, D) v \in \mathcal{S}$ .

b) Montrer que  $(x_0, \xi_0) \notin WFu$  si et seulement si il existe  $\varphi(x) \in C_0^\infty$ , non nulle en  $x_0$ , et  $\chi(\xi) \in S^0$ , elliptique en  $\xi_0$ , tels que  $\chi(D)(\varphi u) \in C^\infty$ .

c) Si  $a$  est un symbole, on appelle support essentiel de  $a$  (et on note  $SE(a)$ ) l'ensemble des  $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$  n'admettant pas de voisinage conique  $\Gamma$  sur lequel on ait  $a \in S^{-\infty}$ . Si  $A = a(x, D)$ , on note encore  $SE(A) = SE(a)$ . Montrer que  $SE(AB) \subset SE(A) \cap SE(B)$ .

d) Montrer d'abord la proposition 2.2.2 en remarquant que, si  $(x_0, \xi_0) \notin SE(A)$ , il existe  $\chi$  et  $\varphi$  tels que  $\chi(D)\varphi$  soit elliptique en  $(x_0, \xi_0)$  et  $SE(\chi(D)\varphi) \cap SE(A) = \emptyset$ .

e) Montrer le corollaire 2.2.1 en écrivant

$$A = A\chi(D)\varphi + A(1 - \chi(D)\varphi),$$

où  $\varphi$  vaut 1 près de  $x_0$ ,  $\chi$  vaut 1 dans un voisinage conique de  $\xi_0$ , et en appliquant la proposition 2.2.2.

**B.6** Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , on note  $\Sigma^s(v)$  l'ensemble des  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$  n'admettant pas de voisinage conique  $\Gamma$  pour lequel  $(1 + |\eta|^2)^{s/2} \hat{v}(\eta) \in L^2(\Gamma)$ . Si  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in X$  et  $u \in \mathcal{D}'(X)$ , on définit ensuite  $\Sigma_x^s(u)$  et  $WF_s(u)$  (front d'onde  $H^s$  de  $u$ ) selon le même plan qu'au paragraphe 1.1 (avec une extension évidente du lemme 1.1.1).

a) Caractériser la projection de  $WF_s(u)$  sur  $X$ .

b) Montrer que  $WF(u)$  est égal à l'adhérence de  $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} WF_s(u)$ . (On pourra remarquer que, si  $\bigcup_s \Sigma^s(v) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$ , avec  $v \in \mathcal{S}'$  et  $\Gamma$  ouvert conique, alors  $\Sigma(\varphi v) \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$  pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  et tout ouvert conique  $\Gamma_1$  tel que  $\bar{\Gamma}_1 \subset \Gamma$ .)

c) Montrer que  $(x_0, \xi_0) \notin WF_s(u)$  si et seulement si on peut écrire  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in H_{\text{loc}}^s(X)$ ,  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_2)$ .

d) Montrer que, si  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  proprement supporté sur  $X$ ,

$$WF_s(Pu) \subset WF_{s+m}(u) \subset WF_s(Pu) \cup \text{Car}(P).$$

e) Sous les hypothèses de d), on suppose  $m > 0$ . Montrer que si  $P^k u \in L_{\text{loc}}^2(X)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $WF(u) \subset \text{Car}(P)$ .

**B.7\* Lemme de Rauch : voir [R]**

Soit  $s > n/2$ , et soient  $u, v \in H_{loc}^s(X)$ . On se propose de montrer que, pour tout  $t \leq 2s - n/2$ ,

$$WF_t(uv) \subset WF_t(u) \cup WF_t(v).$$

a) Vérifier qu'il suffit de prouver l'assertion suivante : si  $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$  sont à supports compacts et  $t \leq 2s - n/2$ , alors  $\Sigma^t(uv) \subset \Sigma^t(u) \cup \Sigma^t(v)$ .

b) On se place dans le cadre de la question a). On notera  $(1 + |\xi|^2)^{1/2} = \langle \xi \rangle$ . Soit  $\Gamma$  un cône ouvert tel que  $\langle \xi \rangle^t u, \langle \xi \rangle^t v \in L^2(\Gamma)$ . Pour  $c \in ]0, 1[$  à choisir, on écrit

$$\widehat{uv} = w_1 + w_2 + r, \quad w_1(\xi) = \int_{|\xi - \eta| < c|\eta|} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta,$$

$$w_2(\xi) = \int_{|\xi - \eta| > \frac{1}{c}|\eta|} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta.$$

Montrer que si  $\Gamma_1$  est un cône ouvert vérifiant  $\bar{\Gamma}_1 \subset \Gamma$ , et  $c$  est convenable, alors  $\langle \xi \rangle^t w_i \in L^2(\Gamma_1)$  pour  $i = 1, 2$ . (On montrera que  $\langle \xi \rangle^t |w_i(\xi)| \leq C \left( \int_{\Gamma} |\hat{u}(\eta)| d\eta \right)^{1/2} \left( \int_{\Gamma} |\hat{u}(\xi - \eta)| |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2}$ .)

c) Remarquer que, pour des nombres  $c_1, c_2$  positifs,

$$|r(\xi)| \leq \left( \int_{|\eta_1| \geq c_1|\xi|} |\hat{u}(\eta_1)|^2 d\eta_1 \right)^{1/2} \left( \int_{|\eta_2| \geq c_2|\xi|} |\hat{v}(\eta_2)|^2 d\eta_2 \right)^{1/2}$$

et conclure que  $\langle \xi \rangle^{2s - n/2} r \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . (Comparer à l'exercice A.5 c).)

**B.8\*** Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $\mathcal{V}$  une famille de champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $X$ . On définit

$$H^{s, \infty}(\mathcal{V}) = \langle u \in H_{loc}^s(X), Z_1 \dots Z_k u \in H_{loc}^s(X) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall Z_1, \dots, Z_k \in \mathcal{V} \rangle.$$

On note  $\hat{\mathcal{V}}$  l'algèbre de Lie engendrée par  $\mathcal{V}$  et

$$\mathcal{N}(\mathcal{V}) = \{ (x, \xi) \in T^*X \setminus 0, \langle \xi, Z(x) \rangle = 0 \quad \forall Z \in \hat{\mathcal{V}} \}.$$

a) Montrer que, si  $u \in H^{s, \infty}(\mathcal{V})$ ,  $WF(u) \subset \mathcal{N}(\mathcal{V})$ .

b) Soit  $S$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$ ; on prend pour  $\mathcal{V}$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $S$ . Expliciter le résultat de la question a) dans ce cas.

Donner des exemples d'éléments de  $H^{s, \infty}(\mathcal{V})$ . (Penser aux distributions «  $C^\infty$  par morceaux » de l'exercice B.1.)

c) On suppose que  $s > n/2$ . Montrer que si  $u \in H^{s, \infty}(\mathcal{V})$ , alors  $f(u) \in H^{s, \infty}(\mathcal{V})$ .

**B.9\*** Soit  $I_\varphi(a) = \int e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta$  une distribution intégrale oscillante définie comme à l'exercice 4.6 b) du chapitre I.

a) Soit  $\psi = \psi(x)$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , à valeurs réelles, telle que  $d\psi \neq 0$  sur  $\Omega$  et  $\forall x \in \Omega, \forall \theta \in \mathbb{R}^N \setminus 0$ ,

$$d_\theta \varphi(x, \theta) = 0 \Rightarrow d\psi(x) \neq d_x \varphi(x, \theta).$$

Montrer que pour tout compact  $K$  de  $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall \lambda \geq 0, \forall R \geq 0, \forall (x, \theta) \in K$ ,

$$R|d_\theta \varphi(x, \theta)| + |R d_x \varphi(x, \theta) - \lambda d\psi(x)| \geq C(R + \lambda).$$

En déduire que si  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$|\langle I_\varphi(a), u e^{-i\lambda \psi} \rangle| \leq C_N \lambda^{-N} \text{ pour tout } \lambda \geq 1.$$

(On pourra écrire  $a = \sum_p a_\chi (2^{-p} \theta)$  comme dans la preuve du théorème 1 de l'appendice du chapitre I et appliquer le lemme 1 « de la phase non stationnaire ».)

b) Conclure que  $WF(I_\varphi(a)) \subset \{(x, d_x \varphi(x, \theta)), d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}$ .

**C.1** Cet exercice propose une démonstration légèrement différente du résultat d'existence de solutions à un problème hyperbolique (proposition 1.2). La méthode « par dualité » est remplacée par une méthode d'approximation du problème par une famille d'équations différentielles ordinaires.

On se place sous les hypothèses de la proposition 1.2. Pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on pose  $\rho_\varepsilon = (1 + \varepsilon |D|)^{-1}$  et  $a_\varepsilon(t, x, D) = \rho_\varepsilon a(t, x, D)$ . On approche  $\varphi$  dans  $H^s$  et  $f$  dans  $L^1([0, T]; H^s)$  par des familles  $(\varphi_\varepsilon)$  et  $(f_\varepsilon)$  d'éléments de  $\mathcal{S}$ .

a) Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + a_\varepsilon(t, x, D) u_\varepsilon = f_\varepsilon, u_\varepsilon(0, x) = \varphi_\varepsilon(x),$$

a une solution et une seule  $u_\varepsilon \in C^1([0, T]; H^r)$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

b) En appliquant l'inégalité d'énergie hyperbolique, à l'aide de l'exer-

cice 5.10 du chapitre I, montrer que  $(u_\varepsilon)$  est borné dans  $C([0, T]; H^s)$  et est de Cauchy dans  $C([0, T]; H^{s-2})$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. En déduire l'existence d'une solution  $u \in C([0, T]; H^{s-2}) \cap L^2([0, T]; H^s)$  au problème de départ.

En raisonnant comme à la fin de la démonstration de la proposition 1.2 et en utilisant l'unicité (démontrée à part), on obtient  $u \in C([0, T]; H^s)$ .

## C.2 Equation des ondes

Soient  $\varphi_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ . On se propose de résoudre le problème

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = \varphi_1, \quad (1)$$

avec  $u \in C(\mathbb{R}, H^s) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-1})$ , et d'étudier la régularité microlocale de  $u$ . On notera  $|D|$  l'opérateur défini par

$$(|D|v)^\wedge(\xi) = |\xi| \hat{v}(\xi) \quad \text{pour } v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Cet opérateur n'est pas pseudo-différentiel au sens strict de la définition du chapitre I, paragraphe 3 : nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ce détail n'a aucune importance dans les résultats ci-dessous.

a) On suppose que  $u$  est une solution de (1) avec la régularité annoncée, et on pose  $v_+ = (\partial_t + i|D|)u$ ,  $v_- = (\partial_t - i|D|)u$ . Montrer que  $v_\pm \in C(\mathbb{R}, H^{s-1})$  et sont solutions du système

$$(\partial_t \mp i|D|)v_\pm = 0, \quad v_\pm|_{t=0} = \varphi_1 \pm i|D|\varphi_0, \quad (2)$$

tandis que  $u$  vérifie

$$\partial_t u = \frac{v_+ + v_-}{2}, \quad u|_{t=0} = \varphi_0. \quad (3)$$

En déduire l'unicité pour le problème (1).

b) Pour l'existence, montrer que l'on peut résoudre le système (2) à l'aide des résultats de (1), puis que (3) définit  $u \in C^1(\mathbb{R}, H^{s-1})$ , vérifiant de plus  $i|D|u = (v_+ - v_-)/2$ . En déduire que  $u$  est solution de (1) avec la régularité annoncée.

c) Montrer que, pour tout  $t$ ,

$$WF(v_\pm(t)) = \left\{ \left( x \mp t \frac{\xi}{|\xi|}, \xi \right), (x, \xi) \in WF(\varphi_1 \pm i|D|\varphi_0) \right\},$$

et prouver que  $WF(u(t)) \subset WF(v_+(t)) \cup WF(v_-(t))$  avec égalité si ces deux ensembles sont disjoints. Comparer avec l'exemple B.2.1.3.

d) Montrer que  $v_+$ ,  $v_-$  sont solutions de l'équation des ondes, et en déduire (à l'aide de l'exercice B.4) que

$$WF(v_{\pm}) = \left\{ \left( x \mp t \frac{\xi}{|\xi|}, t, \xi, \pm |\xi| \right), t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in WF(\varphi_1 \pm i|D| \varphi_0) \right\}.$$

Montrer enfin que  $WFu = WF(v_+) \cup WF(v_-)$ .

### C.3\* Théorème de Hörmander

a) Soit  $a = a(x, \xi) \in S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , de symbole principal  $a_1(x, \xi)$  à valeurs réelles. Soit  $u \in \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que  $f = a(x, D)u \in \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$ . En remarquant que la fonction  $v(t, x) = u(x) (t \in \mathbb{R})$  est solution de

$$(\partial_t + ia(x, D))v = if \quad (\forall s, f \in C^\infty(\mathbb{R}, H^s)),$$

montrer que, si  $(x, \xi) \in WFu$ , alors  $\chi_t(x, \xi) \in WFu$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a posé

$$\begin{aligned} \chi_t(y, \eta) &= (x(t), \xi(t)) \text{ avec } \dot{x}(t) = \frac{\partial a_1}{\partial \xi}(x(t), \xi(t)), \\ &\quad \dot{\xi}(t) = -\frac{\partial a_1}{\partial x}(x(t), \xi(t)), \\ x(0) &= y, \quad \xi(0) = \eta. \end{aligned}$$

(On vérifiera que la proposition 1.3 est encore vraie si l'on ajoute un second membre régulier.)

b) Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  proprement supporté sur un ouvert  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  (ou une variété différentiable). On suppose que le symbole principal  $p_m$  est réel. Soit  $u \in \mathcal{D}'(X)$  telle que  $Pu \in C^\infty(X)$ . Montrer que  $WFu$  est une réunion de bicaractéristiques de  $p_m$  (i.e. de courbes intégrales de  $H_{p_m}$  associées à la valeur  $p_m = 0$ ).

*Indication.* On se ramènera à une situation sur tout  $\mathbb{R}^n$  comme en a) à l'aide de troncatures, puis au cas  $m = 1$  en multipliant  $P$  par un opérateur elliptique d'ordre  $1 - m$ .

c) Appliquer le résultat énoncé en b) au cas où  $P$  est un champ de vecteurs,  $P = \partial_t^2 - \Delta$  (comparer avec le résultat final de l'exercice 2).

d) On considère  $P = \partial_x^2 + x \partial_y^2$  sur la bande  $B = \{-1 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$ . Soit  $u \in \mathcal{D}'(B)$  telle que  $Pu \in C^\infty(B)$ . On suppose que  $u \in C^\infty$  près de  $\{x = -c\}$  pour un certain  $c \in ]0, 1[$ . Montrer que  $u \in C^\infty(B)$ .

C.4 Soit  $P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^m P_j(t, x, D_x) D_t^j$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$ . On note :

$$p(x, t, \xi, \tau) = \sum_{j=0}^m p_j(t, x, \xi) \tau^j,$$

son symbole principal ; on suppose que  $p_m = 1$ , et que les racines en  $\tau$  de l'équation  $p(x, t, \xi, \tau) = 0$  sont distinctes (notées  $\tau_1(t, x, \xi), \dots, \tau_m(t, x, \xi)$ ).

On se propose de montrer qu'il existe  $\lambda_1(t, x, \xi), \dots, \lambda_m(t, x, \xi)$ , symboles classiques d'ordre 1 en  $(x, \xi)$ ,  $C^\infty$  en  $t$ , tels que :

$$P = (D_t - \lambda_1(t, x, D_x)) \dots (D_t - \lambda_m(t, x, D_x)) + R,$$

où  $R(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} R_j(t, x, D_x) D_t^j$  et  $R_j \in S^{-\infty}$ .

a) On note :

$$q_j(x, t, \xi, \tau) = \prod_{k \neq j} (\tau - \tau_k(t, x, \xi)).$$

Montrer que, si

$$a(x, t, \xi, \tau) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t, x, \xi) \tau^j,$$

est homogène de degré  $\ell$  en  $(\xi, \tau)$ , on peut écrire

$$a = \sum_{j=1}^m b_j(t, x, \xi) q_j(x, t, \xi, \tau),$$

où les  $b_j$  sont homogènes de degré  $\ell - m + 1$  en  $\xi$ . (On donnera une formule explicite pour les  $b_j$ .)

b) Vérifier, ainsi qu'il est annoncé au début du paragraphe 2, que

$$P = (D_t - \tau_1(t, x, D_x)) \dots (D_t - \tau_m(t, x, D_x)) + R_{m-1},$$

où  $R_{m-1}(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} R_{m-1,j}(t, x, D_x) D_t^j$  et  $R_{m-1,j}$  est classique

d'ordre  $m-1-j$ . Montrer qu'il existe  $\sigma_{1,0}(t, x, \xi), \dots, \sigma_{m,0}(t, x, \xi) \in S^0$ , classiques, tels que

$$P = (D_t - \tau_1(t, x, D_x) - \sigma_{1,0}(t, x, D_x)) \dots (D_t - \tau_m(t, x, D_x) - \sigma_{m,0}(t, x, D_x)) + R_{m-2},$$

où  $R_{m-2}(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} R_{m-2,j}(t, x, D_x) D_t^j$  et  $R_{m-2,j}$  est classique d'ordre  $m-2-j$ . Conclure.

**C.5** Soit  $A = A(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T], S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$  un symbole à valeurs dans les matrices carrées complexes d'ordre  $m$ , dépendant de manière  $C^\infty$  de  $t$ .

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$Lu \equiv (D_t - A(t, x, D_x)) u = f, u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

où toutes les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{C}^m$ , sous l'hypothèse (dite de stricte hyperbolicité) que le symbole principal  $A_1(t, x, \xi)$  de  $A$  a toutes ses valeurs propres réelles et distinctes.

a) Montrer qu'il existe  $P = P(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T], S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$  à valeurs dans les matrices carrées d'ordre  $m$ , elliptique d'ordre 0, tel que

$$P(t, x, D_x) A(t, x, D_x) u = \Lambda(t, x, D_x) P(t, x, D_x) u + R(t, x, D_x) u,$$

où

$$A(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t, x, \xi) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(t, x, \xi) \end{pmatrix}$$

les  $\lambda_j$  ayant pour symboles principaux les valeurs propres de  $A_1(t, x, \xi)$ , et où  $R \in C^\infty([0, T], S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$ .

b) Montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour  $\lambda$  assez grand,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} e^{-\lambda t} |Pu(t, \cdot)|_s \leq C \left( |\varphi|_s + \int_0^T e^{-\lambda t} (|Lu(t, \cdot)|_s + |u(t, \cdot)|_s) dt \right).$$

En déduire l'inégalité d'énergie

$$\sup_{0 \leq t \leq T} e^{-\lambda t} |u(t, \cdot)|_s \leq C \left( |\varphi|_s + \int_0^T e^{-\lambda t} |Lu(t, \cdot)|_s dt \right),$$

(avec une autre constante  $C$ ). On remarquera, comme à la fin de la preuve de la proposition 2.1, que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} e^{-\lambda t} |u(t, \cdot)|_{s-1} &\leq \\ &\leq |\varphi|_{s-1} + 2 \int_0^T e^{-\lambda t} (|Lu(t, \cdot)|_{s-1} + C' |u(t, \cdot)|_s) dt. \end{aligned}$$

En raisonnant comme au paragraphe 1.2, en déduire l'existence et l'unicité pour le problème de Cauchy (1).

**C.6** Cet exercice montre comment réduire un problème hyperbolique scalaire d'ordre  $m$  à un système du type considéré à l'exercice C.5. (La méthode est due à A. P. Calderón.)

Soit

$$P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^m P_j(t, x, D_x) D_t^j,$$

un opérateur différentiel scalaire d'ordre  $m$ , avec  $P_m(t, x, \xi) = 1$ .

a) On suppose que  $Pu = f$ ,  $D_t^{j-1} u(0, x) = \varphi_j(x)$  pour  $j = 1, \dots, m$ .  
Montrer que  $v = (v_1, \dots, v_m)$  défini par

$$v_j = D_t^{j-1} \langle D \rangle^{m-j} u,$$

(où  $\langle D \rangle$  a pour symbole  $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$ ) est solution d'un système du type :

$$(D_t - A(t, x, D_x)) v = g, v(0, x) = \psi(x),$$

que l'on explicitera.

b) Calculer le polynôme caractéristique du symbole principal  $A_1(t, x, \xi)$  de  $A(t, x, D_x)$ , et en déduire que, si  $P$  est strictement hyperbolique, alors le système  $D_t - A$  l'est aussi au sens de l'exercice C.5. En déduire une étude du problème de Cauchy pour  $P$ , à l'aide des résultats de l'exercice C.5.

### C.7\* Systèmes symétriques positifs sur le tore

L'exercice suivant est emprunté pour l'essentiel à J. MOSER [Mo]. Sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , on considère un système différentiel  $m \times m$

$$L = \sum_{j=1}^n A_j(x) \partial_j + B(x),$$

et l'on suppose que les  $A_j$  sont hermitiennes. On note :

$$K(x) = \frac{B(x) + B(x)^*}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial_j A_j(x),$$

et on fait l'hypothèse de positivité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{T}^n, \quad K(x) \geq c_0 I, \quad c_0 > 0. \quad (P_0)$$

a) Montrer que, pour toute fonction  $u \in H^1(\mathbb{T}^n)$ , on a

$$\operatorname{Re}(Lu, u) = (Ku, u). \quad (1)$$

Montrer que cette identité est encore vraie si l'on suppose seulement  $u \in L^2$ ,  $Lu \in L^2$ . (On utilisera le « lemme de Friedrichs », Ex. 5.10.b ; chapitre I.)

En déduire l'estimation  $|u|_0 \leq \text{Cte} |Lu|_0$ , puis le fait que  $u \in L^2$  et  $Lu = 0$  entraîne  $u = 0$ .

b) Montrer l'inégalité  $|u|_0 \leq \text{Cte} |L^* u|_0$ , et en déduire que, pour toute  $f \in L^2$ , l'équation  $Lu = f$  admet une solution et une seule  $u \in L^2$ .

c) On note  $\langle D \rangle^s$  l'opérateur de symbole  $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$  ( $s > 0$ ). On suppose vérifiée la condition

$$\forall \xi \in S^{n-1}, \quad K(x) + s \sum_{1 \leq j, k \leq n} \partial_k A_j(x) \xi_j \xi_k \geq c_s I, \quad (P_s)$$

où  $c_s > 0$ . Montrer l'estimation

$$\forall u \in H^{s+1}, \quad \text{Re} (\langle D \rangle^s Lu, \langle D \rangle^s u) \geq \frac{c_s}{2} |u|_s^2 - C |u|_0^2 \quad (2)$$

(on calculera le symbole principal de  $[L, \langle D \rangle^s]$ , et on utilisera l'inégalité de Gårding, chapitre I, proposition 5.3) et en déduire que  $|u|_s \leq \text{Cte} |Lu|_s$ .

b) Toujours sous l'hypothèse  $(P_s)$ , on suppose que  $f \in H^s$  et on considère la solution  $u \in L^2$  de  $Lu = f$ . On se propose de montrer que  $u \in H^s$ .

i) Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $L_\varepsilon = L - \varepsilon \Delta \text{id}$  ( $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ ). En raisonnant comme en a) et b), montrer qu'il existe  $u_\varepsilon \in L^2$  unique telle que  $L_\varepsilon u_\varepsilon = f$ . Montrer que  $(u_\varepsilon)$  est bornée dans  $L^2$  et qu'une sous-suite de  $(u_\varepsilon)$  tend faiblement vers  $u$  si  $\varepsilon$  tend vers 0.

ii) Montrer que  $u_\varepsilon \in H^{s+2}$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et, en utilisant l'estimation (2), montrer que  $(u_\varepsilon)$  est bornée dans  $H^s$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Conclure.

e) Vérifier que la condition  $(P_s)$  ne peut avoir lieu pour tout  $s$  que si les  $A_j$  sont constantes.

f) La question e) laisse prévoir une limitation de la régularité  $H^s$  de la solution de  $Lu = f$  pour  $f \in C^\infty$ . Calculer explicitement la solution  $u \in L^2$  de

$$\left( -\sin x \frac{d}{dx} + m \right) u = (\sin x)^m,$$

sur  $\mathbb{T}^1$ , avec  $m > 1/2$ , et vérifier que la limitation prévue par la théorie ci-dessus est optimale.

## CHAPITRE III

# Théorèmes de fonctions implicites

Nous présentons ici différents exemples de problèmes de perturbation, regroupés selon la sévérité des « pertes de dérivées » subies : d'abord les cas « elliptiques », où le théorème usuel des fonctions implicites suffit ; puis les problèmes justiciables d'une méthode de point fixe (y compris la question du plongement isométrique) ; enfin, les cas où l'on dispose « d'estimations douces » sur le linéarisé, autorisant la mise en place d'une technique de Nash-Moser (comme pour l'étude des perturbations de champs de vecteurs sur le tore, par exemple).

## A THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES ET PROBLÈMES ELLIPTIQUES

### 1 RAPPEL DU THÉORÈME DANS LE CADRE DES ESPACES DE BANACH

#### 1.1 Le théorème d'inversion locale

**THÉORÈME.** Soient  $f : B_1 \supset U \rightarrow B_2$  ( $B_i$  espace de Banach,  $U$  ouvert de  $B_1$ ), et supposons  $f$  continûment différentiable dans  $U$ . S'il existe  $A : B_2 \rightarrow B_1$  linéaire continue telle que  $f'(x_0)A = \text{id}_{B_2}$ , alors il existe  $g, C^1$  au voisinage de  $y_0 = f(x_0)$ , telle que  $f(g(y)) = y$ . Si de plus  $f'(x_0)$  est un isomorphisme de  $B_1$  sur  $B_2$ ,  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $f(x_0)$ .

*Preuve :*

a) Supposons d'abord que  $B_1 = B_2$ ,  $f(x_0) = x_0$ ,  $f'(x_0) = \text{id}$ . On écrit alors l'équation  $y = f(x)$  sous la forme  $x = x + y - f(x) \equiv h(x)$ , et l'on cherche un point fixe de  $h$  comme limite de la suite  $x_{n+1} = h(x_n)$ . Plus précisément :

i) Pour  $\delta > 0$  assez petit et  $\|y - x_0\| \leq \delta/2$ ,  $h: \overline{B(x_0, \delta)} \rightarrow \overline{B(x_0, \delta)}$ ; en effet,

$$f(x) = f(x_0) + x - x_0 + o(\|x - x_0\|) = x + o(\|x - x_0\|),$$

d'où

$$h(x) - x_0 = y - x_0 + o(\|x - x_0\|), \quad \|h(x) - x_0\| \leq \delta(1/2 + \varepsilon(\delta)) \leq \delta.$$

ii) Si  $\|y - x_0\| \leq \delta/2$  et  $\delta$  assez petit,  $h$  est contractante dans  $\overline{B(x_0, \delta)}$ , car

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \sup_{\|z - x_0\| \leq \delta} \|\text{id} - f'(z)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

D'après i) et ii),  $h$  possède dans  $\overline{B(x_0, \delta)}$  un unique point fixe. En conséquence, pour tout  $y \in \overline{B(x_0, \delta/2)}$ , l'équation  $f(x) = y$  possède une solution et une seule dans  $\overline{B(x_0, \delta)}$ . Puisque  $\delta$  peut être pris arbitrairement petit, nous en déduisons que l'image par  $f$  de tout voisinage de  $x_0$  est un voisinage de  $x_0$ .

b) Passons au cas général. En appliquant ce qui précède à  $\tilde{f}(y) = f(x_0 + A(y - y_0))$ , on obtient d'abord que l'image par  $f$  de tout voisinage de  $x_0$  est un voisinage de  $y_0$ . Soit  $Y$  une boule ouverte centrée en  $y_0$ , de rayon assez petit, tel que

$$\sup_{y \in Y} \|\text{id} - \tilde{f}'(y)\| < 1.$$

Alors, pour tout  $y \in Y$ ,  $\tilde{f}'(y)$  est inversible, donc, en appliquant ce qui précède à  $y$  et  $\tilde{f}$ , on conclut que l'image par  $\tilde{f}$  de tout ouvert de  $Y$  est un ouvert. Comme  $\tilde{f}$  est également injection sur  $Y$  en vertu de la formule de Taylor déjà utilisée en a), elle réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $Y$  sur  $\tilde{f}(Y)$ . Si  $\tilde{g}$  est le difféomorphisme, la formule  $g(y) = x_0 + A(\tilde{g}(y) - y_0)$  fournit l'application  $g$  cherchée.

c) Si  $f'(x_0)$  est un isomorphisme de  $B_1$  sur  $B_2$ , alors  $A$  est inversible, et d'après b),

$$f(x) = \tilde{f}(y_0 + A^{-1}(x - x_0))$$

définit un  $C^1$ -difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $y_0$ .  $\square$

## 1.2 Le théorème des fonctions implicites

C'est un corollaire standard du théorème d'inversion locale.

**THÉORÈME.** Soient  $B_0, B_1, B_2$  trois espaces de Banach,  $U$  un voisinage de  $(x_0, y_0) \in B_0 \times B_1$ , et  $f: U \rightarrow B_2$  continûment différentiable. Supposons qu'il existe une application linéaire continue  $A: B_2 \rightarrow B_1$ , telle que  $f'_y(x_0, y_0)A = \text{id}_{B_2}$ . Il existe alors  $g, g \in C^1$ , d'un voisinage de  $x_0$  dans  $B_1$ , telle que  $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ . Si de plus  $f'_y$  est bijective,  $g$  est unique et  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  équivaut à  $y = g(x)$  pour  $(x, y)$  voisin de  $(x_0, y_0)$ .

*Preuve :* c'est le théorème d'inversion locale appliqué à  $F(x, y) = (x, f(x, y))$ .  $\square$

Ce théorème qui, comme on le voit, est facile à démontrer, se révèle très puissant pour résoudre certaines équations différentielles : nous allons tenter, à l'aide d'exemples, de comprendre lesquelles.

## 2 QUELQUES EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

### 2.1 Résolubilité locale d'équations différentielles

**PROPOSITION 2.1.** Soit  $y' = g(x, y)$  un système d'équations différentielles, où  $g$  est de classe  $C^1$  et réelle au voisinage de  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Il existe une unique solution  $y$  définie au voisinage de  $x_0$ , satisfaisant  $y(x_0) = y_0$ .

*Preuves :* nous donnons trois preuves, chacune contenant des éléments qui seront utiles dans des situations plus générales. On peut toujours supposer  $x_0 = y_0 = 0$ .

*Première preuve :* on pose  $x = \varepsilon t$  : si  $z(t)$  est une solution de  $z' = \varepsilon g(\varepsilon t, z)$  pour  $t \in [-1, +1]$ , avec  $z(0) = 0$  alors  $y(x) = z(x/\varepsilon)$  est la solution cherchée, définie dans  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ .

Soit  $f(\varepsilon, z) = z' - \varepsilon g(\varepsilon t, z)$ , considérée comme une application de classe  $C^1$  d'un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times B_1$  à valeurs dans  $B_2 = C^0([-1, +1])$ , où  $B_1 = \{z \in C^1([-1, +1]), z(0) = 0\}$ . Comme  $f'_z(0, 0) = \frac{d}{dt}$ , on prend  $A: B_2 \rightarrow B_1$  définie par  $(Au)(t) = \int_0^t u(s) ds$  pour appliquer le théorème des fonctions implicites.

*Deuxième preuve :* soit  $\tilde{y}(x) = xg(0, 0)$  une solution approchée et  $I = [-\alpha, +\alpha]$ , où  $\alpha > 0$  est choisi assez petit pour que  $f(y) = y' - g(x, y)$  soit bien définie au voisinage de  $\tilde{y}$  dans  $B_1 = \{y \in C^1(I), y(0) = 0\}$ , à valeurs dans  $B_0 = C^0(I)$ . Comme  $f'(\tilde{y}) = \frac{d}{dx} - g'_y(x, \tilde{y})$  est un système d'équations linéaires, on peut

trouver  $A$  satisfaisant à  $f'(\tilde{y}) A = \text{id}_{B_0}$ , et le théorème d'inversion locale s'applique.

Choisissons  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi$  valant 1 près de 0 : pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $\chi(x/\varepsilon) f(\tilde{y})$  est une « petite perturbation » dans  $B_0$ , et l'on peut trouver  $y \in B_1$  voisin de  $\tilde{y}$  tel que  $f(y) = f(\tilde{y}) - \chi(x/\varepsilon) f(\tilde{y})$ . En particulier,  $y$  est la solution cherchée dans un voisinage de 0.

Bien que moins foudroyante que la précédente, cette preuve indique un procédé (utiliser une solution approchée en  $x_0$ ) pour transformer une question d'existence locale en  $x_0$  en problème de perturbation dans  $B_0$ .

*Troisième preuve* : on résout l'équation

$$y(x) = \int_0^x g(s, y(s)) ds \equiv H(y)(x)$$

en cherchant un point fixe de  $H$  dans la boule  $\overline{B(0, \beta)}$  de  $C^0([-\alpha, \alpha])$ . En effet, si  $\beta \geq \alpha \sup |g|$ ,  $H$  opère dans cette boule, et si  $\alpha \sup |g'_y| < 1$ ,  $H$  est contractante.

Cette méthode de point fixe sera utile pour résoudre des systèmes hyperboliques au paragraphe 3.  $\square$

## 2.2 Solutions périodiques d'équations non linéaires

**PROPOSITION 2.2.** *Soit  $p : ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$  une fonction continue strictement croissante. Pour toute fonction  $g \in C_{2\pi}^0$  (continue et  $2\pi$ -périodique) à valeurs dans  $]c, d[$ , il existe une fonction  $y \in C_{2\pi}^1$ , à valeurs dans  $]a, b[$ , satisfaisant  $y' + p(y) = g$ .*

*Preuve* : soit  $U \subset C_{2\pi}^1$  l'ouvert des fonctions à valeurs dans  $]a, b[$ , et  $f : U \rightarrow C_{2\pi}^0$  définie par  $f(y) = y' + p(y)$ .

a) Pour tout  $y \in U$ ,  $f'(y) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$  (définie par  $f'(y) = \frac{d}{dy} + p'(y)$ ) est inversible, car  $\int_0^{2\pi} p'(y) dx \neq 0$ . On peut constater ce fait

en calculant explicitement une solution périodique par la méthode de variation des constantes (cf. aussi proposition 3.3.1 plus loin). Le théorème d'inversion locale implique qu'alors  $f(U)$  est un ouvert de  $C_{2\pi}^0$ .

b) Soit  $V$  l'ouvert convexe des fonctions de  $C_{2\pi}^0$  à valeurs dans  $]c, d[$ . Comme  $f(U) \cap V \neq \emptyset$ , il suffit de montrer que  $f(U) \cap V$  est fermé dans  $V$  pour avoir  $f(U) \supset V$ .

Soit donc  $g \in V$ , et  $g_j \in f(U)$ ,  $g_j \rightarrow g$ ,  $f(y_j) = g_j$  : l'équation  $y'_j + p(y_j) = g_j$  montre que les valeurs  $p\left(\sup_x y_j\right)$  et  $p\left(\inf_x y_j\right)$  sont des

valeurs prises par  $g_j$ . Comme  $g_j([0, 2\pi])$  est voisin de  $g([0, 2\pi]) \subset ]c, d[$  par hypothèse, on en déduit que les valeurs des  $y_j$  sont contenues dans un compact fixe de  $]a, b[$ . L'équation implique alors que  $\|y_j\|_0 \leq \text{Cte}$ , et l'on peut extraire de la suite des  $y_j$  une suite partielle convergente dans  $C^0$  vers  $y$ ;  $y$  est périodique, et l'équation montre que  $y \in C^1_{2\pi}$ , avec  $f(y) = g$ .  $\square$

On voit ici qu'une utilisation ingénieuse du théorème d'inversion locale, combinée à des informations de nature topologique, peut conduire à des résultats d'analyse globale.

### 2.3 Perturbation d'un problème de Dirichlet non linéaire

**PROPOSITION 2.3.** *Pour un compact convexe  $A \subset \mathbb{R}^4$ , désignons par  $B_0(A)$  l'espace des fonctions continues sur  $A$ , possédant des dérivées partielles continues par rapport aux variables  $x_2, x_3, x_4$ . Soit  $u \in C^2(I, \mathbb{R})$  ( $I = [a, b]$ ) une solution du problème de Dirichlet*

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0, u(a) = u(b) = 0,$$

pour une certaine  $F \in B_0(A)$ , où  $A$  est un voisinage compact des valeurs de  $x, u, u', u''$ . Supposons que  $F'_{u''} > 0$ ,  $F'_u < 0$ . Pour toute  $G \in B_0(A)$  proche de  $F$ , il existe alors une solution  $v$  du problème  $G(x, v, v', v'') = 0$ ,  $v(a) = v(b) = 0$ .

*Preuve :* on considère  $f(G, v)$  définie au voisinage de  $(F, u)$  par  $f(G, v)(x) = G(x, v(x), v'(x), v''(x))$ , comme une application d'un ouvert de  $B_0(A) \times C^2_0(I)$  dans  $C^0(I)$ , où  $C^2_0(I) = \{u \in C^2(I), u(a) = u(b) = 0\}$ . La différentielle  $f'_v(F, u)$  est

$$f'_v(F, u) = F'_{u''} \frac{d^2}{dx^2} + F'_u \frac{d}{dx} + F'_u.$$

Si  $f'_v(F, u)w = 0$ ,  $w$  ne peut avoir de maximum strictement positif ni de minimum strictement négatif à cause de l'hypothèse  $F'_{u''} > 0$ ,  $F'_u < 0$ , donc  $w = 0$ .

La théorie générale du problème de Dirichlet linéaire nous indique alors que  $f'_v$  est surjective (c'est « l'alternative de Fredholm »). Donnons de ce fait une preuve élémentaire : soient  $y_1$  et  $y_2$  les solutions de  $f'_v y_j = 0$  avec  $y_1(a) = 0$ ,  $y'_1(a) = 1$ ,  $y_2(b) = 0$ ,  $y'_2(b) = 1$ . L'injectivité de  $f'_v$  dans  $C^2_0(I)$  implique précisément que  $y_1$  et  $y_2$  sont indépendantes. On peut alors trouver une solution de  $f'_v y = h$  sous la forme  $y = \alpha y_1 + \beta y_2$  par la méthode de la variation des constantes, dans laquelle on peut choisir de plus  $\alpha(b) = 0$  et  $\beta(a) = 0$ , soit  $y \in C^2_0(I)$ .

L'application du théorème des fonctions implicites achève la preuve.  $\square$

## 2.4 Résolubilité locale d'équations elliptiques non linéaires

PROPOSITION 2.4. Soit  $F = F(x, u^{(\alpha)})$  ( $|\alpha| \leq 2$ ) une fonction  $C^\infty$  de ses  $n + N$  arguments réels  $\left( N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)$ . On suppose  $p_0 \in \mathbb{R}^N$  donné tel que

i)  $F(0, p_0) = 0$ .

ii) L'opérateur  $P = \sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(0, p_0) \partial^\alpha$  est elliptique, c'est-à-dire :

$$p_2(\xi) = \sum_{|\alpha| = 2} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(0, p_0) \xi^\alpha \neq 0 \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0.$$

Il existe alors, au voisinage de  $x = 0$ , une solution  $u$ ,  $C^\infty$  à valeurs réelles, de l'équation

$$F(x, \partial^\alpha u) = 0$$

avec

$$(\partial^\alpha u(0))_{|\alpha| \leq 2} = p_0.$$

Preuve : soit  $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\partial^\alpha \tilde{u}(0)_{|\alpha| \leq 2} = p_0$ . Fixons  $\rho > 2$ ,  $\rho \notin \mathbb{N}$ , et notons :

$$B_1 = \{z \in C^\rho(B), \partial^\alpha z(0) = 0, |\alpha| \leq 2\},$$

$$B_2 = \{v \in C^{\rho-2}(B), v(0) = 0\},$$

avec  $B = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$ .

Pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  proche de 0,  $z \in B_1$ , posons :

$$f(\varepsilon, z)(y) = F(\varepsilon y, \tilde{u}(\varepsilon y) + \varepsilon^2 z(y), (\nabla \tilde{u})(\varepsilon y) + \varepsilon(\nabla z)(y), (\nabla^2 \tilde{u})(\varepsilon y) + \nabla^2 z(y)).$$

On définit ainsi une application  $f$  d'un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times B_1$  dans  $B_2$ , telle que  $f(0, 0) = 0$ . La dérivée partielle  $f'_z(0, 0)$  est  $P_2 = \sum_{|\alpha| = 2} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(0, p_0) \partial^\alpha$ , partie principale de  $P$ . Quitte à dilater et

faire tourner les axes, on peut toujours supposer (au signe près) que  $p_2 = -|\xi|^2$  et  $P_2 = \Delta$ . Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut trouver  $A : B_2 \rightarrow B_1$  tel que  $\Delta A = \text{id}$ . En utilisant une solution élémentaire de  $\Delta$ , il est facile de prouver qu'il existe  $A_0 : C^{\rho-2}(B) \rightarrow C^\rho(B)$  tel que  $\Delta A_0 = \text{id}$ . (Voir Ex. A.2.)

Il suffit alors de poser, pour  $v \in B_2$ ,

$$Av(y) = A_0 v(y) - A_0 v(0) - (A_0 v)'(0) \cdot y - (A_0 v)''(0) \cdot \frac{y^2}{2},$$

car

$$\Delta \left( (A_0 v)''(0) \frac{y^2}{2} \right) = \text{trace } (A_0 v)''(0) = (\Delta A_0 v)(0) = v(0) = 0.$$

On obtient ainsi  $\varepsilon > 0$  et  $z$  satisfaisant à  $f(\varepsilon, z) = 0$ , et la fonction  $u(x) = \tilde{u}(x) + \varepsilon^2 z(x/\varepsilon)$  est une solution  $C^\rho$  du problème.

Les résultats standard de régularité sur les équations elliptiques permettent alors de conclure qu'en fait  $u \in C^\infty$  (voir lemme 2.5).  $\square$

Nous donnons ci-dessous une démonstration simple du résultat de régularité utilisé sous l'hypothèse supplémentaire que  $\rho > 3$ .

LEMME 2.5. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $u \in C^\rho(\Omega)$  ( $\rho > 3$ ) une fonction réelle solution de l'équation

$$F(x, \partial^\alpha u) = 0, \quad (|\alpha| \leq 2),$$

$F$  étant une fonction  $C^\infty$  de ses  $n + N$  arguments réels. On suppose que l'opérateur  $P = \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(x, \partial^\alpha u(x)) \partial^\alpha$  est elliptique sur  $\Omega$ . Alors  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

*Preuve* : soit  $x_0 \in \Omega$ . Nous allons montrer que  $u \in C^{\rho+1}$  près de  $x_0$ . Faisant varier  $x_0$ , on en déduira  $u \in C^{\rho+1}(\Omega)$  puis, par récurrence,  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

Soit donc  $j \in \{1, \dots, n\}$ ; notons  $v = \partial_j u \in C^{\rho-1}(\Omega)$ . En appliquant  $\partial_j$  à l'équation, on a :

$$Pv \in C^{\rho-2}(\Omega),$$

ce que l'on peut encore écrire, en notant  $P_0$  l'opérateur à coefficients constants égaux à la valeur des coefficients de  $P$  en  $x_0$  :

$$P_0 v + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha v \in C^{\rho-2}(\Omega),$$

avec  $a_\alpha \in C^{\rho-2}(\Omega)$ ,  $a_\alpha(x_0) = 0$ .

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  valant 1 près de  $\{|x| \leq \frac{1}{2}\}$  et 0 sur  $\{|x| \geq 1\}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right), \quad v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon v, \quad a_\alpha^\varepsilon = \varphi_{2\varepsilon} a_\alpha.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit,  $v_\varepsilon \in C_0^{\rho-1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $a_\alpha^\varepsilon \in C_0^{\rho-2}(\mathbb{R}^n)$ , et

$$P_0 v_\varepsilon = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^\varepsilon \partial^\alpha v_\varepsilon \in C_0^{\rho-2}(\mathbb{R}^n).$$

Nous utilisons maintenant la décomposition suivante, introduite dans la preuve de la proposition A.2.1.1 i) au chapitre II :  $\forall a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , il existe des opérateurs  $A$  et  $B$  tels que

$$ab = \sum_q (S_q a) b_q + \sum_p (S_{p+1} b) a_p = Ab + Ba,$$

avec

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \quad \|A\|_{C^\sigma \rightarrow C^\sigma} \leq \text{Cte} \|a\|_0, \quad \|B\|_{C^\sigma \rightarrow C^\sigma} \leq \text{Cte} \|b\|_0.$$

En appliquant ce résultat à  $a = a_\alpha^\varepsilon$ ,  $b = \partial^\alpha v_\varepsilon$ , on en déduit

$$P_0 v_\varepsilon + T_\varepsilon v_\varepsilon \in C^{\rho-2}(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \quad \|T_\varepsilon\|_{C^{\sigma+2} \rightarrow C^\sigma} \leq \text{Cte} \sum_{|\alpha|=2} \|a_\alpha^\varepsilon\|_0 = O(\varepsilon).$$

En faisant opérer à gauche une paramétrix de  $P_0$  sur l'équation, on obtient

$$v_\varepsilon + K_\varepsilon v_\varepsilon \in C^\rho(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \quad \|K_\varepsilon\|_{C^{\sigma+2} \rightarrow C^{\sigma+2}} = O(\varepsilon).$$

Fixant  $\varepsilon > 0$  tel que  $\|K_\varepsilon\|_{C^{\sigma+2} \rightarrow C^{\sigma+2}} < 1$  pour  $\sigma = \rho - 3$  et  $\sigma = \rho - 2$ , on en conclut que  $v_\varepsilon \in C^\rho(\mathbb{R}^n)$ , donc que  $v \in C^\rho(\mathbb{R}^n)$  près de  $x_0$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

### Remarques.

a) Le lemme 2.5 est en fait vrai pour  $\rho > 2$  (et même pour  $\rho = 2$ ) mais la démonstration est un peu plus technique.

b) Par souci de simplicité, l'énoncé de la proposition 2.4 a été volontairement restreint au cas d'une équation scalaire d'ordre 2. Nous laissons au lecteur intéressé le soin de vérifier que la preuve que nous avons donnée s'adapte au cas des systèmes différentiels elliptiques d'ordre quelconque.

## B DEUX EXEMPLES D'UTILISATION DE LA MÉTHODE DU POINT FIXE

### 1 UN EXEMPLE DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

#### 1.1 Systèmes hyperboliques symétriques quasi linéaires

Nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum A_j(u) \partial_j u + B(u) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (*)$$

dans une bande  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ .

Ici  $u \in \mathbb{R}^N$ , et  $A_j(u)$  et  $B(u)$  sont des matrices réelles  $N \times N$  et  $N \times 1$ ,  $C^\infty$  dans un ouvert  $G \subset \mathbb{R}^N$  pour lequel  $u_0(x) \in G$ . Nous ferons l'hypothèse suivante :

(H) Il existe une matrice réelle symétrique  $S(u)$ ,  $C^\infty$  dans  $G$  telle que

- i)  $S(u) \geq S_0 \text{ id}$ ,  $S_0 > 0$ ,
- ii)  $S(u) A_j(u)$  est symétrique.

Il est alors facile de voir que les valeurs propres de  $\sum A_j(u) \xi_j$  sont réelles pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in G$  : on dit que le système est *hyperbolique*. (Cf. chapitre II, paragraphe C.2.)

Un système vérifiant (H) est dit *hyperbolique symétrisable* (la symétrie des matrices  $SA_j$  est ici essentielle (cf. chapitre II, paragraphe C.1.1)). Enfin, le fait que les coefficients  $A_j$  dépendent seulement de  $u$ , et non de  $\nabla u$ , donne au système un caractère non linéaire particulier qu'on appelle « quasi linéaire ».

De tels systèmes existent dans la nature. Par exemple, l'état d'un fluide compressible dans  $\mathbb{R}^n$  décrit par sa densité  $\rho > 0$  et sa vitesse  $v = (v_1, \dots, v_n)$  est soumis aux équations suivantes, dans le cas où l'on suppose l'entropie constante (peu importe ici ce qu'est cette entropie) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i v + p e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  est le  $i$ -ième vecteur de base, et  $p = p(\rho)$  est la pression, fonction croissante, supposée connue, de  $\rho$ . Dans ce cas,  $N = n + 1$ ,  $B \equiv 0$ , et l'on peut écrire le système sous la forme équivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v \cdot \nabla v_i + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad \text{où } p'_\rho = c^2. \end{cases}$$

On a donc ici

$$u = (\rho, v), \quad A_i(u) = \begin{pmatrix} v_i & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v_i & & \\ \vdots & & & \\ c^2/\rho & & & v_i \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et

$$S(u) = \begin{pmatrix} c^2 & & & \\ & \rho^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

Toutefois, l'hypothèse de coercivité (H) i) ne sera vérifiée que si la densité  $\rho$  reste minorée par un nombre positif. Ceci peut être obtenu soit en résolvant le système dans  $[0, T] \times \mathbb{T}^n$  ( $\mathbb{T}^n$  étant le tore à  $n$  dimensions), soit en introduisant une version locale convenable des espaces  $H^s$  sur  $\mathbb{R}^n$  (cf. [Ma1]).

Remarquons que les équations écrites expriment la conservation de la masse et du moment : elles présentent ceci de particulier qu'elles sont écrites sous forme de divergence. Un tel système est un cas particulier très intéressant de système quasi linéaire, dit « système de lois de conservation ». Le lecteur intéressé pourra consulter [Ma1] pour une introduction à cette théorie. Nous n'utiliserons pas ici cette propriété supplémentaire de l'exemple.

## 1.2 Existence locale en temps d'une solution

**THÉORÈME 1.2.** *Soit un système (\*) vérifiant (H). Si  $u_0 \in H^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s > n/2 + 1$ , il existe  $T > 0$  et une solution  $u \in L^\infty([0, T]; H^s) \cap \operatorname{Lip}([0, T]; H^{s-1})$  de (\*).*

Si l'on compare (\*) à la proposition 2.1 vue en A, on observe la différence fondamentale suivante : on ne peut utiliser le théorème des fonctions implicites (première ou deuxième preuve), tout simplement parce que (avec les notations du paragraphe A.2.1) la dérivée « perdue »

par l'action de  $f$  n'est pas « regagnée » par la résolution de l'équation linéarisée  $f'_z$ . Par contre, la troisième preuve peut s'adapter ici de la façon suivante : on définit une suite  $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} S(u^k) \partial_t u^{k+1} + \Sigma S(u^k) A_j(u^k) \partial_j u^{k+1} + S(u^k) B(u^k) = 0 \\ u_{t=0}^{k+1} = S_{\theta_{k+1}} u_0, \end{cases} \quad (**)$$

et  $u^0 = S_{\theta_0} u_0$ .

Ici,  $S_\theta$  désigne une famille d'opérateurs régularisants opérant dans les espaces de Sobolev  $H^s$  avec les propriétés décrites au chapitre II, proposition A.1.6, et  $\theta_k \nearrow +\infty$  est une suite à choisir. En fait, (\*\*) signifie qu'à chaque étape on résout un système (hyperbolique symétrique) linéaire, qui ne diffère du « vrai » linéarisé sur  $u^k$  que par des termes d'ordre 0, qui importent peu. Le remplacement de  $u_0$  par  $S_{\theta_{k+1}} u_0$  a simplement pour but d'obtenir des fonctions  $u^k$  de classe  $C^\infty$ , en sorte que le système considéré est à coefficients  $C^\infty$ , ce qui est toujours plus agréable pour résoudre. La « méthode de point fixe » consiste ici précisément à écrire le « schéma » (\*\*).

Il reste donc à prouver l'existence et la convergence de la suite  $u^k$ . Cette preuve utilisera les deux faits suivants (partiellement démontrés au chapitre II) :

i) On peut résoudre dans  $C^\infty$  le problème de Cauchy pour un système symétrique hyperbolique  $L = S \partial_t + \Sigma \tilde{A}_j \partial_j$ , avec l'« estimation d'énergie »

$$c_0 \sup e^{-\lambda t} |u(t, \cdot)|_0 \leq |u(0, \cdot)|_0 + \int_0^T e^{-\lambda t} |Lu(t, \cdot)|_0 dt,$$

où  $S \geq c_0 > 0$ ,  $\lambda$  vérifiant  $2c_0 \lambda \geq \left\| \frac{1}{2} \operatorname{div} \tilde{A} - \frac{\partial S}{\partial t} \right\|_0$ .

(Voir le chapitre II, paragraphes C.1.1 et C.1.2.)

ii) On dispose des estimations « linéaires » de fonctions non linéaires établies au chapitre II, paragraphe A.2.

Il est commode de présenter la preuve en deux temps : contrôle de  $u^k$  en « grande norme » et convergence en « petite norme ».

En effet, on va prouver que  $u^{k+1} - u^k$  est une série convergente : pour ce faire, la seule possibilité est de soustraire les équations (\*\*) correspondantes, et d'utiliser l'estimation d'énergie i); cela suppose que les coefficients  $S(u^k)$  et  $S(u^k) A_j(u^k)$  sont bornés en norme Lipschitz : c'est donc une borne de  $u^k$  dans une « grande norme » (plus forte que la norme Lipschitz) que nous allons d'abord établir.

1.3 Contrôle en « grande norme »

Nous choisissons pour « grande norme » la norme

$$\| \| u \| \|_s = \| \| u \| \|_{s, T} = \sup_{t \in [0, T]} |u(t, \cdot)|_s$$

(le même  $s$  que dans l'énoncé du théorème 1.2).

Cette norme est bien adaptée à la forme des estimations d'énergie i), et par ailleurs  $\| \nabla_x u \|_0 \leq C \| \| u \| \|_s$ , car  $s > n/2 + 1$  (cf. chapitre II, proposition A.1.4). Nous faisons l'hypothèse de récurrence suivante (pour un  $\delta > 0$  à choisir) :

$$\text{pour } 0 \leq \ell \leq k, \quad \| \| u^\ell - S_{\theta_0} u_0 \| \|_{s, T} \leq \delta, \quad (H_k)$$

et nous montrerons que  $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$  si les paramètres  $\delta$ ,  $\theta_0$  et  $T$  sont bien choisis (car  $(H_0)$  est vraie par définition de  $u^0$ ).

a) Assurons-nous d'abord qu'on peut résoudre (\*\*): les valeurs de  $u_0(x, t)$  appartiennent à un compact  $K$  de  $G$ , car  $u_0$  est borné; si  $\theta_0$  et  $1/\delta$  sont assez grands, les valeurs de  $u^k$  restent donc dans un compact fixe de  $G$ , sur lequel  $S(u) \geq c_0$ .

b) Introduisons  $v^{k+1} = u^{k+1} - S_{\theta_0} u_0$ , qui satisfait le système

$$\begin{aligned} \partial_t v^{k+1} + \Sigma A_j(u^k) \partial_j v^{k+1} &= -B(u^k) - \Sigma A_j(u^k) \partial_j S_{\theta_0} u_0 \\ v^k|_{t=0} &= S_{\theta_{k+1}} u_0 - S_{\theta_0} u_0. \end{aligned}$$

Pour évaluer  $\| \| v^{k+1} \| \|_s$ , on considère le système satisfait par  $\partial_x^\alpha v^{k+1}$  ( $|\alpha| \leq s$ ) :

$$\begin{aligned} S(u^k) \partial_t \partial_x^\alpha v^{k+1} + \Sigma (SA_j)(u^k) \partial_j \partial_x^\alpha v^{k+1} &= \\ = -S(u^k) \partial_x^\alpha (B(u^k)) - S(u^k) \partial_x^\alpha \{ \Sigma A_j(u^k) \partial_j S_{\theta_0} u_0 \} \\ - S(u^k) \Sigma \{ \partial_x^\alpha (A_j(u^k) \partial_j v^{k+1}) - A_j(u^k) \partial_j \partial_x^\alpha v^{k+1} \} &\equiv F, \quad (1.3.1) \\ \partial_x^\alpha v^{k+1}|_{t=0} &= \partial_x^\alpha \{ S_{\theta_{k+1}} u_0 - S_{\theta_0} u_0 \}. \end{aligned}$$

Le fait ii) implique alors le lemme suivant.

LEMME. On a l'estimation  $|F(t, \cdot)|_0 \leq C(1 + |v^{k+1}(t, \cdot)|_s)$ , où  $C$  est indépendante de  $T$  et de  $k$ .

Preuve : les deux premiers termes de  $F$  sont bornés par une constante. Le troisième s'écrit (au facteur  $S(u^k)$  borné près) :

$$\sum_{\alpha \geq \beta, |\beta| \geq 1} * \partial_x^\beta (A_j(u^k)) \partial_x^{\alpha-\beta} \partial_j v^{k+1};$$

on peut évaluer la norme  $L^2$  de chaque terme en appliquant la proposition A.2.1.2 du chapitre II aux fonctions  $\partial_\ell(A_j(u^k))$  et  $\partial_j v^{k+1}$  ( $\partial_\ell$  est une dérivée « détachée » de  $\partial_x^\beta$ ), pour l'indice  $s-1$  : on trouve

$$|\Sigma|_0 \leq C (\|\partial_\ell(A_j(u^k))\|_0 |v^{k+1}|_s + |\partial_\ell A_j(u^k)|_{s-1} \|\partial_j v^{k+1}\|_0).$$

Comme  $\|u^k\|_0 \leq \text{Cte}$ ,

$$\begin{aligned} \|\partial_\ell(A_j(u^k))\|_0 &= \|A'_j(u^k) \partial_\ell u^k\|_0 \leq \text{Cte} \|\partial_\ell u^k\|_0 \\ &\leq \text{Cte} \|u^k\|_s \\ &\leq \text{Cte}, \end{aligned}$$

et  $|\partial_\ell A_j(u^k)|_{s-1} \leq \text{Cte} (1 + \|u^k\|_s) \leq \text{Cte}$  d'après le chapitre II, proposition A.2.2. Enfin,  $\|\partial_j v^{k+1}\|_0 \leq \text{Cte} |v^{k+1}|_s$ , d'où le lemme.  $\square$

C'est le caractère « linéaire » de l'estimation de  $F$  dans ce lemme qui est au cœur de la preuve du théorème, car il permet le contrôle de  $\|v^{k+1}\|_s$  selon le procédé d'« absorption de droite à gauche » expliqué au point c) suivant.

c) Pour appliquer l'inégalité d'énergie i) à (1.3.1), remarquons que  $\partial_t u^k + \Sigma A_j(u^{k-1}) \partial_j u^k + B(u^{k-1}) = 0$  et  $(H_k)$  impliquent  $\|\partial_t u^k\|_0 \leq \text{Cte}$ , et donc  $\|\partial_t(S(u^k)) - 1/2 \operatorname{div}(SA(u^k))\|_0 \leq \text{Cte}$ .

Pour  $\lambda \geq \lambda_0$  assez grand, on trouve

$$\begin{aligned} c_0 \sup e^{-\lambda t} |\partial_x^\alpha v^{k+1}(t, \cdot)|_0 &\leq |S_{\theta_{k+1}} u_0 - S_{\theta_0} u_0|_s + \int_0^T e^{-\lambda t} |F(t, \cdot)|_0 dt \\ &\leq \delta_1 + CT \sup \{e^{-\lambda t} (1 + |v^{k+1}(t, \cdot)|_s)\}, \end{aligned}$$

où  $\delta_1$  peut être choisie arbitrairement petite, indépendamment de  $k$ , si  $\theta_0$  est assez grand, car  $|S_\theta u_0 - u_0|_s \rightarrow 0$  lorsque  $\theta \rightarrow +\infty$ . En additionnant les inégalités obtenues pour  $|\alpha| \leq s$  et  $\lambda = \lambda_0$ , on peut choisir  $T$  assez petit et  $\theta_0$  assez grand pour obtenir  $(H_{k+1})$ .

#### 1.4 Convergence en « petite norme »

Par soustraction, on obtient :

$$\begin{cases} S(u^k) \partial_t (u^{k+1} - u^k) + \Sigma(SA_j)(u^k) \partial_j (u^{k+1} - u^k) = \\ \quad = - [S(u^k) - S(u^{k-1})] \partial_t u^k - \Sigma[(SA_j)(u^k) - (SA_j)(u^{k-1})] \partial_j u^k \\ \quad \quad - [(SB)(u^k) - (SB)(u^{k-1})], \\ (u^{k+1} - u^k)|_{t=0} = (S_{\theta_{k+1}} - S_{\theta_k}) u_0. \end{cases}$$

A nouveau, l'inégalité d'énergie i) fournit un contrôle de la « petite norme » de  $u^{k+1} - u^k$  :

$$c_0 \sup e^{-\lambda t} |(u^{k+1} - u^k)(t, \cdot)|_0 \leq \\ \leq |(S_{\theta_{k+1}} - S_{\theta_k}) u_0|_0 + C \int_0^T e^{-\lambda t} |(u^k - u^{k-1})(t, \cdot)|_0 dt .$$

Comme  $\alpha_k \equiv |S_{\theta_{k+1}} u_0 - S_{\theta_k} u_0|_0 \leq C \theta_k^{-s-1} (\theta_{k+1} - \theta_k) |u_0|_s$ , à peu près n'importe quel choix de  $\theta_k$  (par exemple  $\theta_k = k$ ) fera converger la série des  $\alpha_k$ . Si  $T$  est assez petit, on trouve

$$\sup |(u^{k+1} - u^k)(t, \cdot)|_0 \leq C \sup |(u^k - u^{k-1})(t, \cdot)|_0 + \alpha_k ,$$

avec  $C < 1$  ( $C$  est fixe, bien entendu), ce qui implique la convergence de  $u^k$  dans  $L^\infty([0, T]; L^2)$  vers  $u$ .

## 1.5 Régularité de la solution et conclusion

Comme  $u^k(t, \cdot)$  est bornée dans  $H^s$  et convergente dans  $L^2$  vers  $u(t, \cdot)$ , on obtient en fait  $u \in L^\infty([0, T]; H^s)$  (selon un argument classique : il existe une suite partielle extraite de  $u^k$  faiblement convergente dans  $H^s$  vers  $v \in H^s$ ; la limite au sens des distributions est unique, d'où  $u = v$ ). A cause de la convexité des normes  $|\cdot|_s$ , on a en fait  $|(u^k - u)(t, \cdot)|_{s'} \rightarrow 0$  pour tout  $s' < s$  : comme  $s > n/2 + 1$ , on peut choisir  $s' > n/2 + 1$ , ce qui montre que  $u \in C([0, T]; C^1)$  est solution (classique) de (\*).

On en déduit aussi  $u \in \text{Lip}([0, T]; H^{s-1})$ , en utilisant l'équation. En fait, on peut prouver que  $u \in C([0, T]; H^s) \cap C^1([0, T]; H^{s-1})$ .

## 2 LE PROBLÈME DU PLONGEMENT ISOMÉTRIQUE

### 2.1 Présentation générale

Soient  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte et  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$ , c'est-à-dire, dans des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , une forme quadratique  $g = \Sigma g_{ij}(x) dx_i dx_j$ . On cherche, pour un certain  $N$ , une application injective  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  telle que

$$g_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (\text{en abrégé } g = {}^t u' u') , \quad (2.1)$$

c'est-à-dire telle que  $g$  corresponde par  $u$  à la métrique induite sur  $u(M)$  par  $\mathbb{R}^N$  muni du produit scalaire habituel, noté « . » ou ( , ).

Trois faits assez élémentaires permettent de réduire ce problème à un problème de *perturbation* :

i) Quitte à augmenter  $N$ , point n'est besoin de se préoccuper de l'injectivité de  $u$  (Ex. B.2.1).

ii) L'ensemble des métriques représentables sous la forme (2.1) (pour un certain  $N$ ), est dense dans l'ensemble des métriques  $C^\infty$  (Ex. B.2.2).

iii) Si  $u_j : M \rightarrow \mathbb{R}^{N_j}$  ( $j = 1, 2$ ) est de classe  $C^1$  et  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^{N_1 + N_2}$  est définie par  $u(x) = (t_1 u_1(x), t_2 u_2(x))$ , les métriques correspondantes vérifient  $g = t_1^2 g_1 + t_2^2 g_2$ .

Supposons alors qu'on sache résoudre (2.1) pour  $g$  voisine d'une certaine  $g_0$  : pour  $g$  quelconque, on choisit  $t_0$  tel que  $t_0^2 g_0 < g$ , puis on écrit  $g = t_0^2(g_0 + f) + (g - t_0^2 g_0 - t_0^2 f)$  ; il est possible de choisir  $f$  arbitrairement petit en sorte que  $g_2 = g - t_0^2 g_0 - t_0^2 f$  soit représentable sous la forme (2.1) pour  $u = u_2$ , à cause de ii) ; comme, par hypothèse,  $g_1 = g_0 + f$  est alors représentable par un certain  $u_1$ ,  $g$  est représentable, à cause de iii), par  $(t_0 u_1, u_2)$ .

Pour simplifier, nous admettrons ici (ce n'est du reste pas difficile) qu'on peut toujours se ramener (en plongeant  $M$  dans un tore convenable) au cas où en fait  $M = \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  est le tore à  $n$  dimensions. Ceci permet de disposer de coordonnées globales sur  $M$ , et donne un sens clair à (2.1).

## 2.2 Réduction à un problème de point fixe

On a vu en B.2.1 comment le problème du plongement isométrique pour  $M$  quelconque pouvait se réduire au problème suivant : « pour  $M = \mathbb{T}^n$ , et  $g$  voisine de  $g_0$  (à choisir), trouver  $u$  satisfaisant (2.1) ».

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème.

**THÉORÈME 2.2.** *Soit  $g_0$  la métrique induite par un plongement libre  $u_0$ . Pour tout  $\rho > 2$  ( $\rho \notin \mathbb{N}$ ) et toute métrique  $g$  de classe  $C^\rho$  voisine de  $g_0$ , il existe un plongement  $u$  de classe  $C^\rho$  solution du problème.*

On entend par « plongement libre » une application  $u_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  vérifiant :

$$\begin{aligned} &\text{les vecteurs } \partial_i u_0 (i = 1, \dots, n) \\ &\text{et } \partial_{ij}^2 u_0 (1 \leq i, j \leq n) \text{ sont indépendants.} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Il est facile d'établir qu'un tel  $u_0$  existe (Ex. B.2.3). Pour prouver le théorème, on pose  $u = u_0 + v$ ,  $g = g_0 + h$ , et les équations  $(\partial_i u, \partial_j u) = g_{ij}$  s'écrivent :

$$(\partial_i u_0, \partial_j v) + (\partial_j u_0, \partial_i v) + (\partial_i v, \partial_j v) = h_{ij}. \quad (2.2.2)$$

On utilise alors le lemme suivant.

LEMME. Si  $\Delta = \Sigma \partial_j^2$  désigne le laplacien sur  $M$ , on a l'identité

$$(1 - \Delta)(\partial_i v, \partial_j v) = \partial_i f_j(v) + \partial_j f_i(v) + r_{ij}(v),$$

où  $f_i(v) = -(\Delta v, \partial_i v)$ ,  $r_{ij}(v)$  étant un polynôme quadratique (à coefficients constants) en les dérivées  $\partial^\alpha v$ ,  $|\alpha| \leq 2$ .

Preuve : on a :

$$\begin{aligned} (1 - \Delta)(\partial_i v, \partial_j v) &= \\ &= -(\partial_i \Delta v, \partial_j v) - (\partial_i v, \partial_j \Delta v) + \text{polynôme quadratique en } \partial^\alpha v \\ &= -\partial_i(\Delta v, \partial_j v) - \partial_j(\partial_i v, \Delta v) + r_{ij}(v). \quad \square \end{aligned}$$

Les équations (2.2.2) peuvent donc s'écrire

$$\partial_j(\partial_i u_0, v) + \partial_j F_i(v) + \partial_i(\partial_j u_0, v) + \partial_i F_j(v) - 2(\partial_{ij}^2 u_0, v) = h_{ij} - R_{ij},$$

où l'on note  $F_i(v) = (1 - \Delta)^{-1} f_i(v)$ ,  $R_{ij} = (1 - \Delta)^{-1} r_{ij}$ , et il suffit de résoudre le système

$$\begin{aligned} (v, \partial_i u_0) &= -F_i(v) \\ (v, \partial_{ij}^2 u_0) &= \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

En désignant par  $M(u_0) w$  l'unique  $v$  combinaison linéaire des  $\partial_j u_0$ ,  $\partial_{ij}^2 u_0$  satisfaisant

$$(v, \partial_i u_0) = w_i, \quad (v, \partial_{ij}^2 u_0) = w_{ij} \quad (\text{grâce à (2.2.1)}),$$

le système (2.2.3) s'écrit finalement sous forme de « point fixe »

$$v = M(u_0) \left( \begin{array}{c} -F_i(v) \\ \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2} \end{array} \right) = G(v). \quad (2.2.4)$$

Il est immédiat que  $G$  applique  $C^\rho$  dans lui-même, car  $(1 - \Delta)^{-1}$ , opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $-2$ , applique  $C^{\rho-2}$  dans  $C^\rho$ . De plus, si  $R > 0$  est assez petit,  $G$  est une contraction stricte sur la boule  $B_R = \{v \in C^\rho, \|v\|_\rho \leq R\}$ , i.e.  $\|Gv\|_\rho \leq C \|v\|_\rho$  pour  $C < 1$  car  $f_i$  et  $r_{ij}$  sont quadratiques en  $v$ , d'où l'existence d'une solution de (2.2.4).  $\square$

En réalité, la réduction présentée ici n'a été que récemment découverte (voir [G]). Le problème du plongement isométrique a été résolu pour la première fois par NASH en 1956, à l'aide d'une technique d'itération, reprise par MOSER en 1961, connue désormais sous le nom de « méthode

de Nash-Moser ». Si cette technique s'est révélée finalement inutile pour résoudre le problème qui a nécessité son introduction, elle n'en demeure pas moins un outil fondamental pour l'étude des problèmes de perturbation. Nous la décrivons dans notre dernière partie, ainsi que ses applications au problème du plongement isométrique et au problème des perturbations des champs de vecteurs sur le tore.

## C LE THÉORÈME DE NASH-MOSER

### 1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte, et soit  $\Phi$  une application d'un ouvert  $U$  de  $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$  à valeurs dans  $C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ .

Rappelons tout d'abord quelques définitions de calcul différentiel. De façon générale, étant donné deux espaces vectoriels topologiques  $E_1$  et  $E_2$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $U$  un ouvert de  $E_1$ , on dira qu'une application continue  $\Phi : U \rightarrow E_2$  est de classe  $C^1$  s'il existe une application continue, linéaire en la seconde variable,

$$\begin{aligned} \Phi' : U \times E_1 &\rightarrow E_2 \\ (u, v) &\mapsto \Phi'(u) \cdot v \end{aligned}$$

telle que

$$\forall u \in U, \forall v \in E_1, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi(u + tv) - \Phi(u)) = \Phi'(u) \cdot v.$$

Les applications de classe  $C^k$  pour  $k \geq 2$  sont alors définies par récurrence, i.e.  $\Phi$  est  $C^k$  si  $\Phi'$  est  $C^{k-1}$ , et l'on note, comme toujours,

$$\Phi^{(k)}(u) \cdot (v_1, \dots, v_k) = \frac{\partial^k}{\partial t_1 \dots \partial t_k} \Phi(u + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) \Big|_{t_1 = \dots = t_k = 0}.$$

Le lecteur attentif aura remarqué que, si l'on se restreint aux cas des espaces normés, on n'obtient pas la notion classique d'application  $C^k$ , mais une notion un peu plus large. Notre propos ne visant pas de telles distinctions, nous nous bornerons à faire observer que la notion introduite ici est à la fois maniable et aisément vérifiable dans tous les exemples classiques de fonctionnelles sur l'espace  $C^\infty$ .

Cette parenthèse étant fermée, revenons à notre problème : on suppose  $\Phi$  de classe  $C^k$ , et on se propose de résoudre l'équation

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + f, \quad (*)$$

où  $u_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$  est donnée, et  $f$  est une « petite » perturbation, donnée également.

Les situations typiques où l'on sera amené à utiliser la méthode de Nash-Moser sont celles où la résolution de l'équation linéarisée

$$\Phi'(u)v = g \quad (**)$$

ne peut se faire qu'avec une grande « perte de dérivées ». Pour mesurer cette perte, on va considérer non pas un seul espace de Banach comme dans le cas des parties A et B, mais une famille décroissante  $A_s$  ( $0 \leq s < +\infty$ ) de tels espaces, munis de normes  $|\cdot|_s$ , d'intersection  $\cap A_s = C^\infty$ . Les exemples les plus usuels sont  $A_s = C^s$  (espaces de Hölder), ou  $A_s = H^s$  (espaces de Sobolev), que l'on définit sur  $M$  à l'aide de cartes.

Supposons qu'on dispose d'une solution  $v$  de  $\Phi'(u)v = g$  (notée  $v = \psi(u)g$ ) vérifiant, pour un certain  $u$  fixé, une estimation de la forme

$$|v|_s \leq C |g|_{s+r},$$

pour tout  $s$  (dans un intervalle fini),  $r$  étant un nombre fixe. On dit dans ce cas que la résolution de l'équation se fait avec « perte de  $r$  dérivées » (pour une famille quelconque d'espaces  $A_s$ , cette expression peut n'avoir aucun sens, mais peu importe).

En réalité, nous verrons qu'il est possible de ne manipuler que des fonctions  $C^\infty$  au cours du processus de résolution de (\*): il ne s'agit donc pas d'une perte dans la régularité de la fonction  $v$ , comparée à celle de  $g$ , mais d'une perte *d'information* sur cette régularité.

Si l'on suppose au départ une information sur  $|u_0|_s$  dans un intervalle d'indice  $s \in [0, s_+]$ , l'intervalle d'information sera  $[0, s_+ - r]$  pour  $u_1$ ,  $[0, s_+ - 2r]$  pour  $u_2$  etc... (où  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \rightarrow u$  sont les approximations successives obtenues pour  $u$ ) avec bientôt perte de toute information.

Qui plus est, cette « perte de résolution »  $r$  se double d'une perte  $r'$  due au « coût » de la résolution de (\*\*) en information sur les coefficients de l'équation, c'est-à-dire sur  $u$ . Supposons par exemple que  $v = \psi(u)g$  satisfasse une estimation de la forme

$$|v|_s \leq C (|g|_{s+r} + |g|_r (1 + |u|_{s+r'})) \quad (***)$$

pour tout  $s$ , avec  $r$  et  $r'$  fixes. Comme la méthode utilisée est la « méthode de Newton » (légèrement modifiée), qui utilise  $\Phi'(u_n)$  pour calculer  $u_{n+1}$ , la solution d'une étape devient le coefficient de la suivante, et la perte  $r'$  s'ajoute à  $r$  pour diminuer l'intervalle d'information.

C'est le caractère de cette double perte en dérivées, relativement à la famille  $A_s$ , qui décide de l'applicabilité du théorème de Nash-Moser: en gros, il est suffisant que les pertes  $r$  et  $r'$  soient fixes et l'on dit alors que (\*\*\*) est une « estimation douce ». Il faut prendre garde que cette douceur

dépend de la famille  $A_s$ , choisie : face à un problème donné, il n'est pas toujours possible de savoir si une telle famille existe, et si une famille est connue, rien ne prouve qu'une autre ne conduirait pas à des pertes moindres, voire à l'application d'un théorème de point fixe ordinaire.

Nous discuterons le phénomène de la « perte de dérivées » sur deux exemples classiques (paragraphe C.2), tandis qu'au paragraphe C.3 on verra pourquoi beaucoup d'opérations non linéaires sont susceptibles d'estimations douces dans les espaces usuels.

Enfin, au paragraphe C.4 on décrira le processus de résolution de (\*), qui est un schéma de Newton combiné à une régularisation des fonctions.

## 2 DEUX EXEMPLES CLASSIQUES

### 2.1 Perturbation d'un champ constant sur le tore

Sur le tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ , nous utilisons comme coordonnées locales celles de  $\mathbb{R}^n$ . On considère le champ constant  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , que nous perturbons par le champ  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , supposé « petit ». On veut savoir si l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = \omega + f(x)$  des courbes intégrales du champ  $\omega + f$  équivaut à  $\frac{dx}{dt} = \omega$ , l'équation pour le champ non perturbé.

Plus précisément, existe-t-il un difféomorphisme  $U : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ , voisin de l'identité tel que  $U'(U^{-1}) \omega = \omega + f$ ? (Nous écrirons  $U = \text{id} + u$ , avec  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  petit, étant entendu que  $u(x)$  sera identifié à son image dans  $\mathbb{T}^n$  par l'application canonique  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ .)

Déjà, pour  $n = 1$ , et  $f = \text{Cte}$ , c'est impossible si  $f \neq 0$  : il faut imposer à  $f$  une condition intégrale convenable. On introduit à cet effet  $n$  champs  $p_1, \dots, p_n \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$  tels que  $\int_{\mathbb{T}^n} p_j dx$  soient indépendants, et on pose, pour  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $U = \text{id} + u$ ,

$$\Phi(u, t) = U'(U^{-1}) \omega + \sum t_j p_j.$$

L'équation (\*) qu'on va résoudre est alors

$$\Phi(u, t) = \Phi(0, 0) + f,$$

et elle signifie que  $U$  conjugue  $\omega$  en  $\omega + f - \sum t_j p_j$ .

On prouvera donc au paragraphe 4 le théorème suivant :

**THÉORÈME.** *Il existe un voisinage  $W$  de 0 dans  $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$  tel que, pour tout champ  $f \in W$ , il existe  $t \in \mathbb{R}^n$  près de 0 et un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^n$  proche de l'identité qui conjugue  $\omega + f - \sum t_j p_j$  à  $\omega$ .*

Décrivons ici la « perte de dérivées » pour ce problème.

a) Calculons  $\Phi'(0, 0)(v, t)$  : avec ici  $U = \text{id} + v$ , on a

$$\begin{aligned}\Phi(v, t) - \Phi(0, 0) &= U'(U^{-1}) \omega + \sum t_j p_j - \omega \\ &= v'(U^{-1}) \omega + \sum t_j p_j \\ &= v'(\omega) + \sum t_j p_j + \text{termes quadratiques en } v,\end{aligned}$$

d'où  $\Phi'(0, 0)(v, t) = \omega(v) + \sum t_j p_j$ ,  $\omega(v)$  désignant l'action du champ  $\omega$  dérivant  $v$  ( $\omega(v) = \sum \omega_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$ ).

b) Pour résoudre sur  $\mathbb{T}^n$  l'équation à coefficients constants  $\omega(v) = h$ , on développe les deux membres en série de Fourier :

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle}, \quad v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} v_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle}.$$

L'équation devient

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad h_k = 2i\pi \langle k, \omega \rangle v_k.$$

En particulier, il est nécessaire d'avoir  $h_0 = 0$  ( $\int_{\mathbb{T}^n} h \, dx = 0$ ) ; dans le cas présent de l'équation  $\Phi'(0, 0)(v, t) = g \Leftrightarrow \omega(v) = g - \sum t_j p_j = h$ , cette condition s'écrit  $\int_{\mathbb{T}^n} g \, dx = \sum t_j \int_{\mathbb{T}^n} p_j \, dx$ , et est satisfaite par un unique choix des  $t_j$ . Les  $t_j$  étant ainsi choisis, on suppose dorénavant

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \neq 0 \Rightarrow \langle k, \omega \rangle \neq 0. \quad (2.1.1)$$

Sous cette hypothèse, il existe un choix unique de  $v_k$  donné par

$$v_0 = 0, \quad v_k = \frac{1}{2i\pi} \frac{h_k}{\langle k, \omega \rangle} \quad (k \neq 0).$$

Néanmoins, malgré (2.1.1), les nombres  $\langle k, \omega \rangle$  peuvent être très petits : on les appelle des « petits diviseurs ».

c) Discutons l'hypothèse (2.1.1). Il est classique (Ex. C.2.1) qu'elle équivale à la densité, sur  $\mathbb{T}^n$ , de chaque courbe solution de  $\frac{dx}{dt} = \omega$ .

Par ailleurs, en vue d'obtenir un contrôle raisonnable des  $v_k$ , on désire renforcer (2.1.1) en

$$\exists \tau > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \neq 0, \quad |\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{C}{|k|^\tau}. \quad (2.1.1')$$

C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME. Si  $\tau > n - 1$ , pour presque tout  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $C = C_\omega$  telle que (2.1.1') soit vérifiée.

Preuve : soit  $B$  une boule fixe, et  $B_{k, \varepsilon} = \{ \omega \in B, |\langle k, \omega \rangle| \leq \varepsilon |k|^{-\tau} \}$ . Comme  $\text{mes}(B_{k, \varepsilon}) \leq C \varepsilon |k|^{-\tau-1}$ ,  $\text{mes} \left( \bigcup_{k \neq 0} B_{k, \varepsilon} \right) \leq C \varepsilon \sum |k|^{-\tau-1} \leq C \varepsilon$ , et donc

$$\text{mes} \left( \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{k \neq 0} B_{k, \varepsilon} \right) = 0.$$

□

d) Estimons alors  $v$  : on peut écrire

$$v = h_s * E,$$

où

$$h_s = \sum_{k \neq 0} |k|^s h_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle},$$

et

$$E(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2i\pi} e^{2i\pi \langle k, x \rangle} \frac{1}{\langle k, \omega \rangle |k|^s}.$$

Si  $E$  est intégrable, on a, en normes höldériennes, par un calcul direct sur  $h_s * E$ ,  $\|v\|_a \leq C \|h_s\|_a$ , et d'autre part  $\|h_s\|_a \leq C \|h\|_{a+s}$ , car  $h_s = \left( \frac{|D_x|}{2\pi} \right)^s h$  (voir Ex. A.2).

Enfin, le lemme suivant (Ex. C.2.2) indique pour quelles valeurs de  $s$  la fonction  $E$  est intégrable :

LEMME. Si  $\omega$  vérifie (2.1.1'), et si  $s > \tau > n - 1$ , alors

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|\langle k, \omega \rangle| |k|^s} < +\infty,$$

et  $E$  est continue.

En résumé, on a obtenu l'estimation suivante : si  $s > \tau$ , pour tout  $g$ , il existe une solution  $(v, t)$  de l'équation linéarisée de (\*) en 0,  $\phi'(0, 0)(v, t) = g$  satisfaisant

$$\|v\|_a + |t| \leq C \|g\|_{a+s}. \tag{2.1.2}$$

Dans cet exemple, on voit que la « perte de résolution » peut être extrêmement grande, et dépend du choix de  $\omega$ , à travers les valeurs des « petits diviseurs »  $\langle k, \omega \rangle$ .

## 2.2 L'exemple du plongement isométrique traité par la technique de Nash-Moser

Malgré la solution « simple » du problème discuté au paragraphe B.2, il nous a paru instructif d'indiquer ici la méthode originale de Nash.

L'équation à résoudre est, d'après B.2,

$$\phi(u) = \phi(u_0) + f, \quad (*)$$

où  $\phi(u) = 'u' u'$ ,  $u_0$  étant un plongement libre.

La différentielle de  $\phi$  en  $u$  est

$$\phi'(u)v = 'u'v' + 'v'u'.$$

Pour résoudre l'équation  $\phi'(u)v = g$  (où  $g$  est symétrique), on impose l'équation supplémentaire  $'u''v = 0$ , qui par dérivation donne  $'u''v + 'u'v' = 0$ ; il suffit donc de choisir  $v$  satisfaisant  $'u''v = 0$  et  $'u''v = -\frac{g}{2}$ : si  $u$  est proche de  $u_0$ , ces équations forment un système linéaire de rang maximal, dont la solution est unique si l'on choisit  $v$  dans l'espace engendré par les vecteurs (indépendants)  $\partial_j u$ ,  $\partial_{jk}^2 u$ .

La solution de  $\phi'(u)v = g$  est alors de la forme  $v = M(u)g$ , où  $M(u)$  est une matrice dont les coefficients sont des opérateurs du second ordre appliqués à  $u$ .

Ici, la « perte de dérivées »  $r' = 2$  provient de la présence de données dans les coefficients de l'équation linéarisée; d'après la proposition A.2.1.1 du chapitre II, on a l'estimation

$$\|v\|_s \leq C_s (\|g\|_s + \|g\|_0 \|u\|_{s+2}). \quad (2.2.1)$$

## 3 ESTIMATIONS DOUCES

Nous introduisons tout d'abord le concept d'application douce.

### 3.1 Applications douces

Rappelons qu'un voisinage de  $u_0 \in C^\infty(M)$  est un voisinage dans  $C^\mu$ , pour un certain  $\mu$ ; on l'appellera aussi  $\mu$ -voisinage de  $u_0$ .

DÉFINITION. Soit  $u \mapsto \Phi(u)$  une application continue d'un ouvert  $U$  de  $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ . On dira que  $\Phi$  est douce si, pour chaque  $u_0 \in U$ , il existe un voisinage  $V$  de  $u_0$ , des nombres  $b \geq 0$  et  $r \geq 0$ , et des constantes  $C_s$  tels que

$$\forall u \in V, \forall s \geq b, \quad |\Phi(u)|_s \leq C_s (1 + |u|_{s+r}).$$

On notera que l'estimation n'a pas lieu dans tout  $U$ , mais dans  $V$ , les nombres  $C_s$ ,  $b$  et  $r$  pouvant dépendre de  $u_0$  et  $V$ .

Pour simplifier, la définition n'a été donnée que pour des applications sur  $C^\infty(M)$ ; elle s'étend de façon évidente à des espaces plus généraux du même type [H8], [H9]. Nous laissons en exercices (Ex. C.3.1 et C.3.2) les deux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 3.1.1. La composée de deux applications douces est douce.

PROPRIÉTÉ 3.1.2. Si  $\Phi$  est linéaire et douce, il existe  $C_s$ ,  $b$  et  $r$  tels que

$$\forall u \in C^\infty, s \geq b, \quad |\Phi(u)|_s \leq C_s |u|_{s+r}.$$

Le point crucial dans la définition d'une application douce est qu'on exige une estimation *linéaire* en norme  $|u|_{s+r}$ , bien qu'en général  $\Phi$  soit « non linéaire ». De plus, cette estimation a lieu pour tout  $s$ , sous la seule condition  $u \in V$ , qui ne met en jeu qu'un nombre fini de dérivées de  $u$ .

*Exemple.* Soit  $F$  une fonction  $C^\infty$  de ses arguments, et posons

$$\Phi(u) = F(x, u, \dots, u^{(\alpha)}, \dots), \quad \text{où } u^{(\alpha)} = \partial_x^\alpha u, \quad |\alpha| \leq m,$$

$u$  étant une fonction réelle  $C^\infty$  sur  $M$ .

L'application  $\Phi$  est douce, car pour tout  $u_0$ , dans une  $C^m$ -boule autour de  $u_0$ , on a, d'après le chapitre II, proposition A.2.2, l'estimation  $(s \geq 0) |\Phi(u)|_s \leq C_s (1 + |u|_{s+m})$  (en normes  $C^s$  et en normes  $H^s$ ).

Nous allons voir qu'en fait beaucoup d'applications non linéaires naturelles sont douces.

### 3.2 Quelques applications douces naturelles

Nous avons déjà vu (chapitre II, propositions A.2.1.1 et A.2.2) que le produit  $uv$  et la composition  $F(u)$  ( $F \in C^\infty$ ) sont doux pour les deux familles des espaces de Hölder et de Sobolev.

Deux autres cas sont utiles dans la pratique (voir la remarque A.1.5 du chapitre II sur les espaces de Hölder d'indice entier).

PROPOSITION 3.2.1. Si  $\alpha \geq 1$  et  $u, v \in C^\alpha$ , alors  $u \circ v \in C^\alpha$  et

$$\|u \circ v\|_\alpha \leq C (\|u\|_\alpha \|v\|_1^\alpha + \|u\|_1 \|v\|_\alpha + \|u\|_0). \quad (3.2.1)$$

*Preuve :* on a :

$$\begin{aligned} \|u \circ v\|_\alpha &\leq \|u\|_0 + \|(u' \circ v) v'\|_{\alpha-1} \\ &\leq C (\|u\|_0 + \|u' \circ v\|_{\alpha-1} \|v'\|_0 + \|u' \circ v\|_0 \|v'\|_{\alpha-1}), \end{aligned}$$

d'après l'inégalité pour le produit de deux fonctions. Le dernier terme est borné par  $\|u\|_1 \|v\|_\alpha$ . Si  $\alpha \leq 2$ ,  $\|u' \circ v\|_{\alpha-1} \leq C \|u\|_\alpha \|v\|_1^{\alpha-1}$ , d'où la proposition dans ce cas. Si  $\alpha > 2$ , en supposant (3.2.1) déjà prouvée pour  $\alpha - 1$ , on trouve

$$\begin{aligned} \|u' \circ v\|_{\alpha-1} \|v\|_0 &\leq \\ &\leq C (\|u'\|_{\alpha-1} \|v\|_1^\alpha + \|u'\|_1 \|v\|_{\alpha-1} \|v\|_1 + \|u'\|_0 \|v\|_1), \end{aligned}$$

et il reste à majorer le terme central. Or, par convexité (chapitre II, paragraphe A.1.5)

$$\begin{aligned} \|u\|_2 \|v\|_{\alpha-1} \|v\|_1 &\leq \\ &\leq C \left( \|u\|_1^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \|u\|_\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) \left( \|v\|_1^{\frac{1}{\alpha-1}} \|v\|_\alpha^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \right) \|v\|_1 \\ &\leq C (\|u\|_1 \|v\|_\alpha)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} (\|u\|_\alpha \|v\|_1)^\frac{1}{\alpha-1}; \end{aligned}$$

comme  $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq C(a+b)$ , on obtient (3.2.1).  $\square$

**PROPOSITION 3.2.2** Soient  $B_1$  et  $B_2$  des compacts convexes de  $\mathbb{R}^n$ , et  $u : B_1 \rightarrow B_2$ ,  $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $f(u(x)) = x$  pour  $x \in B_1$ . Pour  $\alpha \geq 1$ , on a

$$\|u\|_\alpha \leq C \|f\|_\alpha, \quad (3.2.2)$$

où  $C$  ne dépend que de  $\alpha$  et d'une borne de  $\|u\|_1$ ,  $\|f\|_1$ .

*Preuve :* on a  $f'(u(x)) u'(x) = \text{id}$ , donc  $u' = (f' \circ u)^{-1}$  : comme l'application  $A \mapsto A^{-1}$  ( $A$  matrice inversible) est  $C^\infty$ , on a

$$\|u\|_\alpha \leq \|u\|_0 + \|u'\|_{\alpha-1} \leq C(1 + \|f' \circ u\|_{\alpha-1}) \leq C \|f' \circ u\|_{\alpha-1},$$

car de toutes façons  $\|f'\|_0 \geq \text{Cte} > 0$ . De plus, en appliquant les définitions,

$$\|f' \circ u\|_{\alpha-1} \leq C(1 + \|f'\|_{\alpha-1} \|u\|_1^{\alpha-1}) \leq C \|f\|_\alpha \quad \text{si } \alpha - 1 \leq 1,$$

d'où (3.2.2) dans ce cas. Si  $\alpha > 2$ , la proposition 3.2.1 donne

$$\|f' \circ u\|_{\alpha-1} \leq C (\|f'\|_{\alpha-1} \|u\|_1^{\alpha-1} + \|f'\|_1 \|u\|_{\alpha-1} + \|f\|_1),$$

et le terme du milieu s'estime par récurrence par  $\|f\|_2 \|f\|_{\alpha-1}$  : le même calcul « par convexité » qu'à la proposition 3.2.1 donne alors l'estimation.  $\square$

### 3.3 Solutions d'équations différentielles

La solution d'un système d'équations différentielles, considérée comme une fonction des données et des coefficients, se trouve être une application douce.

Nous illustrons ce fait remarquable (d'énoncé volontairement vague) par deux exemples élémentaires et précis.

#### 3.3.1 Un calcul explicite

PROPOSITION 3.3.1 Soit  $C_{2\pi}^\infty$  l'espace des fonctions  $C^\infty$   $2\pi$ -périodiques. Supposons  $f \in C_{2\pi}^\infty$ ,  $c = \int_0^{2\pi} f \, dx \neq 0$ , et considérons l'équation différentielle  $y' + fy = k$ , où  $k \in C_{2\pi}^\infty$ . Il existe une unique solution  $y \in C_{2\pi}^\infty$  de cette équation, et l'application  $(f, k) \mapsto y$  est douce (en munissant  $C_{2\pi}^\infty$  des normes  $C^s$ ,  $s \geq 0$ ).

Preuve : on calcule tout ; si  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , on pose  $y = e^{-F} z$ , et l'équation devient  $z' = k e^F$ , d'où la solution générale  $y = C e^{-F} + e^{-F} \int_0^t e^{F(x)} k(x) \, dx$ . La condition  $y(0) = y(2\pi)$  s'écrit

$$C = C e^{-c} + e^{-c} \int_0^{2\pi} e^F k \, dx, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{e^c - 1} \int_0^{2\pi} e^F k \, dx.$$

La formule explicite obtenue pour  $y$  avec ce choix de  $C$  définit en fait une application  $\tilde{S}$  de l'ouvert  $U \subset C^\infty([0, 2\pi])$  où  $\int_0^{2\pi} f \, dx \neq 0$  dans  $C^\infty([0, 2\pi])$ , qui est douce en tant que composée d'applications douces :  $f \mapsto F$ ,  $F \mapsto e^{-F}$  etc... d'après la proposition 3.1.1. La restriction  $\tilde{S}|_{C_{2\pi}^\infty}$ , qui applique  $C_{2\pi}^\infty$  dans lui-même, est donc douce également.

#### 3.3.2 Une estimation a priori

Contrairement à l'exemple précédent où l'on « constatait » sur une formule explicite la douceur de la solution, on va obtenir ici une estimation directement à partir de l'équation elle-même. Ce procédé est très important, car il s'étend à de larges classes d'équations aux dérivées partielles : systèmes elliptiques sur une variété compacte, problèmes « aux limites » de toutes sortes, etc...

PROPOSITION 3.3.2 Soit  $A(t)$  une matrice  $(n \times n)$   $C^\infty$  sur  $[a, b]$ . On considère le système  $Y' + AY = k$ , où  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  et vérifie la condition initiale  $Y(a) = Y_0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a l'estimation

$$\|Y\|_{n+1} \leq C(\|k\|_n + (\|k\|_0 + |Y_0|)(1 + \|A\|_n)), \quad (3.3.2)$$

où  $C$  ne dépend que de  $\|A\|_0$ .

*Preuve :*

a) Montrons d'abord l'inégalité  $\|Y\|_0 \leq C(\|k\|_0 + |Y_0|)$ . A cet effet, on introduit un « poids »  $e^{-\lambda t}$ , comme au chapitre II, section C, et l'on pose  $\|Y\| = \|e^{-\lambda t} Y\|_0$ . L'équation s'écrit :

$$Y(t) = Y_0 + \int_a^t [k(s) - A(s) Y(s)] ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda t} Y(t)| &\leq \\ &\leq e^{-\lambda t} |Y_0| + e^{-\lambda t} \int_a^t |k(s)| ds + e^{-\lambda t} \int_a^t e^{\lambda s} |A(s)| e^{-\lambda s} |Y(s)| ds \end{aligned}$$

soit

$$\|Y\| \leq C_\lambda |Y_0| + C_\lambda \|k\|_0 + \|A\|_0 \|Y\| \sup_t \left( e^{-\lambda t} \int_a^t e^{\lambda s} ds \right).$$

Comme ce « sup » est majoré par  $1/\lambda$ , le choix  $\lambda = 2\|A\|_0$  conduit à l'estimation voulue, et à (3.3.2) pour  $n = 0$  en utilisant l'équation.

b) On suppose (3.3.2) prouvée pour  $n - 1$  : l'équation donne

$$\begin{aligned} \|Y\|_{n+1} &= \|Y\|_0 + \|Y'\|_n \leq \|k\|_n \\ &\quad + C(\|A\|_0 \|Y\|_n + \|Y\|_0 (1 + \|A\|_n)) \leq \|k\|_n \\ &\quad + C\{\|k\|_{n-1} + (\|k\|_0 + |Y_0|)(1 + \|A\|_{n-1})\} \\ &\quad + C\{(\|k\|_0 + |Y_0|)(1 + \|A\|_n)\}, \quad \square \end{aligned}$$

d'où (3.3.2) pour  $n$ .

### 3.4 Retour sur les exemples classiques

a) Dans le cas de l'exemple du paragraphe C.2.1, on a seulement calculé  $\Phi'(0, 0)$ . Indiquons comment trouver  $\Phi'(u, s)(v, t)$  : considérons la courbe  $U_\theta = \text{id} + u + \theta v$  qui a pour tangente  $v$  au point  $\text{id} + u$  correspondant à  $\theta = 0$  ; il faut calculer  $\frac{d}{d\theta} \{\Phi(u + \theta v, s + \theta t)\}$  en  $\theta = 0$ , avec

$$\Phi(u + \theta v, s + \theta t) = U'_\theta(U_\theta^{-1}) \omega + \sum (s_j + \theta t_j) p_j.$$

Posons  $U_\theta = U_0 \circ T_\theta$ . Alors  $T_0 = \text{id}$ , et  $v = \dot{U}_0 = U'_0 \dot{T}_0$ , le « . » indiquant la différentiation en  $\theta$ . Comme  $U'_\theta(U^{-1}) \omega = U_{\theta*} \omega = U_{0*} T_{\theta*} \omega$ , on a

$$\dot{U}_{\theta*} \omega = U_{0*} \dot{T}_{\theta*} \omega ,$$

et d'autre part, en prenant la dérivée en  $\theta = 0$  de l'identité

$$(T_{\theta*} \omega)(T_\theta(x)) = T'_\theta(x) \cdot \omega ,$$

on obtient

$$\dot{T}_{0*} \omega(x) = \dot{T}'_0(x) \cdot \omega ,$$

puisque  $\omega$  est constant. Finalement

$$\Phi'(u, s)(v, t) = U_{0*} \dot{T}'_0 \omega + \sum t_j p_j, \text{ avec } \dot{T}'_0 \omega = \omega (\dot{T}_0) = \omega (U'_0{}^{-1} v) .$$

On en déduit la résolution de l'équation  $\Phi'(u, s)(v, t) = g$  et l'estimation

$$\|v\|_a + |t| \leq C_a (\|g\|_{s+a} + \|g\|_0 \|u\|_{s+a+1}) , \quad (3.4.1)$$

où le nombre  $s$  est le même qu'au paragraphe C.2.1.

On constate que là encore, l'estimation de la solution  $(v, t)$  en terme de la donnée  $g$  et des « coefficients »  $(u, s)$ , est douce.

Compte tenu de cette estimation, le théorème énoncé au paragraphe C.2 est une conséquence du théorème de Nash-Moser énoncé ci-après.

b) De même, la résolution de l'équation linéarisée  $\phi'(u) v = g$  du problème du plongement isométrique (cf. paragraphe C.2.2) conduit à une solution  $v$  dépendant de la donnée  $g$  et des « coefficients »  $u$  selon l'estimation douce (linéaire en  $g$ ): si  $u$  est dans un  $C^2$  voisinage de  $u_0$ , pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\|v\|_s \leq C_s (\|g\|_s + \|g\|_0 \|u\|_{s+2}) .$$

### 3.5 Conclusion

L'hypothèse principale du théorème de Nash-Moser est précisément le fait que  $\Phi$  et  $\psi$  sont douces : c'est là une hypothèse raisonnable, comme le montrent les énoncés généraux des paragraphes C.3.1 à C.3.3, ainsi que l'étude de l'exemple « historique », réalisée aux paragraphes C.2 et C.3.4.

## 4 LE THÉORÈME DE NASH-MOSER

Nous nous plaçons ici dans l'espace  $C^\infty(M)$ ,  $M$  variété compacte, la famille d'espaces considérée étant celle des espaces de Hölder, munis des

normes  $\| \cdot \|_s$ . Soit  $u_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ , et soit  $\Phi$  définie dans un  $\mu$ -voisinage de  $u_0$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$  (pour un certain  $\mu$ ) à valeur dans  $C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ . On fait les deux hypothèses suivantes :

( $\mathcal{H}_1$ ) :  $\Phi$  est de classe  $C^2$  (au sens faible expliqué en C.1) dans un  $\mu$ -voisinage de  $u_0$ , et satisfait à l'estimation douce

$$\| \Phi''(u)(v_1, v_2) \|_\alpha \leq C \left\{ \|v_1\|_a \|v_2\|_a (1 + \|u\|_{\alpha+b}) + \|v_1\|_a \|v_2\|_{\alpha+c} + \|v_2\|_a \|v_1\|_{\alpha+c} \right\}$$

pour certains nombres  $a, b, c \geq 0$ , et tout  $\alpha \geq 0$ .

( $\mathcal{H}_2$ ) : Pour  $u$  dans  $\mu'$ -voisinage de  $u_0$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ , il existe une application linéaire  $\psi(u) : C^\infty(M, \mathbb{R}^q) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$  telle que  $\Phi'(u) \psi(u) = \text{id}$ , satisfaisant à l'estimation douce

$$\| \psi(u) g \|_\alpha \leq C \left\{ \|g\|_{\alpha+\lambda} + \|g\|_\lambda (1 + \|u\|_{\alpha+d}) \right\},$$

pour des nombres  $\lambda, d \geq 0$  et tout  $\alpha \geq 0$ .

Remarquons qu'a priori  $\Phi$  et  $\psi$  ne sont définies que sur des fonctions  $C^\infty$ . Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Nash-Moser.

**THÉORÈME.** Soit  $\Phi$  satisfaisant ( $\mathcal{H}_1$ ) et ( $\mathcal{H}_2$ ), et soit  $\alpha$  tel que  $\alpha \geq \mu, \alpha \geq \mu', \alpha \geq d, \alpha > \lambda + a + c, \alpha > a + 1/2 \sup(\lambda + b, 2a), \alpha \notin \mathbb{N}$ . Alors

i) Il existe un  $(\alpha + \lambda)$ -voisinage  $W$  de l'origine tel que pour  $f \in W$ , l'équation

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + f \quad (*)$$

possède une solution  $u = u(f) \in C^\alpha$ . De plus,

$$\|u(f) - u_0\|_\alpha \leq C \|f\|_{\alpha+\lambda}.$$

ii) S'il existe  $\alpha' > \alpha$  non entier tel que  $f \in W \cap C^{\alpha'+\lambda}$ , alors la solution construite  $u(f)$  appartient à  $C^{\alpha'}$ , avec l'estimation correspondante. En particulier, si  $f \in W \cap C^\infty$ , alors  $u(f) \in C^\infty$ .

Ici, l'équation (\*) signifie qu'il existe une suite  $u_j \in C^\infty(M)$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $u_j \rightarrow u$  dans  $C^{\alpha-\varepsilon}$ , et  $\Phi(u_j) \rightarrow \Phi(u_0) + f$  dans  $C^{\alpha+\lambda-\varepsilon}$ .

#### 4.1 Schéma de résolution

Comme nous l'avons dit au paragraphe C.1, ce schéma est un schéma de Newton combiné à une régularisation des fonctions considérées.

a) Un « pur » schéma de Newton signifierait ici la chose suivante.

Supposons définis  $u_0, \dots, u_n$  et cherchons à définir  $u_{n+1}$  par  $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$ . Pour  $k \leq n$ , écrivons, avec  $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ ,

$$\phi(u_{k+1}) = \phi(u_k) + \phi'(u_k) \Delta u_k + \varepsilon_k,$$

ce qui définit l'« erreur quadratique »  $\varepsilon_k$  (à ce point, seuls  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$  sont en fait connus).

Nous allons choisir  $\Delta u_n$  satisfaisant à  $\phi'(u_n) \Delta u_n = \gamma_n$ ,  $\gamma_n$  étant à déterminer en sorte que  $\varepsilon_n$  mesure l'écart entre  $\phi(u_{n+1})$  et le but cherché  $\phi(u_0) + f$ .

En sommant les équations ci-dessus, on obtient (avec  $\gamma_k = \phi'(u_k) \Delta u_k$ ):

$$\phi(u_{n+1}) = \phi(u_0) + \sum_0^n \gamma_k + \sum_0^n \varepsilon_k;$$

$\gamma_n$  sera donc défini par

$$\sum_0^n \gamma_k + E_n = f \tag{4.1}$$

où  $E_n = \sum_0^{n-1} \varepsilon_k$  est l'« erreur accumulée », en sorte que

$$\phi(u_{n+1}) = \phi(u_0) + f + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \gamma_n = f + \phi(u_0) - \phi(u_n).$$

Puisqu'on s'attend à trouver  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , cette équation donne formellement (\*).

b) On a vu qu'un tel schéma est impraticable, car « l'intervalle d'information » sur  $\Delta u_n$  se rétrécit comme une peau de chagrin, avec les conséquences que l'on sait.

On introduit alors les opérateurs d'approximation  $S_\theta$  qui ont été définis et étudiés au chapitre II, paragraphe A.1.6, et qui jouissent des propriétés suivantes ( $\theta \geq 1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  dans un intervalle borné):

- i)  $\|S_\theta u\|_\beta \leq C \|u\|_\alpha, \beta \leq \alpha$
- ii)  $\|S_\theta u\|_\beta \leq C \theta^{\beta-\alpha} \|u\|_\alpha, \beta \geq \alpha$
- iii)  $\|u - S_\theta u\|_\beta \leq C \theta^{\beta-\alpha} \|u\|_\alpha, \beta \leq \alpha$
- iv)  $\left\| \frac{d}{d\theta} S_\theta u \right\|_\beta \leq C \theta^{\beta-\alpha-1} \|u\|_\alpha$  pour tout  $\beta$ .

On choisit une suite  $\theta_n = (\theta_0^{1/\varepsilon} + n)^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $\theta_0 \geq 1$  à choisir), et l'on décompose la « perturbation »  $f$  en

$$f = S_{\theta_0} f + \sum_{k \geq 0} \Delta_k \dot{f}_k,$$

$$\Delta_k = \theta_{k+1} - \theta_k, \quad \dot{f}_k = \frac{1}{\Delta_k} (S_{\theta_{k+1}} - S_{\theta_k})(f).$$

Remarquons que si l'on avait choisi  $\theta_n = C2^n$ , on aurait obtenu l'habituelle décomposition de Littlewood-Paley de  $f$  (voir chapitre II, paragraphe A.1). Le choix d'un pas  $\Delta_k$  plus petit permet, comme on le verra (paragraphe C.4.3 b)), une discussion plus fine ; mais la propriété fondamentale du bloc  $\dot{f}_k$  demeure, à savoir, pour tout  $s$ ,

$$\|\dot{f}_k\|_s = \left\| \frac{1}{\Delta_k} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{d}{d\theta} S_\theta f \, d\theta \right\|_s \leq C \theta_k^{s-\alpha-1} \|f\|_\alpha. \quad (4.2)$$

Maintenant, au lieu de chercher, comme en  $a)$ , à atteindre du premier coup  $u_1$  le but  $\Phi(u_0) + f$ , on procède par petites étapes, visant  $\Phi(u_0) + S_{\theta_0} f$  seulement avec  $u_1$ , puis  $\Phi(u_0) + S_{\theta_1} f$  avec  $u_2$  etc... A chaque étape, et c'est là l'innovation fondamentale, au lieu de résoudre  $\Phi'(u_n) \Delta u_n = *$ , on résout  $\Phi'(v_n) \Delta u_n = *$ , où  $v_n = S_{\theta_n} u_n$ .

Le schéma est donc le suivant : à nouveau, supposons définis  $u_0, u_1, \dots, u_n$  et cherchons à définir  $u_{n+1}$  par  $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$ ,  $\Delta u_n = \psi(v_n) \gamma_n$  (c'est la solution dont on dispose pour  $\Phi'(v_n)$ ),  $\gamma_n$  à déterminer. On pose de même, pour  $k \leq n-1$ ,

$$u_{k+1} - u_k = \Delta u_k = \psi(v_k) \gamma_k.$$

Comme en  $a)$ , on écrit pour  $k \leq n$ ,

$$\Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k) = \gamma_k + \varepsilon_k,$$

où, cette fois,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon'_k + \varepsilon''_k \\ \varepsilon'_k &= \{ \Phi'(u_k) - \Phi'(v_k) \} \Delta u_k \\ \varepsilon''_k &= \Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k) - \Phi'(u_k) \Delta u_k. \end{aligned}$$

L'erreur  $\varepsilon''_k$  est l'« erreur quadratique » habituelle du schéma de Newton, tandis que  $\varepsilon'_k$  est une nouvelle « erreur de substitution » que nous avons introduite en remplaçant  $u_k$  par  $v_k$  dans  $\Phi'$ .

En posant ici encore  $E_n = \sum_0^{n-1} \varepsilon_k$ , on détermine  $\gamma_n$  par récurrence selon la formule

$$\sum_0^n \gamma_k + S_{\theta_n} E_n = S_{\theta_n} f. \quad (4.1')$$

Terminons ce paragraphe par une dernière mise en place des notations : pour éviter de faire apparaître systématiquement le pas  $\Delta_n$  dans les estimations des quantités introduites ci-dessus, on préfère poser, pour tout  $n$ ,

$$\Delta u_n = \Delta_n \dot{u}_n, \gamma_n = \Delta_n g_n, \varepsilon_n = \Delta_n \varepsilon_n, \varepsilon'_n = \Delta_n \varepsilon'_n, \varepsilon''_n = \Delta_n \varepsilon''_n,$$

de sorte que

$$e'_n = \{ \Phi'(u_n) - \Phi'(v_n) \} \dot{u}_n,$$

$$e''_n = \frac{1}{\Delta_n} \{ \Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) - \Phi'(u_n) \Delta_n \dot{u}_n \}.$$

### 4.2 Structure de la récurrence

Il ne reste plus maintenant qu'à prouver l'existence et la convergence de la suite  $u_n$ , sous l'hypothèse que  $\|f\|_\beta$  est assez petit ( $\beta = \alpha + \lambda$ ).

Nous faisons, pour un  $\delta > 0$  et un nombre  $\tilde{\alpha} > \alpha$  assez grand fixés plus loin, l'hypothèse de récurrence suivante :

$(H_n)$  Pour  $0 \leq k \leq n$  et  $s \in [0, \tilde{\alpha}]$  (l'« intervalle d'information »),

$$\|\dot{u}_k\|_s \leq \delta \theta_k^{s - \alpha - 1}.$$

Nous supposerons donc  $(H_n)$ , et nous prouverons au paragraphe C.4.3 que  $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ , si les paramètres ont été bien choisis.

Enfin,  $(H_0)$  sera traitée à part. Faisons quelques remarques préliminaires.

a) Si  $(H_n)$  est vraie pour tout  $n$ , la suite  $u_n$  converge dans  $C^{\alpha - \varepsilon}$  (pour tout  $\varepsilon > 0$ ) vers une fonction  $u \in C^\alpha$  en vertu du fait suivant :

LEMME 4.2.1. Soit  $(u_\theta)_{\theta \geq \theta_0}$  une famille de fonctions  $C^\infty$  telle que

$$\|u_\theta\|_{a_j} \leq M \theta^{b_j - 1}, j = 1, 2, \text{ avec } b_1 < 0 < b_2, a_1 < a_2.$$

Définissons  $\nu$  par  $\nu b_1 + (1 - \nu) b_2 = 0$ , et  $a = \nu a_1 + (1 - \nu) a_2$  :

$$\text{si } a \notin \mathbb{N}, u = \int_{\theta_0}^{+\infty} u_\theta d\theta \in C^a \text{ et } \|u\|_a \leq CM.$$

Le point de ce lemme est que l'intégrale qui définit  $u$  converge normalement dans  $C^{a'}$  pour  $a' < a$ ,  $a$  étant précisément l'indice pour lequel  $\|u_\theta\| \leq CM\theta^{-1}$ . (La preuve est donnée à l'Ex. C.4.1.)

b) Expliquons la signification de  $(H_n)$  : on aura  $u = u_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_k \dot{u}$ , en sorte que l'on construit  $u$  par le procédé inverse de celui utilisé pour décomposer  $f$ . L'estimation  $(H_n)$  demandée n'est rien d'autre que l'estimation (4.2) qu'on est « en droit » d'attendre d'un bloc de  $u$ . Bien entendu, sauf cas très particulier, les  $\dot{u}_k$  ne seront pas les « blocs standard » de  $u$ , mais ils joueront le même rôle (par exemple, dans le cas de la décomposition de Littlewood-Paley, un « bloc standard » a son spectre dans une couronne, ce qui implique (4.2), mais non l'inverse).

c) Montrons que si  $\alpha \geq \mu$ ,  $\alpha \geq \mu'$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ ,  $\delta_0$  assez petit et  $\theta_0$  assez grand,  $(H_n)$  implique que  $u_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  (et l'intervalle qui les joint) sont dans une boule fixe assez petite autour de  $u_0$ , où l'on peut utiliser  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$ . Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 4.2.2.  $(H_n)$  implique (en notant  $x_+ = \sup(x, 0)$ )

- i)  $\|u_{n+1} - u_0\|_\alpha \leq C\delta$
- ii)  $\|S_{\theta_{n+1}}(u_{n+1} - u_0)\|_a \leq C\delta\theta_{n+1}^{(a-\alpha)_+}$ ,  $a$  dans un intervalle fini.
- iii)  $\|(u_{n+1} - u_0) - S_{\theta_{n+1}}(u_{n+1} - u_0)\|_a \leq C\delta\theta_{n+1}^{a-\alpha}$ ,  $0 \leq a \leq \tilde{\alpha}$
- iv)  $\|u_{n+1} - v_{n+1}\|_a \leq C\theta_{n+1}^{a-\alpha}$ ,  $0 \leq a \leq \tilde{\alpha}$
- v)  $\|v_{n+1}\|_a \leq C\theta_{n+1}^{(a-\alpha)_+}$ ,  $a$  dans un intervalle fini.

Preuve : soit  $U = u_{n+1} - u_0 = \sum_{j=0}^n \Delta_j \dot{u}_j$  : le lemme implique que

$\|U\|_\alpha \leq C\delta$ , d'où i), et iii) lorsque  $a \leq \alpha$ .

D'autre part, pour  $a = \tilde{\alpha}$ ,

$$\|U\|_a \leq \delta \sum_{j=0}^n \Delta_j \theta_j^{a-\alpha-1} \leq C\delta\theta_{n+1}^{a-\alpha},$$

d'où iii).

On écrit

$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_0 + U - S_{\theta_{n+1}}(u_0 + U) = u_0 - S_{\theta_{n+1}}u_0 + U - S_{\theta_{n+1}}U,$$

ce qui montre que iii) implique iv) ; finalement i) implique ii), et

$$v_{n+1} = S_{\theta_{n+1}}(u_0 + U),$$

d'où v). □

Puisque  $\alpha \geq \mu$  et  $\alpha \geq \mu'$ , i) montre que  $u_{n+1}$  est dans l'intersection des  $\mu$  et  $\mu'$ -voisinages requis par  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  si  $\delta \leq \delta_0$  ; par ailleurs,

$$v_{n+1} - u_0 = S_{\theta_{n+1}}(u_{n+1} - u_0) + S_{\theta_{n+1}}u_0 - u_0,$$

et ii) montre qu'il en est de même pour  $v_{n+1}$  si de plus  $\theta_0$  est assez grand.

Remarquons que la condition  $\alpha \notin \mathbb{N}$  du théorème intervient ici seulement pour obtenir le lemme 4.2.1.

### 4.3 Preuve de l'hypothèse de récurrence

Nous étant assuré au paragraphe précédent que les fonctions  $u_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  restent dans un voisinage fixe de  $u_0$ , en sorte que l'on peut définir  $\dot{u}_{n+1}$  et utiliser  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$ , nous montrons maintenant  $(H_{n+1})$ , en supposant  $(H_n)$ .

C'est un travail fastidieux qui consiste à évaluer d'abord les erreurs  $e_n, E_{n+1}$ , puis  $g_{n+1}$ , enfin  $\dot{u}_{n+1}$  : ce faisant, il faut faire très attention aux « intervalles d'information » des estimations obtenues.

a) Estimation de  $e'_k$ .

LEMME. Pour  $0 \leq k \leq n, s \in [0, \tilde{\alpha} - \sup(b, c)]$ , on a

$$\|e'_k\|_s \leq C \delta \theta_k^{L(s)-1}, \tag{4.3.1}$$

où  $L(s) = \sup(s + a + c - 2\alpha, (s + b - \alpha)_+ + 2a - 2\alpha)$ .

Preuve : on a

$$e'_k = \{\Phi'(u_k) - \Phi'(v_k)\} \dot{u}_k = \int_0^1 \Phi''(v_k + t(u_k - v_k))(\dot{u}_k, u_k - v_k) dt,$$

d'où, grâce à  $(\mathcal{K}_1)$ ,

$$\begin{aligned} \|e'_k\|_s &\leq C \|\dot{u}_k\|_a \|u_k - v_k\|_a (1 + \sup_t \|v_k + t(u_k - v_k)\|_{s+b}) \\ &\quad + C \|\dot{u}_k\|_a \|u_k - v_k\|_{c+s} + C \|\dot{u}_k\|_{c+s} \|u_k - v_k\|_a \\ &\leq C \delta \theta_k^{L(s)-1} \end{aligned}$$

avec  $L(s) = \sup(s + a + c - 2\alpha, (s + b - \alpha)_+ + 2a - 2\alpha)$ . □

b) Estimation de  $e''_k$ . On a :

$$e''_k = \Delta_k \int_0^1 (1-t) \Phi''(u_k + t \Delta_k \dot{u}_k)(\dot{u}_k, \dot{u}_k) dt,$$

avec pour l'intégrale une estimation de la même forme que pour  $e'_k$ , sur le même intervalle ; il est clair alors qu'un choix convenable de  $\varepsilon > 0$  rend  $e''_k$  négligeable par rapport à  $e'_k$ , car  $\Delta_k \sim \varepsilon \theta_k^{1-1/\varepsilon}$ . L'erreur  $e_k$  est donc estimée par (4.3.1).

c) Estimation de  $g_{n+1}$ . Rappelons que :

$$g_{n+1} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \left\{ \dot{f}_n - (\dot{E}_n)_n - S_{\theta_{n+1}} e_n \right\},$$

où, pour toute fonction  $w$ , le bloc  $\dot{w}_n = \frac{1}{\Delta_n} (S_{\theta_{n+1}} - S_{\theta_n}) w$  est estimé, pour tout indice  $s$ , par l'inégalité (4.2). En particulier ici

$$\|\dot{f}_n\|_s \leq C \theta_n^{s-\beta-1} \|f\|_\beta \quad (\beta = \alpha + \lambda),$$

et

$$\|(\dot{E}_n)_n\|_s \leq C \theta_n^{s-r-1} \|E_n\|_r;$$

on choisit  $r$  le plus grand possible, c'est-à-dire  $r = \tilde{\alpha} - \sup(b, c)$ , et  $\tilde{\alpha}$  assez grand pour que la série  $\sum \Delta_j \theta_j^{L(r)-1}$  diverge (i.e.  $L(r) > 0$ ) et que  $L$  ait pour pente 1 à droite de  $r$ . On a alors  $\|E_n\|_r \leq C \delta \theta_n^{L(r)}$  et

$$\left\| (\dot{E}_n)_n \right\|_s \leq C \delta \theta_n^{s-r-1+L(r)} \leq C \delta \theta_n^{L(s)-1}, \quad (4.3.2)$$

car  $L(r) \leq L(s) + r - s$  si  $s \leq r$  (parce que  $|L'| \leq 1$ ), tandis que  $L(r) = L(s) + r - s$  si  $s \geq r$  par choix de  $\tilde{\alpha}$ . De même  $\|S_{\theta_{n+1}} e_n\|_s \leq C \delta \theta_n^{L(s)-1}$ , pour tout  $s$ . C'est précisément en vue d'obtenir des estimations de  $g_{n+1}$  sur un « intervalle d'indice » quelconque (borné) qu'on a substitué, dans (4.1),  $S_{\theta_n} f$  à  $f$  et  $S_{\theta_n} E_n$  à  $E_n$  (d'où (4.1')). On trouve finalement

$$\|g_{n+1}\|_s \leq C (\delta \theta_{n+1}^{L(s)-1} + \theta_{n+1}^{s-\beta-1} \|f\|_\beta),$$

$s$  dans un intervalle borné.

d) Estimation de  $\dot{u}_{n+1}$ . Par définition,  $\dot{u}_{n+1} = \psi(v_{n+1}) g_{n+1}$ , d'où, pour  $s \in [0, \tilde{\alpha}]$ ,

$$\|\dot{u}_{n+1}\|_s \leq C \left\{ \|g_{n+1}\|_{s+\lambda} + \|g_{n+1}\|_\lambda (1 + \|v_{n+1}\|_{s+d}) \right\},$$

soit

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_{n+1}\|_s &\leq C \delta \theta_{n+1}^{L(s+\lambda)-1} + C \|f\|_\beta \theta_{n+1}^{s-\alpha-1} + \\ &\quad + C (\delta \theta_{n+1}^{L(\lambda)-1} + \|f\|_\beta \theta_{n+1}^{-\alpha-1}) \theta_{n+1}^{(s+d-\alpha)_+}. \end{aligned}$$

On remarque que la substitution de  $v_{n+1}$  à  $u_{n+1}$  permet d'éviter le rétrécissement de l'intervalle d'information dû au « coût en information sur les coefficients » de la résolution de  $\Phi'$ .

On obtiendra  $(H_{n+1})$  (il n'y a pas de constante devant  $\delta$  dans  $(H_{n+1})$  !) pourvu que, pour  $s \in [0, \tilde{\alpha}]$ ,

- i)  $L(s+\lambda) < s - \alpha$ ,
- ii)  $\|f\|_\beta / \delta$  soit petit,
- iii)  $L(\lambda) + (s+d-\alpha)_+ < s - \alpha$
- iv)  $(s+d-\alpha)_+ - \alpha \leq s - \alpha$
- v)  $\theta_0$  soit assez grand.

Analysons ces conditions : pour satisfaire iv), on doit nécessairement prendre  $\alpha \geq d$ , ce qui est suffisant ; iii) équivaut alors à  $L(\lambda) < -\alpha$ , tandis que i) est impliqué par  $L(\lambda) < -\alpha$ . Finalement,  $L(\lambda) < -\alpha$  signifie

$$\lambda + a + c - 2\alpha < -\alpha \Leftrightarrow \alpha > \lambda + a + c$$

$$(\lambda + b - \alpha)_+ + 2a - 2\alpha < -\alpha \Leftrightarrow a > a + 1/2 \sup(\lambda + b, 2a).$$

Le point crucial est le suivant : le caractère quadratique des erreurs se reflète dans l'estimation (4.3.1) par la présence du terme en «  $-2\alpha$  » dans  $L(s)$ , tandis que le caractère doux des estimations implique  $|L'| \leq 1$  ; c'est précisément ce terme «  $-2\alpha$  » qui permet de choisir  $\alpha$  (assez grand) pour « boucler » la récurrence.

Dorénavant,  $\theta_0$  est fixé en tenant compte de  $v$ ).

e) Comment obtenir  $(H_0)$ . Comme  $g_0 = \frac{1}{\Delta_0} S_{\theta_0} f$ ,

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{\Delta_0} \psi(S_{\theta_0} u_0) S_{\theta_0} f,$$

$$\|\dot{u}_0\|_s \leq \frac{C}{\Delta_0} \left\{ \|S_{\theta_0} f\|_{s+\lambda} + \|S_{\theta_0} f\|_\lambda (1 + \|S_{\theta_0} u_0\|_{s+d'}) \right\};$$

$\theta_0$  étant déjà fixé, on obtient  $(H_0)$  simplement en choisissant  $f/\delta$  assez petit dans n'importe quelle norme. Compte tenu de la condition ii) de  $d$ ), on prend  $\|f\|_\beta/\delta$  assez petit, et l'assertion i) du théorème est prouvée. □

#### 4.4 Régularité additionnelle de la solution construite

Prouvons maintenant l'assertion ii) du théorème. Supposons  $f \in W \cap C^{\alpha'+\lambda}$  pour un  $\alpha' > \alpha$ , et choisissons  $\tilde{\alpha} > \alpha'$ . Nous allons utiliser les estimations  $(H_n)$ , vraies pour tout  $n$ , pour obtenir

$$\forall s \in [0, \tilde{\alpha}], \quad \|\dot{u}_n\|_s \leq \text{Cte } \theta_n^{s-\alpha'-1}. \tag{H'_n}$$

Le lemme 4.2.1 permettra alors d'achever la démonstration comme précédemment.

Remarquons que, dans l'estimation de  $\dot{u}_{n+1}$  déduite de  $(H_n)$  (voir paragraphe C.4.3 d)), l'exposant de  $\theta_{n+1}$  dans les termes où n'apparaît pas  $\|f\|_\beta$  est *strictement* inférieur à  $s - \alpha - 1$ . D'autre part, la présence de  $\|f\|_\beta$  dans cette inégalité provient d'une estimation de  $\dot{f}_n$  (voir paragraphe C.3.4 c)); nous pouvons donc remplacer  $\|f\|_\beta \theta_{n+1}^{-\alpha-1}$  par  $\|f\|_{\sigma+\lambda} \theta_{n+1}^{-\sigma-1}$  pour tout  $\sigma > 0$ . Nous avons donc prouvé, pour tout  $n$ , pour tout  $s \in [0, \tilde{\alpha}]$ ,

$$\|\dot{u}_{n+1}\|_s \leq \text{Cte } (\theta_{n+1}^{s-\alpha-\gamma-1} + \|f\|_{\beta'} \theta_{n+1}^{s-\alpha'-1}),$$

avec  $\gamma > 0$  et  $\beta' = \alpha' + \lambda$ . En particulier (ignorant le cas trivial  $n = 0$ )

$$\forall n, \quad \|\dot{u}_n\|_s \leq \text{Cte } \theta_n^{s-\rho-1},$$

avec  $\rho = \min(\alpha + \gamma, \alpha')$ . Avec ces nouvelles estimations à la place des  $(H_n)$ , nous pouvons reprendre la même démonstration, en remarquant que le gain  $\gamma$  ne dépend que d'une borne inférieure de  $\alpha$ , donc est également valable pour tout  $\rho \geq \alpha$ . On obtient ainsi, après  $k$  itérations,

$$\forall n, \quad \forall s \in [0, \tilde{\alpha}], \quad \|\dot{u}_n\|_s \leq \text{Cte } \theta_n^{s - \rho_k - 1},$$

avec  $\rho_k = \min(\alpha + k\gamma, \alpha')$ ,

Pour  $k$  assez grand, on obtient  $\rho_k = \alpha'$ , ce qui donne les estimations  $(H'_n)$  souhaitées.  $\square$

#### 4.5 Conclusion et remarques

On peut résumer heuristiquement l'idée de la preuve de la façon suivante : en ne laissant apparaître dans le schéma de Newton que des régularisations des solutions, on évite le rétrécissement de l'intervalle d'information au prix de moins bonnes estimations ; mais comme ces estimations douces sont « linéaires en les grandes normes », le caractère quadratique des erreurs du schéma de Newton compense cette perte.

On n'a écrit la preuve que dans le cas de  $C^\infty(M)$ , en prenant pour famille d'espaces les espaces de Hölder. La raison en est qu'il est agréable de disposer du lemme 4.2.1, qui donne les estimations « propres » du lemme 4.2.2.

Bien entendu, la procédure décrite s'adapte sans problème à des quantités d'autres situations, et à d'autres familles d'espaces : on devra prendre garde cependant au fait qu'alors le lemme 4.2.1 n'est plus vrai, d'où il résulte une petite perte de  $\varepsilon > 0$  (arbitraire) dans les estimations du lemme 4.2.2. (Une approche plus sophistiquée consiste à « corriger » la famille d'espaces utilisée ; cf. [H7].)

### COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE III

Ce chapitre vise à donner au lecteur les moyens pratiques de détecter le « symptôme de Nash-Moser » dans un cas pathologique donné.

Il contient de nombreux exemples répartis en trois classes. Dans la partie A, on étudie des situations « elliptiques », c'est-à-dire des cas où la résolution de l'équation linéarisée permet de « regagner » toutes les dérivées perdues. Ces cas se traitent à l'aide du théorème usuel des fonctions implicites ; certains exemples sont dus à HAMILTON [Ha].

Dans la partie B, on discute des situations ne relevant pas du théorème des fonctions implicites, mais dans lesquelles la « perte de dérivées » n'est pas sévère et autorise la mise en place d'un schéma de point fixe. Le cas des systèmes hyperboliques quasi linéaires de la mécanique des fluides

nous a paru typique et non académique ; la présentation donnée ici s'inspire de MAJDA [Ma1]. Le traitement du problème du plongement isométrique par une méthode de point fixe est une contribution récente due à GÜNTHER [G].

Enfin, le paragraphe C est consacré au théorème de Nash-Moser, qui autorise des pertes arbitraires mais fixes. Là encore, notre dette à l'égard de HÖRMANDER est grande, puisque c'est à son cours à Stanford (1977, non publié) et à son article [H6] que nous devons le paragraphe 4.4. Nous nous sommes efforcés de montrer comment le schéma qu'il propose s'obtient naturellement en modifiant un peu le schéma de Newton standard.

Bien entendu, il existe de nombreuses autres présentations du théorème que nous n'avons pas voulu discuter ici ; le lecteur pourra consulter par exemple MOSER [Mo], et trouvera dans HAMILTON [Ha] une discussion détaillée des « applications douces », « espaces doux » etc..., avec de nombreux exemples et références.

Ce chapitre est en un sens l'aboutissement des deux précédents, dans lesquels les concepts fondamentaux utilisés (estimations douces, inégalités d'énergie, etc...) ont été présentés à loisir. Il souligne également le fait que le cœur d'un problème non linéaire de type « perturbation » est la résolution (avec un contrôle doux) d'un problème linéaire, qui est souvent de nature pseudo-différentielle. On trouvera dans MAJDA [Ma2] une autre illustration remarquable de ce fait, hélas trop savante pour être présentée ici).

## EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

A.1 Soit  $D$  le disque unité dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $W(D)$  l'espace des fonctions holomorphes  $f$  sur  $D$  satisfaisant à

$$\|f\|_{W(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < +\infty.$$

a) Montrer que, si  $f \in W(D)$ , et si  $g$  est holomorphe près des valeurs prises par  $f$  sur  $\bar{D}$ , alors  $g \circ f \in W(D)$ . (On remarquera que  $\|h\|_{W(D)} \leq C \sup_{x \in D} (|h(x)| + |h''(x)|)$ , et que  $W(D)$  est une algèbre ; puis on écrira

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{avec} \quad f_2(z) = \sum_{n>N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

$N$  étant choisi assez grand pour que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(f_1)}{n!} f_2^n$  soit bien définie et converge dans  $W(D)$ .)

b) Soit  $f$  une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ , telle que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lambda$ , avec  $|\lambda| \in ]0, 1[$ . Montrer que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , il existe une fonction holomorphe  $\varphi$  près de 0 telle que  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = \alpha$ , et, pour tout  $z$  dans un voisinage de 0,

$$f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z).$$

(On notera  $B = \{\psi \in \mathcal{W}(D), \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$ , et on étudiera l'application  $F$ , à valeurs dans  $B$ , définie par

$$F(\varepsilon, \psi)(z) = \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon \alpha z + \varepsilon \psi(z)) - \alpha \lambda z - \psi(\lambda z)$$

pour  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ ,  $\psi$  dans un voisinage de 0 dans  $B$ ).

c) Montrer l'analogie de b) avec  $|\lambda| > 1$ .

A.2 Soit  $B$  la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ . On se propose de construire un opérateur borné  $A_0: C^{\rho-2}(B) \rightarrow C^{\rho}(B)$  tel que  $\Delta A_0 = \text{id}$ . ( $\rho > 2$ , non entier.)

a) Construction d'une solution élémentaire de  $\Delta$ .

Montrer que, si  $n \geq 3$ , la formule  $\hat{E}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}$  définit  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

telle que  $\Delta E = \delta$ .

Si  $n = 2$  et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re } z < 2$ , on pose

$$\hat{E}_z(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^z},$$

ce qui définit une fonction holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ .

Montrer que cette fonction se prolonge analytiquement à  $\mathbb{C} \setminus \{2\}$  grâce à la formule  $\hat{E}_z = \frac{1}{(z-2)^2} \Delta_{\xi} \hat{E}_{z-2}$ , et en déduire que

$$E = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-2|=1} E_z dz$$

est une distribution tempérée vérifiant  $\Delta E = \delta$ . (Le lecteur curieux pourra faire le calcul explicite de  $E$ .) En déduire l'existence d'un opérateur  $A_1: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\Delta A_1 = \text{id}$ .

b) Soit  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . On note  $(u_p)_{p > -1}$  sa décomposition de Littlewood-Paley. Montrer qu'il existe  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  telle que

$$\forall p \geq 0, \quad u_p = 2^{-2p} \chi(2^{-p} D)(\Delta u_p),$$

et en déduire que, si  $\rho > 2$ ,

$$\Delta u \in C^{\rho-2}(\mathbb{R}^n) \text{ entraîne } u \in C^{\rho}(\mathbb{R}^n).$$

c) A l'aide d'un opérateur de prolongement  $C^{\rho-2}(B) \rightarrow C^{\rho-2}(\mathbb{R}^n)$ , construire  $A_0$ .

**B.1** Admettons le fait qu'il existe une application  $C^\infty$  injective  $u_1: M \rightarrow \mathbb{R}^d$  (pour un certain  $d$ ). Montrer qu'alors, si toute métrique  $g$  est représentable par un  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  (pour un certain  $N$ ), toute métrique  $g$  est représentable par un  $u$  injectif (chercher  $u$  sous la forme  $(u_1, u_2)$ , et utiliser le point iii) du paragraphe B.2.1).

**B.2 a)** Montrer qu'on peut trouver  $\chi: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , ne dépendant que de  $|x|$ , telle que  $\int \chi'(y) \chi'(y) dy = \text{id}$ .

b) Soient  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $A \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $A$  inversible.

Considérons la famille d'applications

$u_{\varepsilon, y}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u_{\varepsilon, y} = |\det A(y)|^{1/2} \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \chi \left( A(y) \frac{(x-y)}{\varepsilon} \right) a(y).$$

Montrer que  $\int u'_{\varepsilon, y} u'_{\varepsilon, y} dy \rightarrow [a(x)]^2 A(x) A(x)$  (dans  $C_0^\infty$ ) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

c) En utilisant sur  $M$  une partition de l'unité  $1 = \sum \psi_j^2$  (cf. chapitre I, Ex. 6.1), où  $\psi_j \in C_0^\infty(\mathcal{U}_j)$  ( $\{\mathcal{U}_j\}$  étant un recouvrement fini de  $M$  par des ouverts où existent des coordonnées locales), on écrit une métrique quelconque  $g = \sum \psi_j^2 g$ .

En déduire, à l'aide de a) et b), qu'on peut approcher  $g$  par des métriques représentables.

**B.3 a)** Vérifier que  $v: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$  définie par  $v(x) = \{x_j, x_j x_k\}$ ,  $j \leq k$ , est injective et vérifie (2.2.1).

b) Montrer que si  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^d$  est injective, alors  $v \circ u$  est injective et vérifie (2.2.1).

**C.1 a)** Soit  $\omega \in \mathbb{R}^n$  tel que, pour un  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $k \neq 0$ , on ait  $\langle k, \omega \rangle = 0$ . Désignons par  $f$  l'application  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^1$  induite par  $x \mapsto \langle k, x \rangle$ . Montrer qu'une courbe intégrale sur  $\mathbb{T}^n$  de  $\frac{dx}{dt} = \omega$  vérifie, pour tout  $t$ ,  $f(x(t)) = f(x(0))$ . En déduire que l'image de  $x$  n'est pas dense.

b) Supposons au contraire (2.1.1) du paragraphe C.2.1: montrer qu'alors, pour toute fonction continue  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et toute trajectoire  $x(t)$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx.$$

(On approchera  $f$  par des polynômes trigonométriques.)

En déduire que l'image de  $x$  est dense, en raisonnant par l'absurde.

**C.2\*** On suppose que  $\omega \in \mathbb{R}^n$  vérifie

$$\exists \tau > n - 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \neq 0, \quad |\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{C}{|k|^\tau}, \quad (2.1')$$

et on se donne  $s > \tau$ .

En répartissant les termes de la série selon un découpage dyadique des valeurs de  $|k|$  et de  $|\langle k, \omega \rangle|$ , montrer que

$$\sum_{k \neq 0} |k|^{-s} |\langle k, \omega \rangle|^{-1} \leq \text{Cte} + \sum_{p \geq 0} \sum_{j \geq 0, 2^{p-j} \geq C} 2^{-ps} 2^j N(2^{p+1}, 2^{-j})$$

où  $N(r, \varepsilon)$  désigne le nombre de  $k \neq 0$  tels que  $|k| < r$  et  $|\langle k, \omega \rangle| < \varepsilon$ .

Montrer que  $N(r, \varepsilon) \varepsilon^{-\frac{n-1}{\tau}} \leq Cr^{n-1}$  et en déduire la convergence de la série.

**C.3** Prouver que la composition de deux applications douces est douce.

**C.4** Prouver que si une application  $\phi$  est douce et linéaire, elle vérifie

$$|\phi(u)|_s \leq C |u|_{s+r}$$

(avec les notations du cours).

Les trois exercices suivants établissent une estimation douce pour la solution d'un système symétrique positif au sens de l'exercice C.7 du chapitre II. Néanmoins, les exercices C.5 et C.6 peuvent être traités indépendamment.

**C.5\* Une inégalité de Gårding faible et douce**

Sur  $\mathbb{T}^n$ , on considère l'opérateur différentiel  $A = - \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_j$ , les  $a_{ij}$  étant des fonctions  $C^\infty$ , à valeurs dans les matrices hermitiennes  $N \times N$ , et vérifiant (pour un  $\gamma > 0$ ) :

$$\forall x \in \mathbb{T}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2 \text{id}$$

(au sens des matrices hermitiennes).

On se propose d'établir l'inégalité suivante

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^N) \quad (Au, u) \geq \frac{\gamma}{2} |u|_1^2 - C_0 |u|_0^2 \quad (*)$$

où  $C_0$  est une constante ne dépendant que de  $\gamma$  et de

$$[A]_1 = \sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sup_{i,j,k} |\partial_k a_{ij}(x)| .$$

a) Montrer l'inégalité (\*) si les  $a_{ij}$  sont constantes (avec  $C_0 = 0$ , et  $\gamma$  au lieu de  $\frac{\gamma}{2}$ ). En déduire que tout point  $x$  admet un voisinage ouvert  $\omega_x$  dont on contrôle le diamètre à l'aide de  $[A]_1$ , tel que

$$\forall u \in C_0^\infty(\omega_x, \mathbb{C}^N) \quad (Au, u) \geq \frac{3\gamma}{4} |u|_1^2 .$$

b) En utilisant une partition de l'unité  $\sum \varphi_j^2 = 1$  (chapitre I, Ex. 6.1) adaptée à un recouvrement fini  $\mathbb{T}^n = \bigcup_j \omega_{x_j}$ , démontrer l'inégalité (\*).

**C.6\* Estimations douces pour un commutateur**

Soit  $h = h(\xi)$  une fonction  $C^\infty$ , homogène de degré  $m$  pour  $|\xi| \geq 1$ , et soit  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors le théorème 4.1 du calcul symbolique (chapitre I) et le théorème de continuité  $L^2$  entraînent que, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $[h(D), a]$  applique  $H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , et plus précisément que

$$R_a = [h(D), a] - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial \xi_j} (D)$$

applique  $H^{s+m-2}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . On se propose d'évaluer les normes de ces opérateurs en fonction de  $a$ . Pour cela, on utilise la notion de paraproduit introduite à l'exercice A.5 du chapitre II, avec les notations correspondantes.

a) Montrer que  $[h(D), T_a] u = \sum_p v_p$ , avec

$$v_p(x) = 2^{mp} \int \rho(y) (S_{p-2} a(x - 2^{-p} y) - S_{p-2} a(x)) u_p(x - 2^{-p} y) dy ,$$

$\hat{\rho}(\xi) = \chi(\xi) h(\xi)$  (où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  vaut 1 sur un voisinage de la couronne  $C_1 = \left\{ \frac{1}{4} \leq |\xi| \leq \frac{5}{2} \right\}$ ).

En déduire que

$$|[h(D), T_a] u|_s \leq C \|a\|_1 |u|_{s+m-1} ,$$

et

$$\left| \left( [h(D), T_a] - \frac{1}{i} \sum_j T \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial \xi_j} (D) \right) u \right|_s \leq C \|a\|_2 |u|_{s+m-2}$$

où

$$\|a\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha a\|_0.$$

b) En écrivant

$$\begin{aligned} h(D)(au) &= h(D) T_a u + h(D) T_u a + r_1 \\ ah(D) u &= T_a h(D) u + T_{h(D)u} a + r_2, \end{aligned}$$

montrer que, si  $s + m > 0, s > 0,$

$$\begin{aligned} |[h(D), a] u|_s &\leq C(\|a\|_1 |u|_{s+m-1} + \|u\|_0 |a|_{s+m}) \\ \left| \left( [h(D), a] - \frac{1}{i} \sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(D) \right) u \right|_s &\leq \\ &\leq C(\|a\|_2 |u|_{s+m-2} + \|u\|_0 |a|_{s+m}). \end{aligned}$$

**C.7\*** Soit  $L = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j + B$  un système symétrique positif  $N \times N$  sur le tore  $\mathbb{T}^n$ . (Au sens de l'exercice C.7 du chapitre II.)

On suppose que, pour un certain  $\gamma > 0, s > 0$

$$K(x) = \frac{1}{2} (B + B^*)(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial_j A_j(x) \geq \gamma I \tag{1}$$

$$\forall \xi \in S^{n-1}, K(x) + s \sum_{j,k} \partial_j A_k(x) \xi_j \xi_k \geq \gamma I. \tag{2}$$

En utilisant les exercices C.5 et C.6, montrer, en reprenant la question C.7 du chapitre II, que

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^N), \quad \frac{\gamma}{2} |u|_s^2 \leq \text{Re} (Lu, u)_s + C(|A|_s + |B|_s) \|u\|_1^2$$

où  $C$  ne dépend que de  $\gamma, \|A\|_2$  et  $\|B\|_1$ .

**C.8** Montrons le résultat suivant : soit  $u_\theta \in C^\infty (\theta \geq \theta_0)$  une famille des fonctions  $u_\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\|u_\theta\|_{a_j} \leq M\theta^{b_j-1}, j = 1, 2,$  avec  $b_1 < 0 < b_2, a_1 < a_2.$

Définissons  $\nu$  par  $\nu b_1 + (1 - \nu) b_2 = 0,$  et  $a = \nu a_1 + (1 - \nu) a_2:$  si  $a \notin \mathbb{N},$

$$u = \int_0^{+\infty} u_\theta d\theta \in C^a$$

et

$$\|u\|_a \leq CM.$$

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où  $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$ .

b) On pose  $v_\theta = \int_{\theta_0}^\theta u_{\theta'} d\theta'$ ,  $w_\theta = \int_\theta^{+\infty} u_{\theta'} d\theta'$ . Estimer  $\|u_\theta\|_{a_2}$  et  $\|w_\theta\|_{a_1}$ . Ecrire alors

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |v_\theta(x) - v_\theta(y)| + |w_\theta(x) - w_\theta(y)| \\ &\leq (x - y)^{a_2} \|v_\theta\|_{a_2} + |x - y|^{a_1} \|w_\theta\|_{a_1} \end{aligned}$$

et optimiser l'estimation obtenue par un choix convenable de  $\theta$ .

**C.9** Enoncer et vérifier le théorème de Nash-Moser dans les espaces de Sobolev  $H^s(M)$ .

On pourra remplacer le lemme 4.2.1 (Ex. C.8) par le suivant :

Soit  $(u_\theta)$  une famille de  $C^\infty(M)$  telle que  $|u_\theta|_{s_j} \leq M(\theta) \theta^{\sigma_j - 1}$  pour

$$j = 1, 2, \quad \sigma_1 < 0 < \sigma_2, \quad \text{et} \quad \int_1^\infty M(\theta)^2 \frac{d\theta}{\theta} < +\infty. \quad \text{Alors} \quad \int_1^\infty u_\theta d\theta \in H^s,$$

avec  $s = \nu s_1 + (1 - \nu) s_2$ ,  $\nu \sigma_1 + (1 - \nu) \sigma_2 = 0$ .

Remarquer que le théorème de Nash-Moser ( $C^\alpha$  ou  $H^s$ ) reste vrai si les hypothèses  $(\mathcal{K}_1)$  et  $(\mathcal{K}_2)$  n'ont lieu que pour  $\alpha$  (ou  $s$ ) dans un intervalle borné, sur lequel on explicitera les contraintes.

**C.10\*** En utilisant les exercices C.7 et C.9, montrer le résultat suivant :

Soit  $F : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N)^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction  $C^\infty$ ,  $F = F(x, u, p_1, \dots, p_n)$ , vérifiant les conditions suivantes :

- i)  $F(x, 0, 0) = 0$
- ii)  $\exists \gamma > 0$ ,

$$\begin{aligned} K(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial u}(x, 0, 0) + \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)^*(x, 0, 0) \right) - \\ - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial p_j}(x, 0, 0) \geq \gamma I \end{aligned}$$

$$\forall \xi \in S^{n-1}, \quad K(x) + s_0 \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial p_k}(x, 0, 0) \xi_j \xi_k \geq \gamma I$$

pour un certain  $s_0 > \frac{n}{2} + d$ .

Alors pour un certain  $s_1$ , et, pour tout  $s \in \left] \frac{n}{2} + d, s_1 \right]$ , il existe un voisinage de  $W$  de 0 dans  $H^s$  tel que, pour tout  $f \in W$ , l'équation  $F\left(x, u \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f$  a une solution  $u \in H^s$ . (On explicitera les contraintes sur  $d$  et sur  $s_1$ .)

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Bibliographie

## OUVRAGES CONSEILLÉS AVANT D'ABORDER CE COURS

- [CP] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars (1981).
- [R] W. RUDIN, *Functional analysis*, Mc Graw-Hill (1973).
- [S] L. SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Paris, Hermann (1965).
- [Z] C. ZUILY, *Problèmes de distributions avec solutions détaillées*, Paris, Hermann (1978).

## OUVRAGES ACCESSIBLES AU NIVEAU DU COURS

- [CM] R. R. COIFMAN, Y. MEYER, « Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels », *Astérisque* n° 57, Paris (1978).
- [Ha] R. S. HAMILTON, « The inverse function theorem of Nash and Moser », *Bull. A.M.S.*, 7 (1982), 65-222.
- [H1] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Tome 1, Springer (1983).
- [H2] L. HÖRMANDER, « On the existence and the regularity of linear pseudo-differential equations », *L'Enseignement Mathématique* n° 18, Genève (1971).
- [H3] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Tome 3, Section 18.1, Springer (1985).
- [Ma] A. J. MAJDA, « Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several variables », *Applied Mathematical Sciences* n° 53, Springer (1984).
- [Mo] J. MOSER, « A rapidly convergent iteration method and non linear differential equations », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 20 (1966), 499-535.
- [N] L. NIRENBERG, *Lectures on linear partial differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, 17, AMS Providence (1973).
- [R] J. RAUCH, « Singularities of solutions to semilinear wave equations », *J. Math. Pures et Appl.* 58 (1979), 299-308.
- [Sp] M. SPIVAK, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Benjamin (1965).
- [T] M. E. TAYLOR, *Pseudodifferential operators*, Princeton (1981).

## OUVRAGES DE COMPLÉMENT AU NIVEAU RECHERCHE

- [A] S. ALINHAC, « Paracomposition et opérateurs paradifférentiels », *Comm. in Part. Diff. Equations*, 11 (1986), 87-121.
- [Au] T. AUBIN, « Inégalités d'interpolation », *Bull. Sc. Math.* 105 (1981) 229-234.
- [B1] J.-M. BONY, « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> Série, 14 (1981), 209-246.
- [B2] J.-M. BONY, « Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations », contribution aux *workshop and symposium on hyperbolic equations and related topics*, Kokota and Kyoto, August 27-Sept. 5 (1984).
- [Bt] J.-B. BOST, « Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens », Séminaire Bourbaki 1984-85, exposé n° 639, *Astérisque* n° 133-134.
- [DJ] G. DAVID et J.-L. JOURNÉ, « A boundedness criterion for generalized Calderon-Zygmund operators », *Ann. of Math.*, 120 (1984), 371-397.
- [G] M. GÜNTHER, « On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds », *Ann. Global Anal. Geom.*, Vol. 7, n° 1 (1989), 69-77.
- [H4] L. HÖRMANDER, « Fourier integral operators I », *Acta Math.* 127 (1971), 79-183.
- [H5] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Tomes 3 et 4, Springer (1985).
- [H6] L. HÖRMANDER, « The boundary problem of physical geodesy », *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 62 (1976), 1-52.
- [H7] L. HÖRMANDER, « On the Nash-Moser implicit function theorem », *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, Series A.I. Mathematics, 10 (1985), 255-259.
- [H8] L. HÖRMANDER, « Pseudo-differential operators of type 1,1 », *Comm. in Part. Diff. Equ.*, 13 (1988), 1085-1111.
- [H9] L. HÖRMANDER, *The Nash-Moser theorem and paradifferential operators*, Preprint, Univ. de Lund (1988).
- [L] G. LEBEAU, « Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes », *Ann. Inst. Fourier*, 35 (1985), 145-216.
- [Ma2] A. J. MAJDA, « The stability and the existence of multidimensional shock fronts », *Memoirs of the American Mathematical Society*, 41, n° 275 et 43, n° 281 (1983).
- [M] Y. MEYER, « Remarque sur un théorème de J.-M. Bony », *Suppl. di Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, Atti del Seminario di Analisi Armonica, Pisa, Série 2, n° 1 (1981).
- [N] J. NASH, « The imbedding problem for Riemannian manifolds », *Ann. of Math.*, 63 (1956) 20-63.
- [S] J. SJÖSTRAND, « Singularités analytiques microlocales », *Astérisque* n° 95, Paris (1982).
- [W] I. L. WANG, « The  $L^2$  boundedness of pseudodifferential operators », *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 302 (1987), p. 55-76.

## Principales notations introduites

$\alpha, |\alpha|, \alpha!, \partial^\alpha, D^\alpha, \xi^\alpha, 13, 14$

$p, p_m, 14$

$C^k(\Omega), C^\infty(\Omega), 13$

$C_0^\infty(\Omega), 13$

$C^k(\bar{\Omega}), 13$

$\langle \cdot, \cdot \rangle, 14$

$(\cdot, \cdot), 21$

$\text{supp } u, \text{supp sing } u, 16$

$u * v, 16$

$\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{E}'(\Omega), 14, 16$

$\mathcal{S}, \mathcal{S}', \hat{u}, \mathcal{F}, 19, 20$

$\Delta, 109$

$[\dots], 38$

$\square, 109$

$S^m, |a|_{\alpha, \beta}^m, 28, 30$

$S_{\rho, \delta}^m, 64$

$a(x, D), \text{op } (a), a^*, 33, 37$

$a \# b, 38$

$T^*M, \pi, \alpha, \sigma, \{f, g\}, 48, 49, 50$

$I_\varphi(a), 52$

$u_p, S_p u, 92$

$\| \cdot \|_0, \| \cdot \|_\alpha, \| \cdot \|'_\alpha, C^\alpha, 95$

$C^{\downarrow}, 124$

$| \cdot |_0, | \cdot |_s, H^s, 41$

$H^{s, \infty}, 131$

$\Sigma(u), \Sigma_x(u), WF(u), 104$

$WF', 107$

$WF_s, 130$

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Index

## A

Adjoint, 34  
Asymptotique (somme), 30

## B

Bicaractéristique (courbe), 134, Ex. C.3

## C

Caractéristique (surface), 128, Ex. B.1  
Cauchy (problème de), 113  
Changement de variables, 47  
Commutateur, 38  
Conormale (distribution), 131  
Continuité  $L^2$ , 39  
Convexité (inégalités de), 96  
Crochet de Poisson, 38

## D

Décomposition de Littlewood-Paley, 91  
Densité sur une variété, 88  
Dirichlet (problème de), 143  
Douce (application, estimation), 160

## E

Elliptique (symbole, opérateur), 42  
Energie (inégalité), 113

## F

Factorisation (d'un opérateur), 119  
Fibré cotangent, 48  
1-forme canonique, 49  
2-forme symplectique, 50  
Fonctions implicites (théorème des), 141  
Fourier (distribution de), 106  
Fourier (transformée de), 20  
Front d'onde, 105

## G

Gagliardo-Nirenberg (inégalité de), 101  
Gårding (inégalité de), 41

## H

Hamiltonien (champ), 50  
Hölder (espaces de), 94  
Hörmander (théorème d'), 118  
Hyperbolique (opérateur, système), 119

## I

Intégrale oscillante, 51  
Intégrale singulière, 72  
Interpolation, 125  
Inversion locale (théorème d'), 139

## L

Laplacien, 24

## M

Morse (lemme de), 82, Ex. 7.1  
Multiplicateur de Meyer, 102

## N

Newton (schéma de), 166  
Noyaux, 18

## O

Opérateur pseudo-différentiel, 33  
Opérateur proprement supporté, 46  
Opérateur sous-elliptique, 80, Ex. 6.7  
Opérateur sur une variété, 47  
Ondes (équation des), 109

**P**

Parametrix, 25  
 Paraproduit, 100  
 Partition de l'unité, 15  
 Petits diviseurs, 158  
 Phase non stationnaire, 51  
 Phase stationnaire, 82  
 Plongement isométrique, 152  
 Presqu'orthogonalité, 92  
 Propagation des singularités, 117  
 Pseudo-locale (propriété), 44

**Q**

Quasi linéaire (système), 147

**R**

Rauch (lemme de), 131  
 Régularisation (opérateur de), 97

**S**

Sobolev (espace de), 41  
 Spectre, 99  
 Symbole, 28  
 Symbole principal, 50  
 Symbole local, 45  
 Symbolique (calcul), 37, 38  
 Symétrique (système), 147

**T**

Trace, 107  
 Transmission (propriété de), 80

**Z**

Zygmund (classe de), 124

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

