

# 3D-FEM Widerstandsmodellierung unter Verwendung von unstrukturierten Tetraederdiskretisierungen

Carsten Rücker\*

Für die Interpretation geoelektrischer Gleichstrommessungen ist die Berechnung des stationären elektrischen Potentials unerlässlich. Viele Verfahren beschäftigen sich mit dieser Problematik und sind in der Lage, die klassischen Anforderungen, wie z. B. die freie Wahl der Elektrodenpositionen oder die dreidimensionale Verteilung von Leitfähigkeiten, zu berücksichtigen. Die heute weit verbreiteten Finite-Differenzen- und Finite-Elemente-Algorithmen beruhen auf einer regelmäßigen Quader- bzw. Tetraederdiskretisierung des dreidimensionalen Modellgebietes. Mit dieser Strategie der Gebietszerlegung sind die Möglichkeiten der Nachbildung komplizierter Topographie oder auch die Einbeziehung von schrägen bzw. geschwungenen Materialgrenzflächen in die Modellierung nur sehr begrenzt möglich.

Für die Widerstandsmodellierung in der Gleichstromgeoelektrik wird im folgenden eine auf unregelmäßiger Tetraederdiskretisierung basierende Finite-Elemente-Methode verwendet und diskutiert. Anhand zweier Beispiele wird untersucht, wie sich diese Strategie zur Lösung der geoelektrischen Vorwärtsaufgabe einsetzen läßt. Zum einen wird als klassisches Modellproblem die anstehende, unendlich ausgedehnte Platte modelliert und mit der analytischen Lösung verglichen, zum anderen wird ein mit einer Topographie versehenes Modellgebiet untersucht.

Es zeigt sich, daß bei Modellproblemen mit eher zweidimensionalem Charakter, z. B. bei Strukturen mit ungünstigen Längenverhältnissen, eine unstrukturierte Diskretisierung Schwächen aufweist, während diese Methode bei der Modellierung von topographisch komplexen Gebieten überzeugt. Die Möglichkeit, komplizierte Geometrien nachzubilden und die Diskretisierung lokal zu verfeinern, macht die Finite-Elemente-Methode mit unstrukturierten Tetraedernetzen zu einem wertvollen Werkzeug für die Modellierung in der Gleichstromgeoelektrik.

## 1 Einführung

Die Lösung der Vorwärtsaufgabe in der Gleichstromgeoelektrik, d.h. das Berechnen des stationären elektrischen Potentials für eine beliebige Verteilung des spezifischen elektrischen Widerstandes, ist von zentraler Bedeutung bei der Interpretation von Meßdaten. Die Finite-Differenzen-Modellierung (Mufti, 1976; Dey & Morrison, 1979) als erster auf der Diskretisierung des Modellgebietes basierende Ansatz, wurde in der Zeit aufkommender Rechentechnik eingeführt. Durch schnellere und effektivere Gleichungs-

---

\*Universität Leipzig, Institut für Geophysik und Geologie, Talstraße 35, 04103 Leipzig, E-mail: cruecker@uni-leipzig.de

löser (Spitzer, 1995; Zhang et al., 1995) und den Einsatz weiterer Techniken der Genauigkeitsverbesserung, wie dem Singularity Removal (Lowry et al., 1989), wurde die FD-Methode weiterentwickelt und ist heute das am weitesten verbreitete Werkzeug zum Lösen des Vorwärtsproblems in der Geophysik.

Ein alternativer Ansatz, die Finite-Elemente-Modellierung, wird ebenso in der Geoelektrik eingesetzt (Coggon, 1971; Pridmore et al., 1981; Queralt et al., 1991), findet jedoch in einer geringeren Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten Verwendung. Durch die hohe Flexibilität dieser Methode galt die besondere Aufmerksamkeit bisher den Untersuchungen topographischer Effekte (Fox et al., 1980). In jüngerer Zeit rückt die FE-Methode zunehmend in den Vordergrund, wobei die meisten Implementierungen die regelmäßige (strukturierte) Diskretisierungsstrategie, ob blockorientiert (Li & Spitzer, 2002; Pain et al., 2002) oder tetraederbasiert (Bing & Greenhalgh, 2001), mit den FD-Verfahren gemeinsam haben.

Bislang lassen sich nur sehr wenige Arbeiten in der Gleichstromgeoelektrik finden, die sich die hohe Flexibilität unregelmäßiger (unstrukturierter) Tetraederdiskretisierungen zu Nutzen machen (Sugimoto, 1999). Diese Flexibilität ermöglicht zum einen die Nachbildung nahezu beliebiger Modellgeometrien, zum anderen ist es möglich, durch lokale Erhöhung der Diskretisierungsdichte numerische Fehler an Materialübergängen oder Quellsingularitäten zu verringern. Letzteres erlaubt dementsprechend eine globale Vergrößerung zur Verwirklichung weit entfernter Modellränder.

Abbildung 1 zeigt exemplarisch ein unstrukturiertes Tetraedergitter. Das FE-Netz dient zur Widerstandsmodellierung geoelektrischer Sondierungen am Vulkan Merapi, wobei die komplexe Topographie dieses Bergs in einem hohen Maße nachempfunden werden kann. In ein solches Gitter können unter anderem die im Gelände ermittelten Elektrodenpositionen genau eingepaßt werden.

Motiviert durch den Erfolg der FE-Modellierung in anderen naturwissenschaftlichen und technischen Bereichen, hat die Entwicklung anwendungsbereiter Gittergeneratoren in den letzten Jahren erheblichen Aufschwung erlebt. Es lassen sich eine ganze Reihe von frei verfügbaren Netzgeneratoren finden und für die Widerstandsmodellierung nutzbar machen. Die im folgenden vorgestellten Tetraederdiskretisierungen wurden mit dem Netzgenerator TETGEN (Si, 2003) erzeugt und mit dem ebenfalls frei verfügbaren Visualisierungsprogramm MEDIT (INRIA-Rocquencourt, 2003) dargestellt.

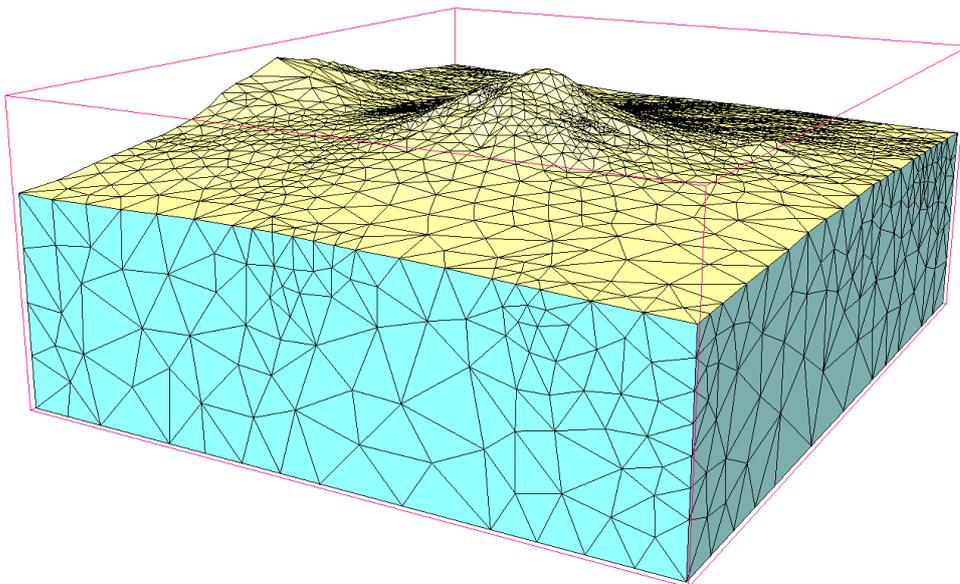


Abbildung 1: Beispielhaft dargestellt ein Finite-Elemente-Netz zur Widerstandsmodellierung am Vulkan Merapi. Die unstrukturierte Tetraederdiskretisierung erlaubt die genaue Nachbildung komplizierter Geometrien in drei Dimensionen

## 2 Grundlagen

### 2.1 Der Vorwärtsoperator für DC-Geoelektrik

Die Grundlage der Widerstandsmodellierung für die Gleichstromgeoelektrik wird durch die Kontinuitätsgleichung repräsentiert:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) + f = 0 \quad \text{in } \Omega \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Das gesuchte elektrische Potential  $\varphi(x, y, z)$  für ein beliebiges dreidimensionales Gebiet  $\Omega$  hängt dabei von einer vorgegebenen Leitfähigkeit  $\sigma(x, y, z)$  und der Quellfunktion  $f = \nabla \cdot \mathbf{j}$  ab. Die elektrische Leitfähigkeit entspricht mit  $\sigma = 1/\rho$  dem Kehrwert des spezifischen elektrischen Widerstandes  $\rho$ , der üblicherweise in der Gleichstromgeoelektrik als Materialparameter des Untergrundes benutzt wird.

Auf den Rändern  $\Gamma$  des Modellgebietes gelten die Cauchyschen Randbedingungen:

$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta(\varphi - \varphi_0) = j_0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (2)$$

Hierbei beschreibt  $n$  die nach außen gerichtete Flächennormale auf dem Rand. Mit Hilfe dieser allgemeinen Beschreibung ist es möglich, durch eine geeignete Wahl des Potentials  $\varphi_0$ , der Normalkomponente der Stromdichte  $j_0$  sowie des Parameters  $\beta$  auf dem Rand beliebige Randbedingungen zu berücksichtigen. In der Gleichstromgeoelektrik wird der Rand in zwei unterschiedliche Abschnitte,  $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_e$ , unterteilt und entsprechend mittels zweier Randbedingungen beschrieben. Durch die Erdoberfläche  $\Gamma_s$  darf kein Strom fließen, d.h. es wird die homogene Neumann-Bedingung ( $\varphi_0 = 0, j_0 = 0, \beta = 0$ ) angenommen, im Untergrund hingegen werden durch die Spezifikation der Funktion  $\beta$  die gemischten Randbedingungen (Dey & Morrison, 1979) definiert, die einen Stromfluß durch die Grenzen des Modellgebietes erlauben ( $\varphi_0 = 0, j_0 = 0, \beta \neq 0$ ):

$$\beta = \frac{\cos(\theta)}{|\mathbf{r}|}. \quad (3)$$

Hierbei ist  $\theta$  der Winkel zwischen dem radialen Abstand  $\mathbf{r}$  von der Quellposition zum Rand und  $\mathbf{n}$  dem äußeren Normalenvektor auf dem Rand  $\Gamma_e$ . Ist das Potential auf einem Randstück  $s \in \Gamma$  durch eine Funktion  $\alpha(s)$  vorgegeben, liegen die Dirchletschen Randbedingungen vor,  $\varphi = \alpha(s)$ .

Die in der Gleichstromgeoelektrik modellierten Problemstellungen orientieren sich an den im Feld durchgeführten Messungen. Im Gelände werden Potentialfelder durch Stromelektroden erzeugt, die man näherungsweise als Punktquellen betrachten kann. Aufgrund des Superpositionsprinzips genügt es, das Potential für eine Polquelle zu betrachten. Befindet sich diese Quelle am Ort  $\mathbf{r}_s$  und fließt ein Strom  $I$ , dann ergibt sich der Quellterm:

$$f = \nabla \cdot \mathbf{j} = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s). \quad (4)$$

Die Diracsche Deltafunktion  $\delta$  im Quellterm definiert den Einspeisestrom am Ort der Quelle als unendlich und an jedem anderen Ort  $\mathbf{r}$  des Modellgebietes als Null. Diese Singularität produziert in der Umgebung des Einspeisepunktes einen erheblichen numerischen Fehler, den man mit deutlichem Mehraufwand einer Diskretisierungsverdichtung um die Singularität kompensieren muß.

Eine alternative Herangehensweise stellt die Methode der Singularitätenbeseitigung (Lowry et al., 1989) dar, eine Strategie die mittlerweile ein fester Bestandteil der gängigen FD und FE Algorithmen ist. Die Grundannahme ist, daß sich das totale Potentialfeld aus einem primären und einem sekundären Anteil zusammensetzt,

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_s. \quad (5)$$

Das Primärpotential  $\varphi_p$  ist der Teil des elektrischen Feldes, der durch eine Singularität in einem homogenen Halbraum der Leitfähigkeit  $\sigma_0$  produziert werden kann. Das Sekundärpotential  $\varphi_s$  erklärt sich dann als der Teil des Potentialfeldes, der aus den inhomogenen Anteilen der Leitfähigkeit  $\sigma_s$  resultiert, wobei

$$\sigma_s = \sigma - \sigma_0 . \quad (6)$$

Kann man nun ein Primärfeld mit einer hohen Lösungsgenauigkeit finden, sind die durch die Singularität entstehenden numerischen Fehler im Totalpotential nicht enthalten. Das einfachste Primärfeld ist die analytische Lösung für den homogenen Halbraum. Auch die Lösungen für kompliziertere Modelle wie z. B. Mehrschichtfälle können über Integralgleichungsansätze mit einer den Diskretisierungsverfahren überlegenen Genauigkeit berechnet und als Primärpotentiale eingesetzt werden (Li & Spitzer, 2002).

Das primäre Feld genügt mit einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung der Gleichung (1),

$$\nabla \cdot (\sigma_0 \nabla \varphi_p) = -\nabla \cdot \mathbf{j} . \quad (7)$$

Damit kann die Kontinuitätsgleichung unter Einsatz der einfachen Annahmen für die Singularitätenbeseitigung (5) und (6) in eine von den Singularitäten der Einspeisung befreite Differentialgleichung für das Sekundärpotential umgeschrieben werden:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi_s) + \nabla \cdot (\sigma_s \nabla \varphi_p) = 0 . \quad (8)$$

Es gelten dann die Randbedingungen:

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial n} + \beta \varphi_p = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} + \beta \varphi_s = 0 . \quad (9)$$

Durch das Lösen dieser Differentialgleichung erhält man  $\varphi_s$ , und das gesuchte Totalfeld ist durch Addition mit dem bekannten Primärfeld bestimmbar.

## 2.2 Finite Elemente Ansatz

Zur Formulierung eines FE Ansatzes für das Randwertproblem (8) finden sich in der Literatur zwei Herangehensweisen, die vom Resultat her äquivalent sind. Zum einen existiert ein Variationsansatz (Coggon, 1971; Kemna, 2000; Li & Spitzer, 2002), zum anderen existiert die alternative Herangehensweise nach der Methode der gewichteten Residuen (Bing & Greenhalgh, 2001). Im Gegensatz zum Variationsansatz werden dabei keine Extremalprinzipien aus den physikalischen Eigenschaften abgeleitet, sondern es bilden die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen den Ausgangspunkt.

Eine exakte Lösung  $\varphi_s$  für die partielle Differentialgleichung (8) zu finden, ist nur in sehr einfachen oder speziell dafür konstruierten Ausnahmefällen möglich. Eine numerisch gewonnene Lösung  $\tilde{\varphi}_s$  wird daher diese Differentialgleichung nur fehlerhaft erfüllen.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{\varphi}_s) + \nabla \cdot (\sigma_s \nabla \varphi_p) = R \quad \text{in} \quad \Omega \in \mathbb{R}^3 . \quad (10)$$

Das Residuum  $R$  soll im inneren des Gebietes  $\Omega$  möglichst klein werden. Im Rahmen der Strategie der gewichteten Residuen führt man beliebige Gewichtsfunktionen  $w$  ein und läßt das Residuum  $R$  im Sinne einer gewichteten Mittelwertbildung verschwinden.

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{\varphi}_s) + \nabla \cdot (\sigma_s \nabla \varphi_p)] w \, d\Omega = 0 . \quad (11)$$

Im Falle der exakten Lösung  $\tilde{\varphi}_s = \varphi_s$  ist das Residuum  $R = 0$  und die Gleichung (11) für jede beliebige Gewichtsfunktion  $w$  erfüllt.

Die Galerkin-Methode zur Berechnung des approximierten Sekundärpotentials  $\tilde{\varphi}_s$  sieht vor, daß die gesuchte Lösungsfunktion an diskreten Knotenpunkten zu berechnen ist. Zu diesem Zweck wird das kontinuierliche Modellgebiet mit Hilfe von Stützstellen in finite Elemente zerlegt. Das gesamte Lösungsgebiet  $\Omega$  wird dabei in  $E$  Teilgebiete und der gesamte Rand  $\Gamma$  in  $B$  Randstücke aufgeteilt:

$$\Omega \rightarrow \bigcup_{e=1}^E \Omega_e \quad \text{und} \quad \Gamma \rightarrow \bigcup_{b=1}^B \Gamma_b. \quad (12)$$

Mit Hilfe von bekannten und stetig differenzierbaren Polynomfunktionen, den Formfunktionen  $\alpha$ , wird die kontinuierliche Näherungslösung  $\tilde{\varphi}_s$  in einen diskreten Vektor  $\varphi_s \in \mathbb{R}^N$  mit  $[\varphi_s]_n = \varphi_{s_n}$  ( $n = 1, \dots, N$ ) überführt.

$$\tilde{\varphi}_s(x, y, z) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(x, y, z) \varphi_{s_n}. \quad (13)$$

Für eine Anzahl von  $N$  repräsentativen Punkten, den sogenannten Knoten, wird dann die unbekannte Lösung  $\varphi_s$  bestimmt. Die Position dieser Knoten stimmt mit den Eck- oder Schnittpunkten der Diskretisierungselemente überein.

Die Integranden in (11) enthalten ebenso hohe Ableitungen wie die Differentialgleichung. Aufgrund der Anforderungen an die Stetigkeit von höheren Ableitungen der verwendeten Formfunktionen, werden die die zweiten partiellen Ableitungen in (11) durch den Satz von Green eliminiert und die Gleichung somit auf die schwache Formulierung des Randwertproblems zurückgeführt. Mit Hilfe des FE-Diskretisierungsansatzes (13) kann durch die Wahl der Gewichtsfunktion das Konzept der gewichteten Residuen genauer spezifiziert werden. Üblicherweise wird das Galerkin-Kriterium angewandt, nach dem die Gewichtsfunktionen  $w$  gleich den Formfunktionen  $\alpha$  zu setzen sind. Durch Anwendung des Galerkin-Kriteriums und Einsetzen von Gleichung (13) in (11) erhält man für jeden Knoten eine linearisierte Gleichung für das unbekannte Potential und damit die allgemeine FE-Formulierung für das Randwertproblem (8):

$$\sum_{n=1}^N \left( \int_{\Omega} \sigma \nabla \alpha_n \nabla \alpha_n \, d\Omega + \int_{\Gamma} \beta \sigma \alpha_n \alpha_n \, d\Gamma \right) \varphi_s = - \sum_{n=1}^N \left( \int_{\Omega} \sigma_s \nabla \alpha_n \nabla \alpha_n \, d\Omega + \int_{\Gamma} \beta \sigma_s \alpha_n \alpha_n \, d\Gamma \right) \varphi_p. \quad (14)$$

Die Linearkombination dieser Gleichungen führt auf ein lineares Gleichungssystem mit einer symmetrischen, dünn besetzten und positiv-definiten Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  mit  $[\mathbf{A}]_{i,j} = A_{i,j}(\alpha_i, \alpha_j)$ , ( $i, j = 1, \dots, N$ )

$$\mathbf{A} \varphi_s = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}(\sigma) \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = -\mathbf{S}(\sigma_s) \varphi_p. \quad (15)$$

Die einzelnen Matrixelemente werden durch die Integration über jedes der finiten Elemente und Randelemente beschrieben:

$$S_{i,j}(\sigma) = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \sigma \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j \, d\Omega + \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \beta \sigma \alpha_i \alpha_j \, d\Gamma. \quad (16)$$

Zur numerischen Implementation dieses Gleichungssystems müssen die Formfunktionen  $\alpha$  näher beschrieben werden. Sie bestimmen, wie das gesuchte Potential innerhalb der einzelnen Elemente approximiert wird. Bisher hat sich in der numerischen Praxis für dreidimensionale Problemstellungen die Wahl von linearen Formfunktionen aus zwei Gründen bewährt. Zum einen ist die damit erreichbare Genauigkeit in den meisten Fällen ausreichend, und zum anderen würde sich die Größe des linearen Gleichungssystems bei quadratischen Formfunktionen um den Faktor 8 vergrößern. In einem Tetraederelement  $e$  mit beispielsweise linearer Formfunktion ist der Verlauf für das Potential gegeben durch:

$$\varphi^e(x, y, z) = d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 z. \quad (17)$$

Bei Untersuchungen mit zweidimensionalen FE-Modellierungen (Friedel & Rücker, 2001) hat sich gezeigt, daß der Einsatz von Formfunktionen höherer Ordnung in bestimmten Situationen gerechtfertigt ist.

Die Berechnung der einzelnen Elementbeiträge in Gleichung (16) kann ganz allgemein über numerische Integration erfolgen, deutlich effizienter dagegen erweist sich die Verwendung von Elementmatrizen. (Schwarz, 1991).

### 3 Beispiele

#### 3.1 Die vertikale Platte

Zur Untersuchung der Möglichkeiten unstrukturierter Tetraederdiskretisierungen wird auf ein in der Literatur häufig angewandtes Beispiel zurückgegriffen, die vertikale Platte (Dike-Modell) (Li & Spitzer, 2002). Modelliert wurde ein Pol-Pol-Profil mit Berechnung der Sekundärfeldlösung, rechtwinklig über eine 5 m breite und in  $y$ - und  $z$ -Richtung „unendlich“ ausgedehnte Platte. Durch die Ausdehnung des gesamten Modellkörpers von  $3 \text{ km} \times 3 \text{ km} \times 2 \text{ km}$  sollte die Entfernung zu den äußeren Rändern als quasi-unendlich realisiert werden. Das Profil hat eine Länge von 400 m und beginnt mit dem Einspeisepol 20 m vor dem Dike. Die spezifischen elektrischen Widerstände wurden für den homogenen Hintergrund auf  $100 \Omega\text{m}$  und für den Dike auf  $10 \Omega\text{m}$  festgelegt. Bei der Modellerstellung für einen unstrukturierten Gitteraufbau kann die Position von festen Knoten in der entstehenden Diskretisierung von Anfang an fixiert werden, wodurch es möglich ist, Elektroden an jedem beliebigen Ort im Modellraum festzulegen. Die Elektrodenpositionen für das Pol-Pol-Profil wurden so gewählt, daß der Abstand zum Quellpunkt logarithmisch zunimmt. Im Bereich der anstehenden Platte wurden zusätzlich Knoten festgelegt, zum einen, um die Diskretisierung im Bereich der Leitfähigkeitsinhomogenität zu verdichten und zum anderen, um einen größeren Satz an auswertbaren Daten zu erhalten. Das numerische Ergebnis wurde mit analytischen Daten verglichen und in Abb. 2 dargestellt.

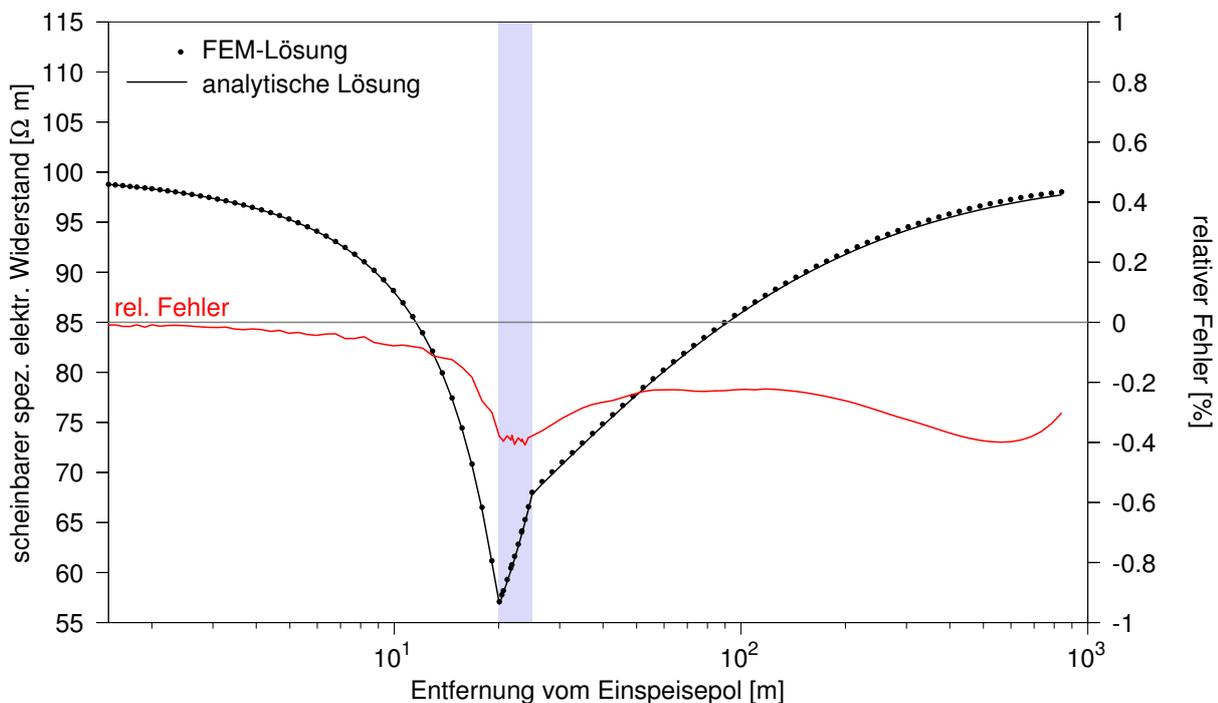


Abbildung 2: Pol-Pol-Messung eines Dike-Modells, die eingefärbte Fläche kennzeichnet den Bereich der anstehenden Platte

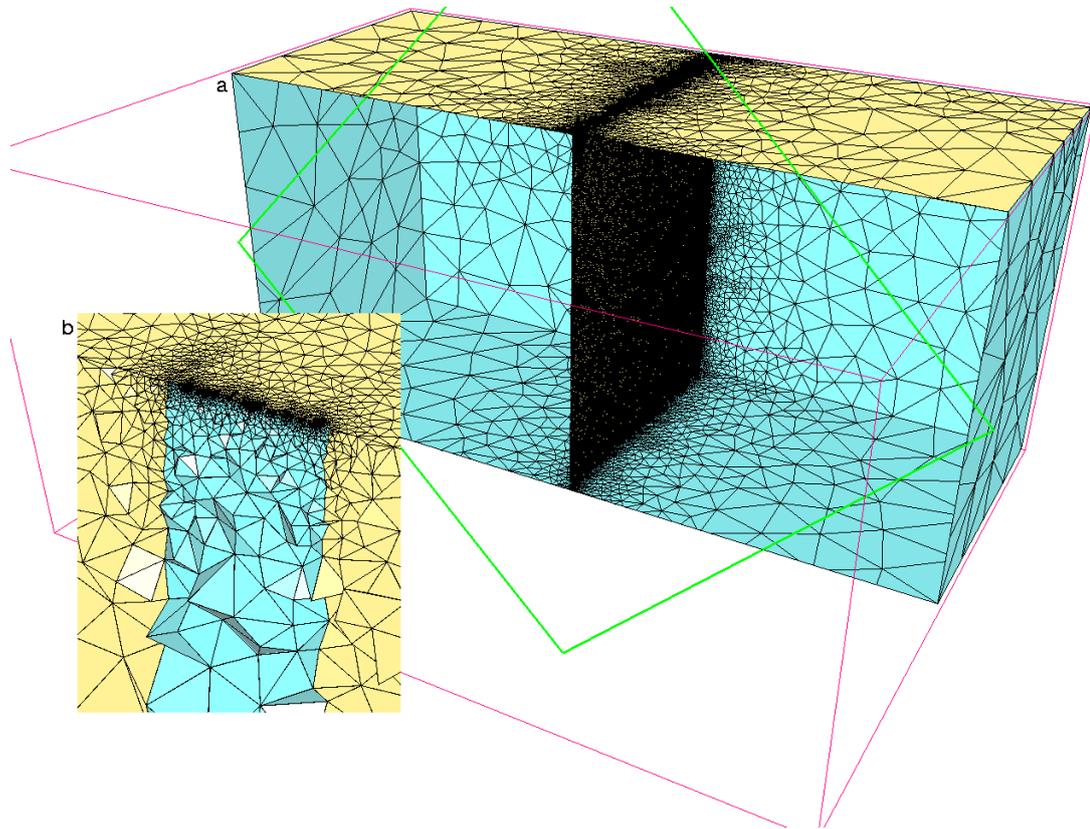


Abbildung 3: FE-Netz zur geoelektrischen Widerstandsmodellierung der vertikalen quasi-unendlich ausgedehnten Platte. **a** Schnitt durch das gesamte Netz (die volumenfüllenden Tetraeder wurden weggelassen); **b** Ausschnittsvergrößerung an der Oberkante des Dikes

Den Potentialverlauf auf dem Profil kann man in drei Abschnitte untergliedern, in der noch annähernd homogenen Umgebung des Einspeisepunktes liegt der relative Fehler zwischen analytischer und numerischer Lösung unter 0.1 %, im Bereich des Dikes erhöht sich der Fehler auf 0.4 % und verbleibt in größerem Abstand zum Quellpunkt auf diesem Niveau.

Abbildung 3a zeigt die Oberfläche der verwendeten Diskretisierung. Die Plattenstruktur weist eine extreme Elementdichte auf, etwa 80 % aller Knoten befinden sich innerhalb bzw. in direkter Nähe zum Dike. Mit zunehmendem Abstand zur Begrenzung des Dikes werden die Tetraeder sehr schnell größer und bieten dadurch eine geringere Diskretisierungsdichte, worin auch die Ursache für die mit großer Entfernung zum Quellpunkt abnehmende Genauigkeit zu suchen ist.

Die Generierung von unstrukturierten Tetraedergittern ist ein iterativer Prozess. Ausgehend von einem einfachsten Netz wird durch sukzessive Zerlegung und Knotenverschiebung die Qualität der einzelnen Tetraeder verbessert. Als Qualitätsmerkmal dient das Delaunay-Kriterium, das Verhältnis der kleinsten Tetraederkante zum Radius einer das Element umschließenden Kugel. Eine steigende Gesamtqualität bedeutet also eine Zunahme von Gitterknoten und gleichzeitig eine gleichmäßigere Verteilung der Tetraedergrößen. Der schnellen Abnahme der Diskretisierungsdichte bei zunehmender Entfernung zu lokal verfeinerten Gebieten wird dadurch entgegengewirkt, was im Endeffekt das numerische Ergebnis verbessert.

Die im Vergleich zum Gesamtgebiet relativ dünne Plattenstruktur des Dikes bietet wenig Spielraum zur Qualitätsverbesserung, wodurch die Tetraeder innerhalb dieses Teilgebietes vielfach zerteilt werden und sich die Knotendichte im Vergleich zum restlichen Raum deutlich konzentriert. Erhöht man die Qualitätsanforderungen an das Netz, um das Modellierungsergebnis (Abb. 2) zu verbessern, würde die Anzahl der Knoten rapide steigen, wobei der Großteil wieder innerhalb der Plattenstruktur zu finden wäre.

Diese Problematik findet sich vor allem bei Strukturen, die im wesentlichen eine zweidimensionale Form haben, d.h. bei denen sich eine der drei räumlichen Ausdehnungen erheblich von den anderen abhebt. Beim Beispiel dieses Dikes ist das Verhältnis von  $x/y/z$ -Ausdehnung  $5/3000/2000$ . Bei einer deutlichen Vergrößerung des gesamten Modellkörpers, um das Profil zu verlängern oder die Einflüsse von Randbedingungseffekten zu verringern, würden sich auch die Geometrieverhältnisse der Platte erheblich verschlechtern und eine Modellierung mit unstrukturierten Tetraedern wäre nur noch unter erheblichem rechentechnischen Mehraufwand zu gewährleisten. Befinden sich mehrere solcher geometrisch ungünstigen Körper im Modellraum, wie es bei Mehrschichtfällen mit eng aufeinander folgenden Schichten der Fall ist, wird dieses Problem noch verstärkt.

Bei strukturierten Gittern, ob blockorientiert oder aus Tetraedern bestehend, ist es zwar auch problematisch diese Modellkörper nachzubilden, sie lassen sich aber zumindest durch eine vordefinierte und dadurch besser kontrollierbare Anzahl von Elementen diskretisieren. Die Methode der Finiten Elemente ist sehr flexibel, wenn es um die Art der Diskretisierungselemente geht, daher ist der Einsatz von hybriden Netzen wahrscheinlich die bessere Lösung. Im Modellraum vorgegebene Großstrukturen mit einem zweidimensionalen Charakter sollten durch strukturierte FE-Netze (Quader, Tetraeder) diskretisiert werden, während die Zerlegung des übrigen Gebiets von den Vorteilen eines unstrukturierten Gitters profitieren kann.

### 3.2 Der Einfluß einer komplexen Geometrie

Geoelektrische Messungen im Bergwerk finden in erster Näherung im Vollraum statt, wobei die Hohlraumoberflächen des Grubengebäudes 3D-Inhomogenitäten im Vollraum darstellen. Der Topographieeffekt auf Messungen des scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstandes entlang einer Bergwerksstrecke muß dazu führen, daß sich Messungen mit kleinen Dipolabständen deutlich von Messungen mit großen Abständen unterscheiden.

Das folgende Beispiel demonstriert, wie mit Hilfe einer unstrukturierten auf Tetraederdiskretisierung basierenden dreidimensionalen Modellierung der Einfluß einer Topographie im Meßgebiet untersucht werden kann. Zur Abschätzung des generellen Effektes einer dreidimensionalen Inhomogenität in der Vollraumgeometrie, wird zunächst eine einfache Untertagestrecke als Referenzgeometrie definiert und darin eine Dipol-Dipol-Sondierung modelliert. Anschließend wird diese Referenzstrecke um ein komplexes Grubengebäude erweitert (Abb. 4) und die Sondierung wiederholt. Der Vergleich beider Modellierungsergebnisse vermittelt einen Eindruck über den Einfluß einer komplexen Topographie auf eine geoelektrische Untertagemessung.

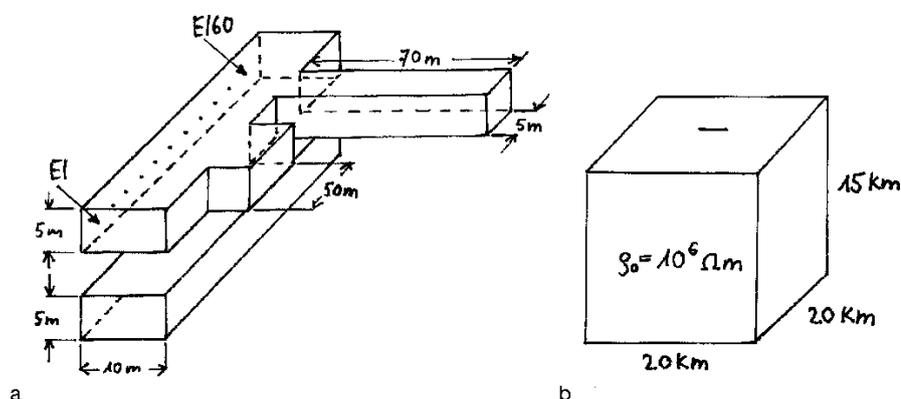


Abbildung 4: **a** Die schematisierte Geometrie des Grubengebäudes, **b** Der gesamte Modellkörper. Die Grube ist mittig 480 m unter der Oberkante eingebettet

Der Hohlraum der Referenzstrecken wird in erster Annäherung durch eine rechtwinklige Geometrie modelliert. Die zur Modellierung benutzte schematisierte Geometrie besteht aus einem homogenen Modellgebiet ( $20 \text{ km} \times 20 \text{ km} \times 15 \text{ km}$ ) zur Repräsentation des Vollraums und einem 5 m hohen (Firsthöhe), 10 m breiten und 1000 m langen Streckenhohlraum. Durch die Tetraederdiskretisierung ist es möglich, den Hohlraum der Grube in die Modellgeometrie einzubinden, d.h. innerhalb des Streckenquaders existieren keine Elemente. Die Luft im Inneren der Strecke muß nicht durch extrem kleine Leitfähigkeiten angenähert werden, sondern ergibt sich automatisch durch die inneren homogenen Neumann-Randbedingungen. Auf der Innenseite dieses Quaders wurden an 160 Gitterpunkten (von  $-70 \text{ m}$  bis  $248 \text{ m}$ ) im Abstand von  $2 \text{ m}$  auf einem horizontalen Profil in  $1.20 \text{ m}$  Höhe die elektrischen Potentiale für Monopol-Einspeisungen modelliert. Das modellierte Grubengebäude wurde in eine Tiefe von  $480 \text{ m}$  unter die angenommene Geländeoberfläche des Vollraums gelegt. Der spezifische elektrische Widerstand des die Grube umgebenden Materials wurde in Anlehnung an in einem Kalisalzbergwerk real gemessene Werte (Jacobs et al., 2004) auf  $10^6 \Omega \text{m}$  festgelegt.

Abbildung 5 zeigt das Ergebnis einer auf dem Meßprofil modellierten Dipol-Dipol-Sondierungskurve mit  $2 \text{ m}$  Dipolweite. Die Einspeiseelektroden A und B befinden sich im Abstand von  $2 \text{ m}$  in der Mitte des Profils, die Meßdipolweite beträgt ebenfalls  $2 \text{ m}$ . Zur Berechnung der scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände wurde der Konfigurationsfaktor für den Vollraum verwendet. Die für den homogenen Fall zu erwartenden Widerstandswerte finden sich jedoch nur in einiger Entfernung zu den Einspeisepunkten und steigen bei Annäherung an die Quellen mit einem Faktor von bis zu 2 an. Dies ist mit dem Übergang vom Vollraum zum Halbraum zu erklären. Die Halbraumsituation tritt bei kleinen Auslagen der Meßanordnung auf und ist vom Hohlraumquerschnitt also der Größe der inneren Oberfläche am Meßprofil abhängig. Bei zunehmenden Abständen zwischen Strom- und Spannungselektroden wird die Messung von der gesamten dreidimensionalen Umgebung der Strecke beeinflusst.

Mit Hilfe der einfachen Referenzgeometrie für diese Bergwerksstrecke können Konfigurationsfaktoren bestimmt werden, um den Einfluß des Halbraum-Vollraum-Übergangs bei weiteren bzw. komplexeren

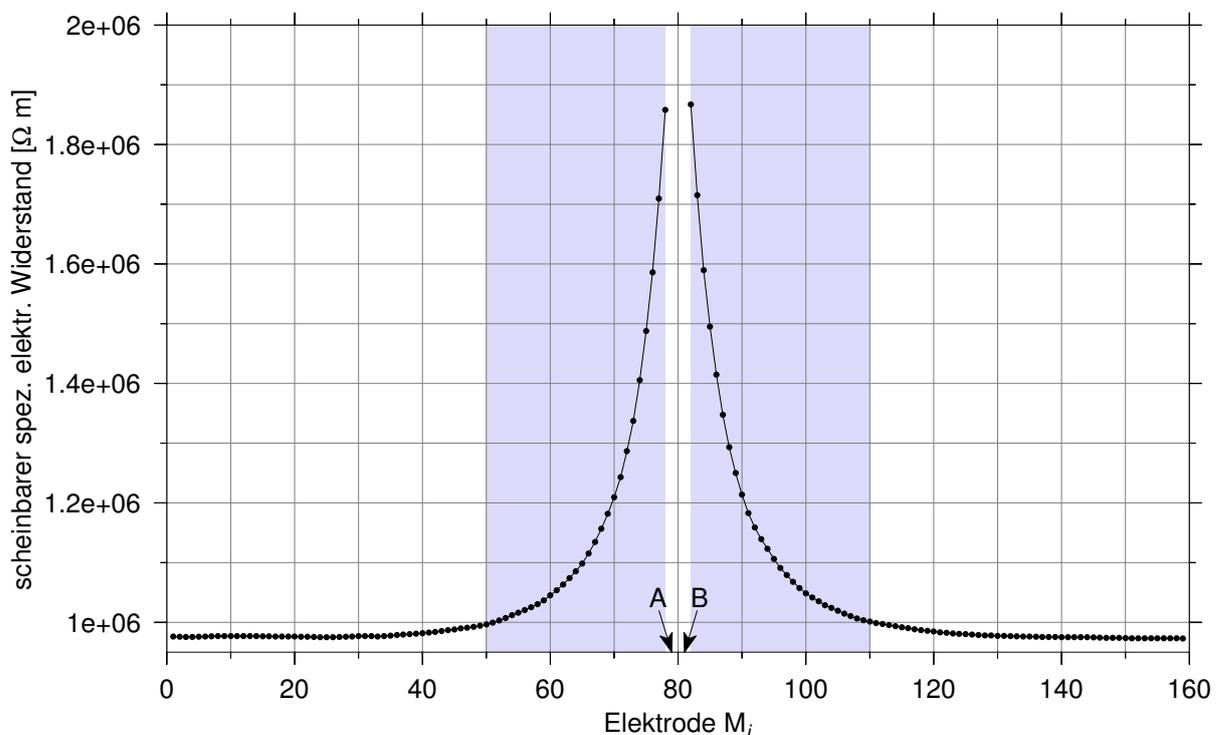


Abbildung 5: Dipol-Dipol-Sondierungskurve zur Bestimmung des Halbraum-Vollraum-Übergangs einer Untertagemessung. Die eingefärbte Fläche kennzeichnet den Übergangsbereich

Modellierungen zu korrigieren. Für die Abschätzung des Einflusses einer komplexeren Erweiterung der einfachen Grubentopographie auf eine geoelektrische Messung, wurden zusätzlich zwischen  $-25$  m und  $25$  m eine Streckenverbreiterung auf  $20$  m, eine  $70$  m lange Streckenabzweigung zwischen  $85$  m und  $90$  m und eine  $20$  m tiefer gelegene,  $10$  m breite Parallelstrecke berücksichtigt (Abb. 4a). Diese Geometrieconfiguration wurde entsprechend der Hohlräumeituation des Kalisalzbergwerks gewählt, in dem geoelektrische Messungen durchgeführt wurden (Jacobs et al., 2004).

Abbildung 6 zeigt einen kleinen Ausschnitt des Tetraedernetzes, mit dem das Modell diskretisiert wurde. Die Voraussetzung zur Widerstandsmodellierung mit der Technik der Singularitätenbeseitigung ist die Existenz eines Primärpotentials, das sich allerdings für Problemstellungen mit komplizierteren topographischen Einflüssen nicht analytisch berechnen läßt. Aus diesem Grund wurde für diese Rechnung das Totalfeld numerisch berechnet, wobei große Diskretisierungsfehler in der Nähe der Singularitäten an den Einspeisepunkten erwartet werden müssen. Die hohe Flexibilität einer Gebietszerlegung in Tetraeder erlaubt jedoch eine starke lokale Verfeinerung um die Einspeiseknoten. Eine automatische adaptive Netz-

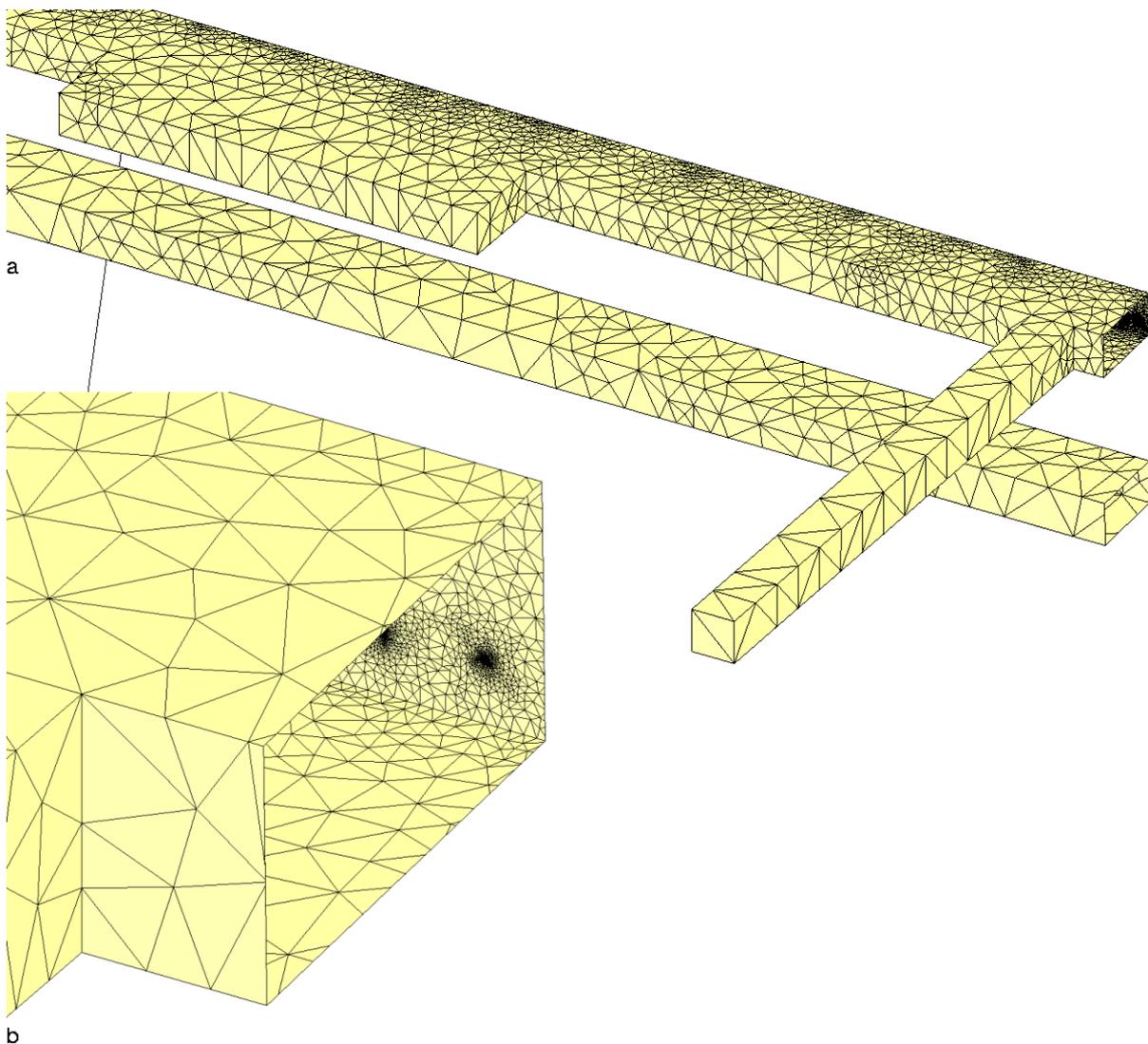


Abbildung 6: Ausschnitt eines Tetraedergitters zur Berechnung des topographischen Einflusses der Hohlräume einer komplexeren Grubengeometrie auf eine geoelektrische Messung. Zur besseren Übersicht ist nur ein Teil der **a**; Hohlraumoberfläche dargestellt, alle volumenfüllenden Tetraeder wurden weggelassen. **b**; stark vergrößerter Ausschnitt mit lokaler Netzverfeinerung um die Elektroden. Das Gitter enthält  $431729$  Knoten und  $2371948$  Tetraeder.

verfeinerung, wie sie für zweidimensionale Probleme schon angewandt wird (Friedel & Rücker, 2001), ist auf Grund der schwierigen Umsetzung in 3D noch nicht implementiert. Um dennoch eine möglichst hohe Knotendichte in der Nähe der singulären Quellknoten zu erreichen, werden im Rahmen der Netzverfeinerung Stützknöten eingeführt, die nur um 1 mm versetzt zu den Knöten liegen, die verfeinert werden sollen. In Abbildung 6b erkennt man deutlich die extrem verdichteten Knötenpunkte entlang des Profils. Durch dieses Beispiel wird die riesige Geometriedynamik ( $1:10^6$ ) eines solchen Tetraedernetzes mit lokalen Verfeinerung deutlich.

Das Ergebnis der Modellierung für den komplexen Grubenkörper ist in Abbildung 7 zu sehen. Dargestellt ist eine Dipol-Dipol-Pseudosektion, wobei von den Daten die Modellierungsergebnisse für die einfache Referenzgeometrie der quaderförmigen Strecke abgezogen wurden. Man erkennt deutlich den Einfluß der im Vergleich zur Referenzstrecke inhomogenen Bereiche, die Streckenverbreiterung, der Streckenabzweig und die Parallelstrecke. Mit Absolutbeträgen von  $2 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4 \Omega\text{m}$  für die Differenz des scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstand sind diese 3D-Einflüsse im Vergleich zum angenommenen homogenen Hintergrund von  $10^6 \Omega\text{m}$  aber eher gering. Diese durch die zusätzlichen Hohlräume bedingten Leitfähigkeitsanomalien von ca. 2 – 4 % werden sich in real gemessenen Daten daher fast nicht abzeichnen.

Das Fazit dieser Untersuchung ist, daß ein Topographie-Einfluß des Grubengebäudes auf untertägige geoelektrische Messungen vorhanden ist. Besonders der Effekt des Halbraum-Vollraum-Übergangs ist

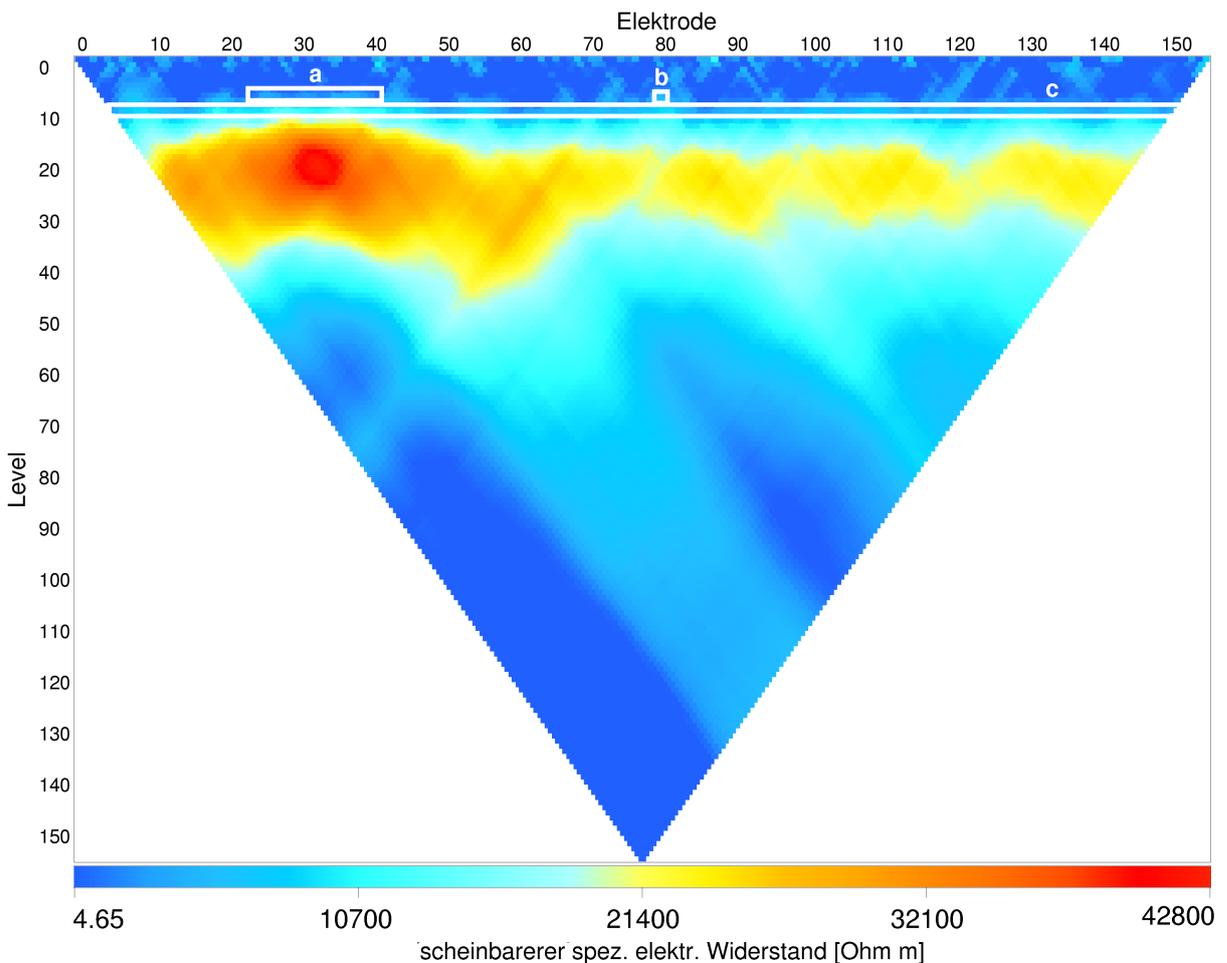


Abbildung 7: Dipol-Dipol-Pseudosektion der absoluten Differenz des scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstands zwischen Modellierung mit Referenzgeometrie und Modellierung mit komplexer Grubentopographie. Die Streckenverbreiterung **a**, der Streckenabzweig **b** und die Parallelstrecke **c** sind in ihrer angenommenen Tiefe eingezeichnet.

als potentielle Fehlerquelle einzuschätzen, dessen Einfluß jedoch vom Verhältnis der Abstände zwischen Strom-Spannungselektroden zur Hohlraumgröße abhängt. Es ist zu erwarten, daß die Größe des Einflusses einer untertägigen Hohlraumtopographie auch von den spezifischen elektrischen Widerständen des umgebenden Materials abhängig zu machen ist.

## 4 Zusammenfassung

Anhand zweier Beispiele wurde untersucht, ob sich eine auf der Basis unstrukturierter Tetraederdiskretisierungen beruhenden Finite-Elemente-Modellierung zum Einsatz in der Gleichstromgeoelektrik eignet. Das erste Beispiel, die Modellierung eines Pol-Pol-Profiles über einem Dike-Modell, zeigt bereits einige Schwierigkeiten bei dieser Art der Gebietszerlegung. Besitzt ein Körper im Modellraum einen zu großen Verhältnis innerhalb seiner  $x/y/z$  Ausdehnung, ist er z. B. extrem flach im Vergleich zu seiner großen Tiefe und großen Breite, dann sind unstrukturierte Tetraedergitter in Bezug auf die Knotenverteilung ungünstig konditioniert, was die Gesamtgröße des zu modellierenden Problems und somit auch die Genauigkeit der erreichbaren Lösung einschränkt.

Die Vorteile der unstrukturierten Diskretisierung werden im zweiten Beispiel deutlich. Gebiete mit komplexer Topographie können modelliert werden, wodurch man den Einfluß der geometrischen Gegebenheiten auf geoelektrische Messungen bestimmen kann. Das elektrische Primärfeld für komplizierte Modellgeometrien kann nicht analytisch bestimmt werden, weshalb das Vorwärtsproblem für das Totalfeld gelöst werden muss. Die große Flexibilität von Tetraedergittern ermöglicht jedoch die lokale Netzverfeinerung in der Umgebung von Elektrodenknoten, wodurch der Fehleranteil der Quellsingularitäten erheblich verkleinert wird.

## Danksagung

Diese Arbeit wurde gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Ja 590/18-1).

## Literatur

- Bing, Z. & Greenhalgh, S. A. Finite element three-dimensional direct current resistivity modelling: accuracy and efficiency considerations. *Geophysical Journal International* 145: 679–688, 2001
- Coggon, J. H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics* 36: 132–155, 1971
- Dey, A. & Morrison, H. F. Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting* 27: 106–136, 1979
- Fox, R. C., Hohmann, G. W., Killpack, T. J. & Rijo, L. Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys. *Geophysics* 45: 75–93, 1980
- Friedel, S. & Rücker, C. FEM-Modellierung mit adaptiver Netzverfeinerung in der Gleichstromgeoelektrik. In: Proc. 19. Kolloquium Burg Ludwigstein, Elektromagnetische Tiefenforschung, 120–128, 2001
- INRIA-Rocquencourt. Medit: A user-friendly mesh viewer. Gamma project at INRIA-Rocquencourt, 2003. URL <http://www-rocq1.inria.fr/gamma/medit/medit.html>

- Jacobs, F., Just, A., Krause, Y., Tuch, A., Knieß, R., Schuck, A., Schulz, R., Kurz, G., Igel, J., Lindner, U., Schicht, T., Schwandt, A., Kühnicke, H. & Schulze, E. Geophysikalische Erkundung als Beitrag zur Bewertung der Langzeitsicherheit von Endlagern und Untertagedeponien, 2004. Abschlussbericht BMBF-Forschungsvorhaben
- Kemna, A. Tomographic inversion of complex resistivity. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2000
- Li, Y. & Spitzer, K. Three-dimensional DC resistivity forward modelling using finite elements in comparison with finite-difference solutions. *Geophysical Journal International* 151: 924–934, 2002
- Lowry, T., Allen, M. B. & Shive, P. N. Singularity removal: a refinement of resistivity modeling techniques. *Geophysics* 54: 766–774, 1989
- Mufti, I. R. Finite difference resistivity modeling for arbitrary shaped two-dimensional structures. *Geophysics* 41: 62–78, 1976
- Pain, C. C., Herwanger, J. V., Worthington, M. H. & de Oliveira, C. R. Effective multidimensional resistivity inversion using finite-element techniques. *Geophysical Journal International* 151: 710–728, 2002
- Pridmore, D. F., Hohmann, G. W., Ward, S. H. & Sill, W. R. An investigation of finite-element modelling for electrical and electromagnetic data in three dimensions. *Geophysics* 46: 1009–1024, 1981
- Queralt, P., Pous, J. & Marcuello, A. 2-D resistivity modelling: An approach to arrays parallel to the strike direction. *Geophysics* 56: 941–950, 1991
- Schwarz, H. R. Methode der finiten Elemente. B.G. Teubner, Stuttgart, 1991
- Si, H. TETGEN-1.2: A quality tetrahedral mesh generator, 2003. URL <http://tetgen.berlios.de/>
- Spitzer, K. A 3-D finite-difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient method. *Geophys. J. Int.* 123: 903–914, 1995
- Sugimoto, Y. Shallow high-resolution 2-D and 3-D electrical crosshole imaging. *The Leading Edge* 1425–1428, 1999
- Zhang, J., Mackie, R. & Madden, T. 3-D resistivity modelling and inversions using conjugate gradients. *Geophysics* 60: 1313–1325, 1995